

Elágazó folyamatok szemléletes bevezetése generátorfüggvények segítségével

FEKETE ÁRPÁD

1. Bevezetés

A generátorfüggvények a matematika számos ágában jelentős alkalmazásokkal rendelkeznek, többek között felhasználhatjuk ezeket rekurzív egyenletek megoldására, kombinatorikus képletek igazolására, valamint multiplikatív számelméleti függvények tulajdonságainak vizsgálatára.

Az 1970-es években a generátorfüggvényeket a sztochasztikában is alkalmazni kezdték az elágazó folyamatok problémakörében. E téma a 19. századig nyúlik vissza. Sir Francis Galton és Henry William Watson angol tudósok nemesi családnevek kihalásának valószínűségét vizsgálták. A téma alapjának az 1874-ben megjelent „On the probability of extinction of families” című cikkük tekinthető [6]. Ezt a problémát később más matematikusok általánosították, így alapvető jelentőségűvé vált például a populációdinamikában, a nukleáris láncreakció vizsgálatában vagy a fizikában a gyenge elektronáram felerősítésére szolgáló elektronsokszorozó műszer hatékonyságának elemzésében.

E cikk célja, hogy az olvasó kizárólag elemi valószínűségszámítási fogalmak ismeretére támaszkodva és felhasználva a generátorfüggvények tulajdonságait – újszerű módszertani megközelítésben – bevezető képet kapjon az elágazó folyamatokról és ezek néhány alkalmazásáról.

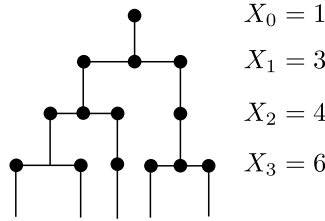
2. Elágazó folyamatok

Az elágazó folyamatok olyan sztochasztikus folyamatok, amelyekben a valószínűségi változók lehetséges értékei megszámlálhatóan végtelen halmazból kerülnek ki, vagy más szóval az állapotterük megszámlálhatóan végtelen. Sztochasztikus folyamat alatt időben végbemenő véletlen folyamatot értünk, amely nem más, mint valószínűségi változók serege az idő szerint indexelve. Tovább szűkítve, az elágazó folyamat egy Markov-folyamat, amely egy populációt modellez, amelyben minden

n . generációban lévő egyed véletlen számú utódot hoz létre, akik majd az $(n + 1)$. generációt alkotják. Ebben a modellben feltesszük még, hogy minden egyed azonos valószínűségi eloszlás szerint hoz létre utódokat és az egyedek egymástól függetlenül szaporodnak. Ha egy egyed létrehozta véletlen számú utódát, akkor utána eltűnik a rendszerből. Annak valószínűsége, hogy egy egyed pontosan k db utódot hoz létre p_k . Ha a ξ valószínűségi változó jelenti egy egyed utódainak számát, akkor ez formálisan:

$$(2.1) \quad P(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Nyilván $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Jelölje X_n a populációt alkotó egyedek számát az n . generációban. Az egyszerű elágazó folyamat egyetlen őst feltételez, ő alkotja a 0. generációt, azaz $X_0 = 1$. Az 1. ábra egy elágazó folyamatot mutat:



1. ábra

Ilyen feltételekkel $\{X_n\}$ Markov-lánc az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapotterén.

2.1. Definíció. *Markov-láncnak* nevezzük az olyan diszkrét időben változó sztochasztikus folyamatot, amelynek az állapottere véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, és az egyes állapotok bekövetkezésének valószínűségei csak a közvetlenül előtte álló állapotoktól függenek.

Markov-láncoknál p_{ij} jelöli az átmenetvalószínűséget, ami annak a valószínűségét jelenti, hogy egy j állapotba kerülünk, feltéve, hogy az i állapotban vagyunk. Ez tehát egy feltételes valószínűség:

$$(2.2) \quad p_{ij} := P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

A p_{ij} számok mátrix formájában is elrendezhetők. A $\mathbