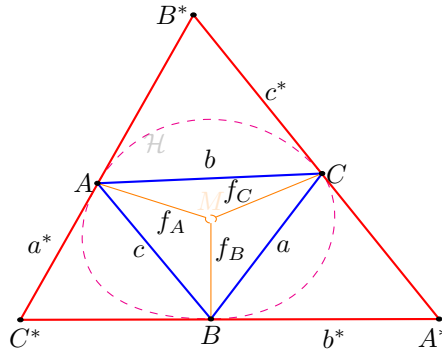


Egymásba írt háromszögek perspektivitása

KURUSA ÁRPÁD, KOZMA JÓZSEF

1. Bevezető

Egy korábbi cikkünkben bebizonyítottuk [4, Theorem 4.2] a következőt. Az egy-



másba írt $ABC\triangle$ és $A^*B^*C^*\triangle$ háromszögek esetén a belső $ABC\triangle$ háromszög csúcsain rendre átmenő azon f_A , f_B és f_C egyenesek, melyek harmonikus egyenesnégyeseket alkotnak az A , B és C csúcsokon áthaladó további három-három oldal-egyenessel, nevezetesen a b, c, a^* , c, a, b^* és a, b, c^* oldalegyenes-hármasokkal, *pon- tosan akkor illeszkednek egy közös pontra, ha van olyan ellipszis, melynek $ABC\triangle$ egy beírt, $A^*B^*C^*\triangle$ pedig egy körülírt háromszöge.*

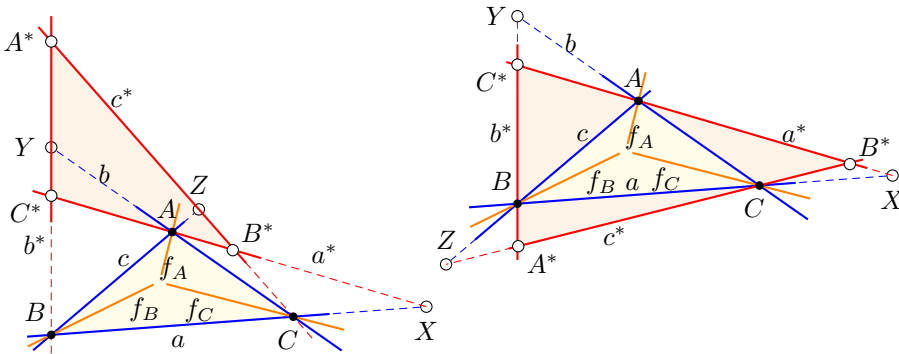
Dolgozatunk az ebben az eredményben megmutatkozó jelenséget vizsgálja.

2. A feladat megfogalmazása

Az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszöget az $ABC\triangle$ háromszög *hozzáírt háromszögének* nevez- zük, ha megfelelő csúcsaival szemközti a^* , b^* és c^* oldalegyenesei rendre tartalmaz- zák az $ABC\triangle$ háromszög megfelelő csúcsait, vagyis $A \in a^*$, $B \in b^*$, és $C \in c^*$. Két háromszöget *egymáshoz írtnak* mondunk, ha valamelyik a másik hozzáírt három- szöge. Az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszöget az $ABC\triangle$ háromszög *körülírt háromszögének*

nevezzük, ha oldalai rendre tartalmazzák az $ABC\triangle$ háromszög megfelelő csúcsait, vagyis $A \in \overline{B^*C^*}$, $B \in \overline{C^*A^*}$, és $C \in \overline{A^*B^*}$. Ilyen háromszögek esetén az $ABC\triangle$ háromszöget az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszög *beírt háromszögének* nevezzük. Két háromszöget *egymásba írtnak* mondunk, ha valamelyik a másikba beírt háromszög.

Tekintsünk egy $ABC\triangle$ háromszöget megfelelő csúcsaival szemközti a , b és c oldalegyeneseseivel. Legyen az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszög az $ABC\triangle$ háromszög egy hozzáírt háromszöge. Legyen az A , B és C csúcsokon átmenő további egy-egy egyenes rendre f_A , f_B és f_C , és jelöljünk meg további három pontot: $X := a \cap a^*$, $Y := b \cap b^*$ és $Z := c \cap c^*$. Így az $ABC\triangle$ minden csúcsán négy egyenes megy át (lásd a 2.1. ábrát). Három fontos pont nem jelenik meg a 2.1. ábrán. Ezek az f_A ,



2.1. ábra. Az alapkonfiguráció két esetben

f_B és f_C egyenesek metszetei a szemközti oldallal, vagyis $A' := f_A \cap a$, $B' := f_B \cap b$, és $C' := f_C \cap c$. A továbbiakban ebből az *alapkonzfigurációból* indulunk ki.

A *feladatunk* olyan feltételek meghatározása, melyek garantálják, vagy akár ekvivalensek azzal, hogy az f_A , f_B és f_C egyeneseknek legyen egy közös pontja.

A már hivatkozott [4, Theorem 4.2] eredmény szerint ilyen feltétel az, hogy legyen az $ABC\triangle$ háromszögnek olyan körülírt $\mathcal{H}$ ellipszise, amely rendre érinti az a^* , b^* és c^* egyeneseket, és $(b, c; a^*, f_A) = (c, a; b^*, f_B) = (a, b; c^*, f_C) = -1$.

3. Előismeretek

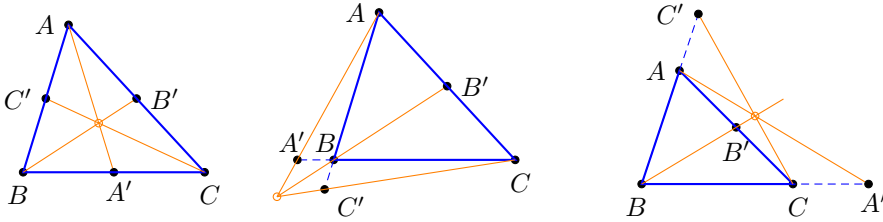
Belső ponttal rendelkező, konvex ponthalmaz határát *konvex görbének* nevezzük. Ha ez minden pontban differenciálható, akkor *oválisról* beszélünk. Egy $\mathcal{O}$ oválisnak minden O pontjában pontosan egy érintője van, melyet $t_O^\mathcal{O}$ jelöl¹. Egy $ABC\triangle$ háromszöget az $\mathcal{O}$ ovális *beírt háromszögének* nevezünk, ha $\mathcal{O}$ tartalmazza a csúcsait. Az $ABC\triangle$ háromszöget az $\mathcal{O}$ ovális *hozzáírt háromszögének* nevezzük, ha $\mathcal{O}$ érinti az oldalegyeneseseit. Az olyan hozzáírt háromszöget, amelynek minden érintési pontja a háromszög oldalán van, *körülírt háromszögnek* nevezzük.

¹Ha a kontextusból világos az ovális, akkor az egyszerűbb $t_O = t_O^\mathcal{O}$ jelölést használjuk.

A kollineáris, rendezett P, Q, R ponthármasok $(P, Q; R)$ *osztóviszonya* olyan valós szám, melyre $R \neq Q$ esetén $(P, Q; R)\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PR}$ érvényes.² A kollineáris, rendezett P, Q, R, S pontnégyesekre, ahol $P \neq Q$, a $(P, Q; R, S) = (P, Q; R)/(P, Q; S)$ valós számot *kettősviszonynak* nevezzük.

3.1. Ceva-tétel. [7, 113. old.] Az $ABC\triangle$ háromszög rendre a, b és c oldalegyenesein lévő, a csúcsoktól különböző A', B' és C' pontok által meghatározott AA', BB' és CC' egyenesek akkor és csak akkor konkurensok, ha az osztóviszonyokra

$$(3.1) \quad (B, C; A')(C, A; B')(A, B; C') = 1.$$



Ceva-konfigurációk

A (szokásos) affin síkon a párhuzamossági reláció ekvivalenciaosztályait *ideális pontoknak*, ezek halmazát *ideális egyenesnek* nevezzük. Két egyenes párhuzamossága így azt jelenti, hogy „metszetük egy ideális pont”.

Innentől *projektív síkon* dolgozunk, amelyre az ideális pontokkal és az ideális egyenessel kibővített affin síkként gondolunk³.

Miután kibővítéssel megkaptuk a projektív síkot, az egyenesek egyforma szerepet játszanak, akár csak a pontok. Ezért a projektív sík egyenesei nem megkülönböztethetőek, így a projektív síkban az, hogy melyik egyenest tekintjük ideálisnak, csak választás kérdése. Ha kijelölünk egy ideális egyenest, akkor a projektív sík „maradéka” egy affin sík. A projektív sík négy kollineáris pontjához hozzárendelhető a *kettősviszonyuk*, mert annak értéke nem függ attól, hogy mely projektív egyenes elhagyásával kapott affin síkban számoljuk ki kettősviszonyuk értékét.

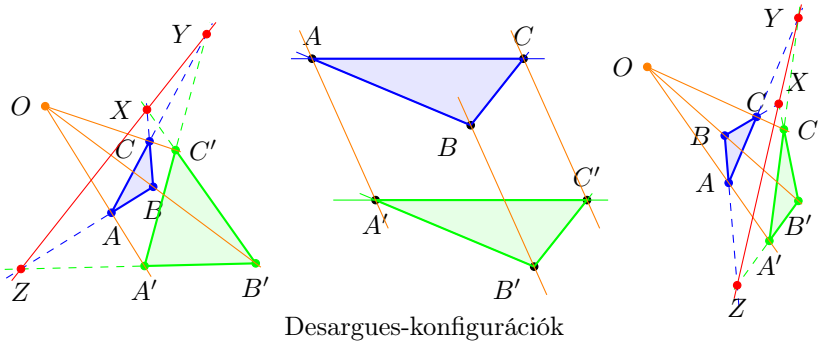
Papposz tétele [6, 23. oldal] szerint igaz, hogy ha négy konkurens egyenes metsz két tetszőleges egyenest, akkor az egyeneseken kapott négy-négy metszéspont ugyanolyan sorrendben vett kettősviszonyai megegyeznek. Ezt a bármely metsző egyenesen kialakuló kettősviszonyt hívjuk a *konkurens egyenesnégyesek kettősviszonyának*.

²A szokásokat követve, $Q = R$ esetén $(P, Q; R)$ értékét végtelennek, ha pedig R a PQ egyenes (végtelen távoli) ideális pontja, akkor -1 -nek tekintjük.

³Az ideális pontok az egymással párhuzamos egyenesek közös végtelen távoli pontjaként képzelhetők el, míg az ideális egyenes egy végtelen távoli, minden egyenest metsző egyenesként. Lásd [1, 6].

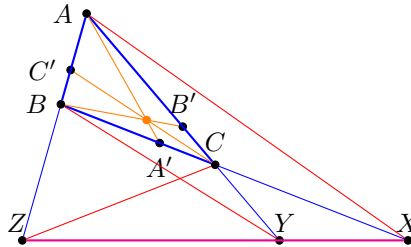
A projektív sík kettősviszonyt megtartó kollineációit *projektivitásoknak* nevezzük. Egy kör projektivitás melletti, vagyis *projektív képe* az azt nem metsző ideális egyenes által „meghagyott” affin síkban mindig ellipszis⁴.

A valós projektív sík egyik alapvető ismérve a *Desargues-tulajdonság*. Tekintsünk olyan nem elfajuló ABC és $A^*B^*C^*$ háromszögeket, amelyekre $A \neq A^*$, $B \neq B^*$, és $C \neq C^*$. Ezeket *pontra nézve perspektívnek* mondjuk, ha a háromszögek megfelelő csúcsain átmenő AA^* , BB^* és CC^* egyenesek egy – esetleg ideális – közös pontra illeszkednek. *Egyenesre nézve perspektívnek* mondjuk őket, ha a háromszögek megfelelő oldalegyeneseseinek $AB \cap A^*B^*$, $BC \cap B^*C^*$ és $CA \cap C^*A^*$ metszéspontjai egy – esetleg ideális – közös egyenesre illeszkednek.



3.2. Desargues-tétel. [7, 172. old.] *A valós projektív sík Desargues-tulajdonságú, vagyis a nem elfajuló háromszögpárok pontosan akkor perspektívek pontra nézve, ha egyenesre nézve perspektívek*⁵.

Képzeljünk most el, hogy az eredeti Ceva-konfigurációt kiegészítjük az a , b , illetve c oldalegyeneseknek a végtelen távoli egyenessel vett X , Y , illetve Z (ideális) pontjaival.



⁴Ezt könnyű látni, hiszen egyrészt másodrendű görbe, és mint ilyen, bármely affin síkban ellipszis, parabola vagy hiperbola, másrészt mivel nem metszi az ideális egyenest, az ez által meghagyott affin síkban korlátos, tehát ellipszis.

⁵Két háromszöget tehát *perspektívnek* mondunk, akár pontra, akár egyenesre nézve perspektívek.

Ekkor $(A, B; C') = -(A, B; Z, C')$, hiszen $(A, B; Z) = -1$, és a (3.1) egyenlőségben szereplő többi osztóviszony helyébe is a megfelelő kettősviszony ellentettje lép. Ugyanakkor Papposz tételére tekintettel a rendre a C , A , és B pontra illeszkedő egyenesnégyes kettősviszonya megegyezik a c , a , b egyenessel vett metszéspontok kettősviszonyával, vagyis

$$(B, A; Z, C') = (a, b; c^*, f_C), (C, B; X, A') = (b, c; a^*, f_A), (A, C; Y, B') = (c, a; b^*, f_B),$$

tehát az alábbi eredményt kapjuk.

3.3. Projektív Ceva-tétel. Tekintsük az alapkfigurációt.

- (1) Ha az f_A , f_B és f_C egyenesek konkurrensek, és az X , Y , Z pontok kollineárisak, akkor

$$(3.2) \quad (a, b; c^*, f_C)(b, c; a^*, f_A)(c, a; b^*, f_B) = -1.$$

- (2) Ha (3.2) teljesül, akkor az X, Y, Z pontok pontosan akkor kollineárisak, ha az f_A, f_B és f_C egyenesek konkurrensek.

4. Egymásba írt háromszögek perspektivitása

Egymásba írt háromszögek esetén a projektív Ceva-tétel jelentősen kibővíti a perspektivitás megállapításának lehetőségeit.

4.1. Ceva-féle Desargues-tétel. Tekintsük az alapkfigurációt.

- (1) Ha f_A , f_B és f_C konkurrensek, és

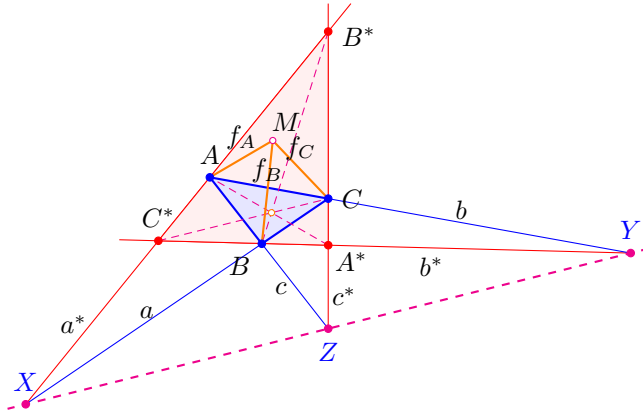
$$(4.1) \quad (a, b; c^*, f_C)(b, c; a^*, f_A)(c, a; b^*, f_B) = -1,$$

akkor az $A^*B^*C^*\triangle$ és $ABC\triangle$ háromszögek perspektívek.

- (2) Perspektív háromszögek oldalegyenesein kívüli minden M pontra az $f_A = AM$, $f_B = BM$ és $f_C = CM$ egyenesek teljesítik a (4.1) egyenlőséget.

Bizonyítás. (1) A (4.1) és a projektív Ceva-tétel értelmében az $X = a \cap a^*$, $Y = b \cap b^*$ és $Z = c \cap c^*$ pontok kollineárisak. Ez a Desargues-tétel szerint azt jelenti, hogy a két háromszög perspektív.

(2) Legyen M (ahogyan a 4.1. ábra mutatja) egy tetszőleges pont (a háromszög oldalegyenesein kívül), és tekintsük az $f_A = AM$, $f_B = BM$ és $f_C = CM$ egyeneseket. Mivel a két háromszög perspektív, az $X = a \cap a^*$, $Y = b \cap b^*$ és $Z = c \cap c^*$ pontok kollineárisak, így a projektív Ceva-tétel miatt $(a, b; c^*, f_C)(b, c; a^*, f_A)(c, a; b^*, f_B) = -1$. ■

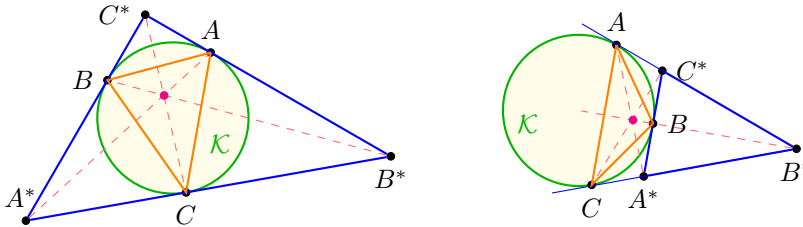


4.1. ábra. Projektív Ceva-tétel és perspektivitás

A Ceva-féle Desargues-tétel azt mutatja, hogy a (4.1) egyenletben azon túl, hogy a szorzat -1 , mindegy, hogy az $(a, b; c^*, f_C)$, $(b, c; a^*, f_A)$ és $(c, a; b^*, f_B)$ számok milyenek. Se több, se kevesebb, hanem csak annyi következik, hogy az egymásba írt háromszögek perspektívek. Ha tehát valamilyen geometriai objektumot szeretnénk az egymásba írt háromszögek perspektivitásához rendelni — olyasmit, ami pontosan akkor létezik, ha az egymásba írt háromszögek perspektívek —, akkor mást kell keresni. A keresett objektum a most következő állítás szerint az ellipszis.

4.2. Ellipszises Desargues-tétel. Tekintsük az alapkonzfigurációt.

- (1) Ha $ABC\triangle$ és $A^*B^*C^*\triangle$ rendre a $\mathcal{K}$ ellipszis beírt, illetve hozzáírt háromszöge, akkor $ABC\triangle$ és $A^*B^*C^*\triangle$ perspektív.
- (2) Ha az $ABC\triangle$ és az $A^*B^*C^*\triangle$ háromszögek perspektívek, akkor létezik egy és csak egy olyan $\mathcal{K}$ ellipszis, mely átmegy az $ABC\triangle$ csúcsain, és ezekben rendre a^* , b^* és c^* az érintője.



4.2. ábra. Ellipszises Desargues-konfigurációk

A bizonyítást itt nem közöljük, mert az (1) Brianchon tételének [6, 74. oldal] speciális esete, a (2) pedig a kúpszeletek alaptételének [6, 65. oldal] és Brianchon tételének közvetlen következménye.

Kétféle Desargues-tételünket összevetve a projektív Ceva-tétel feltétele is megjeleníthető egy illeszkedő ellipszissel, ami bizonyos értelemben teljes választ ad a feladatunkban megfogalmazott problémára.

4.3. Ellipszises Ceva-tétel. Tekintsük az alapkonzfigurációt.

- (1) Ha $ABC\triangle$ a $\mathcal{K}$ ellipszis egy beírt háromszöge, $A^*B^*C^*\triangle$ pedig egy hozzáírt háromszöge, akkor az f_A, f_B, f_C egyenesek pontosan akkor konkurrensek, ha

$$(4.2) \quad (b, c; a^*, f_A)(c, a; b^*, f_B)(a, b; c^*, f_C) = -1.$$

- (2) Amennyiben (4.2) teljesül, az f_A, f_B és f_C egyenesek pontosan akkor konkurrensek, ha létezik az $ABC\triangle$ háromszögnek olyan $\mathcal{K}$ körülírt ellipszise, melynek $A^*B^*C^*\triangle$ egy hozzáírt háromszöge.

Bizonyítás. (1) Ha f_A, f_B, f_C konkurrensek, akkor a projektív Ceva-tétel és az ellipszises Desargues-tétel szerint $(b, c; f_A, t_A)(c, a; f_B, t_B)(a, b; f_C, t_C) = -1$.

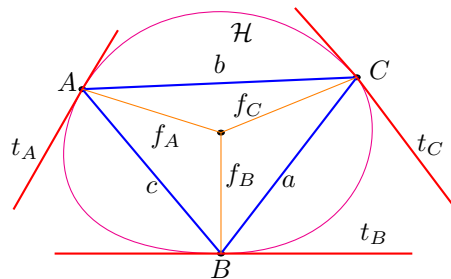
(2) Ha $(b, c; f_A, t_A)(c, a; f_B, t_B)(a, b; f_C, t_C) = -1$, akkor az ellipszises Desargues-tétel szerint az $X = t_A \cap a$, $Y = t_B \cap b$ és $Z = t_C \cap c$ metszéspontok kollineárisak, így a projektív Ceva-tétel szerint az f_A, f_B, f_C egyenesek konkurrensek.

A fordított irány igazolása. Mivel f_A, f_B, f_C konkurrensek, és (4.2) teljesül, a projektív Ceva-tétel szerint X, Y és Z kollinearitása következik. A Desargues-tétel szerint ebből következik, hogy $ABC\triangle$ és $A^*B^*C^*\triangle$ perspektívek. Az ellipszises Desargues-tétel szerint ebből következik, hogy van olyan $\mathcal{K}$ körülírt ellipszise az $ABC\triangle$ háromszögnek, melynek $A^*B^*C^*\triangle$ egy hozzáírt háromszöge. ■

5. A π - és π^* -tulajdonságú oválisok

Az Ellipszises Ceva-tétel felveti a következő kérdést: Vajon létezik az ellipszistől különböző olyan ovális, amely ugyanígy jellemzi a perspektivitást?

Most erre a kérdésre adunk választ.



5.1. ábra. Ovális és perspektivitás

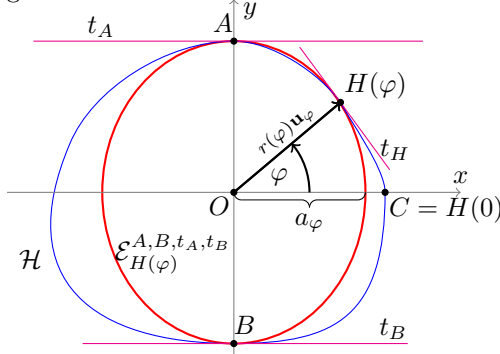
Legyen (α, β, γ) olyan valós számhármass, hogy $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -1$. Egy $\mathcal{O}$ oválist $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságúnak mondunk, ha minden beírt $ABC\triangle$ háromszögre a rendre annak csúcsain áthaladó f_A, f_B, f_C egyenesek konkurrensek, amennyiben $(b, c; t_A, f_A) = \alpha$, $(c, a; t_B, f_B) = \beta$, és $(a, b; t_C, f_C) = \gamma$, ahol t_A, t_B és t_C az $\mathcal{O}$ ovális érintőit jelöli a háromszög megfelelő csúcsaiban (lásd az 5.1. ábrát).

A [4, Theorem 4.2] eredmény a következő tétel speciális esete az $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, -1, -1)$ számhármassra.

5.1. Tétel. *Egy ovális akkor és csak akkor $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságú, ha ellipszis.*

Bizonyítás. Az Ellipszises Ceva-tétel (1) pontja szerint az ellipszisek $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságúak.

A fordított állítás igazolásához tekintsünk egy $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságú $\mathcal{H}$ oválist és ennek egy beírt $ABC\triangle$ háromszögét. Mivel egy $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságú ovális projektív képe is $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ -tulajdonságú, és van olyan projektív transzformáció⁶, amely az A, B, C pontokat rendre a sík $(0, 1)$, $(0, -1)$ és $(1, 0)$ pontjába, a t_A és t_B érintőket pedig rendre az $y = 1$ és $y = -1$ egyenesbe viszi, elegendő a bizonyítást az utóbbi esetben elvégezni.



Tehát $A = (0, 1)$, $B = (0, -1)$, $C = (1, 0)$, $t_A = \{y = 1\}$, és $t_B = \{y = -1\}$, amiért az $O := (0, 0)$ pont a $\mathcal{H}$ által határolt konvex tartomány belső pontja, így minden ebből induló félegyenes egyetlen H pontban metszi a $\mathcal{H}$ oválist.

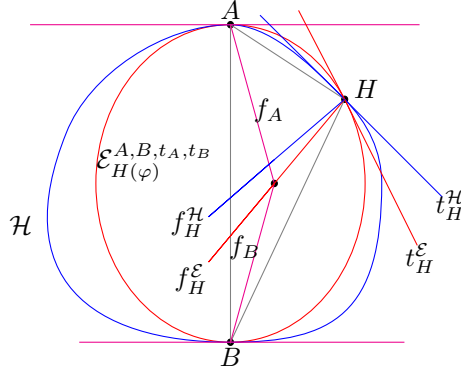
Eszerint a $\mathcal{H}$ ovális $H(\varphi)$ pontjaiba mutató vektorokat megadhatjuk a $\mathbf{h}(\varphi) = r(\varphi)\mathbf{u}_\varphi$ polárkoordinátás alakban, ahol φ az irányított $COH \angle$ szög, $r(\varphi)$ egy pozitív szám, $\mathbf{u}_\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ pedig a φ irányszögű egységvektor. Az $A, B, H(\varphi)$ pontok és a t_A, t_B érintők a kúpszeletek alaptétele [6, 65. oldal] szerint meghatároznak egy $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ ellipszist, melynek egyenlete megfelelő a_φ pozitív számra

$$(5.1) \quad \frac{x^2}{a_\varphi^2} + y^2 = 1$$

⁶Lásd [6, Kollineációk alaptétele a 39. oldalon]

alakú, hiszen t_A és t_B párhuzamos az x -tengellyel. Mivel $H(\varphi)$ is az $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ egy pontja, így rá is teljesül (5.1), vagyis $1 = r^2(\varphi)(\frac{\cos^2 \varphi}{a_\varphi^2} + \sin^2 \varphi)$, amiért

$$(5.2) \quad a_\varphi^2 = \frac{r^2(\varphi) \cos^2 \varphi}{1 - r^2(\varphi) \sin^2 \varphi}.$$



5.2. ábra. $t_H^{\mathcal{H}} \neq t_H^{\mathcal{E}}$ esetén $f_H^{\mathcal{H}}$ és $f_H^{\mathcal{E}}$ is különbözik

Minthogy $\mathcal{H}$ és $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ is $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ -tulajdonságú, a $H(\varphi)$ pontban a $\mathcal{H}$ és $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ érintője megegyezik, mert különben a megfelelő $f_H^{\mathcal{H}}$ és $f_H^{\mathcal{E}}$ egyenesek nem mehetnének át egyformán az $f_A \cap f_B$ metszésponton (lásd az 5.2. ábrát).

Ennek a közös $t_{H(\varphi)} = t_H^{\mathcal{H}} = t_H^{\mathcal{E}}$ érintőnek egy irányvektora [5, 2. old.]

$$(5.3) \quad \dot{\mathbf{h}}(\varphi) = \dot{r}(\varphi) \mathbf{u}_\varphi + r(\varphi) \mathbf{u}_\varphi^\perp,$$

ahol $\mathbf{u}_\varphi^\perp = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ az $\mathbf{u}_\varphi$ -re merőleges egységvektor.

Másfelől az $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ érintőjének meredeksége (5.1) miatt $dy/dx = \frac{-x}{a^2 y}$, így a $H(\varphi)$ pontban

$$(5.4) \quad \frac{\dot{r}(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{\dot{r}(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi} = \frac{-\cos \varphi}{a^2 \sin \varphi},$$

hiszen (5.3) miatt $\dot{\mathbf{h}}(\varphi) = (\dot{r}(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \dot{r}(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)$. Ebből kifejezve az $\dot{r}(\varphi)/r(\varphi)$ mennyiséget, majd felhasználva az (5.2) egyenlőséget

$$\frac{\dot{r}(\varphi)}{r(\varphi)} = \frac{(1 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \frac{(1 - \frac{r^2(\varphi) \cos^2 \varphi}{1 - r^2(\varphi) \sin^2 \varphi}) \sin \varphi \cos \varphi}{\frac{r^2(\varphi) \cos^2 \varphi}{1 - r^2(\varphi) \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = (1 - r^2(\varphi)) \operatorname{tg} \varphi$$

adódik. Tehát, ha $r(\varphi) \neq 1$, akkor $\frac{\dot{r}(\varphi)}{r(\varphi)(1 - r^2(\varphi))} = \operatorname{tg} \varphi$, melyet integrálva

$$\frac{-1}{2} \ln \frac{|1 - r^2(\varphi)|}{r^2(\varphi)} = -\ln |\cos \varphi| + c_0$$

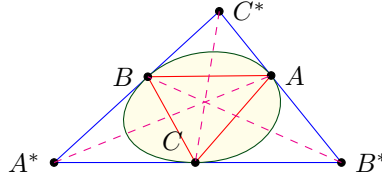
következik valamilyen c_0 konstanssal. Eszerint $r^2(\varphi) = \frac{1}{1 \pm c_1 \cos^2 \varphi}$ valamely c_1 konstansra, amit az (5.2) egyenletbe helyettesítve az egyszerű

$$(5.5) \quad a^2(\varphi) = \frac{\frac{\cos^2 \varphi}{1 \pm c_1 \cos^2 \varphi}}{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{1 \pm c_1 \cos^2 \varphi}} = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi \pm c_1 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{1 \pm c_1}$$

összefüggésre jutunk. Ez azt jelenti, hogy $a(\varphi)$ az összes $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ ellipszisre ugyanaz a konstans érték, vagyis az ellipszisek megfelelő tengelyei egybeesnek. Csakhogy a $H(\varphi)$ pont mindig rajta van az $\mathcal{E}_{H(\varphi)}^{A,B,t_A,t_B}$ ellipszisen, így ebből az következik, hogy $\mathcal{H}$ pontjai az

$$(5.6) \quad \frac{x^2}{1/(1 \pm c_1)} + y^2 = 1$$

egyenletű ellipszisen vannak. Mivel $H(0) = C = (1, 0)$, nyilván $c_1 = 0$, vagyis $\mathcal{H}$ egy egységsugarú kör. ■

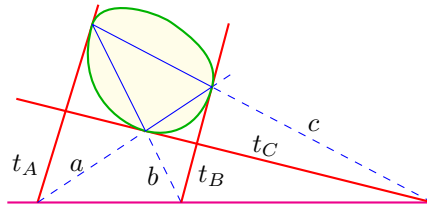


Egy oválist π -tulajdonságúnak mondunk [2, 3], ha minden beírt $ABC\triangle$ háromszög, valamint az annak csúsaiban rendre vett t_A, t_B és t_C érintőknek $A^* = t_B \cap t_C$, $B^* = t_C \cap t_A$ és $C^* = t_C \cap t_B$ metszéspontjaiból alkotott $A^*B^*C^*\triangle$ háromszög perspektív.

5.2. Tétel ([8]). *Egy ovális akkor és csak akkor π -tulajdonságú, ha ellipszis.*

Bizonyítás. Az 5.1. Tételre tekintettel elég belátnunk, hogy egy ovális akkor és csak akkor π -tulajdonságú, ha $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ -tulajdonságú. E tulajdonságok ekvivalenciája a Ceva-féle Desargues-tétel közvetlen következménye. ■

Egy oválist π^* -tulajdonságúnak mondunk, ha minden beírt $ABC\triangle$ háromszög esetén az $X = BC \cap t_A$, $Y = CA \cap t_B$ és $Z = AB \cap t_C$ pontok kollineárisak.



5.3. ábra. A π^* -tulajdonság

A következő tétel nem igényel önálló bizonyítást, mert az 5.2. Tétel duálisa⁷.

5.3. Tétel. *Egy ovális akkor és csak akkor π^* -tulajdonságú, ha ellipszis.*

A szerzők köszönik a tartalom alapos kritikai elemzését Kincses Jánosnak.

Irodalomjegyzék

- [1] Csikós B. és Kiss Gy., *Projektív geometria*, Polygon Kiadó, Szeged, 2011.
- [2] Kárteszi F., *Bevezetés a véges geometriákba*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
- [3] Kiss Gy. és Szőnyi T., *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.
- [4] J. Kozma and Á. Kurusa, Hyperbolic is the only Hilbert geometry having circumcenter or orthocenter generally, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **57:1** (2016), 243–258.
- [5] Kurusa Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.
- [6] Kurusa Á., *Nemeuklidészi geometria*, Polygon Kiadó, Szeged, 2009.
- [7] Kurusa Á., *Bevezetés a geometriába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2015.
- [8] B. Segre, Ovals in a finite projective plane, *Canadian J. Math.*, **7** (1955), 414–416;

Kurusa Árpád, SZTE, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
kurusa@math.u-szeged.hu

Kozma József, SZTE, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
kozma@math.u-szeged.hu

⁷Projektív geometriákban a dualitás azt jelenti, hogy az egyenes és pont, valamint az illeszkedési (például „rajta van” és „átmegy rajta”) kifejezéseket felcserélve igaz állításból szintén igaz állítást kapunk. Lásd [5, 24. oldal, Dualitási tétel] vagy [1, 77. oldal, Dualitás elve].

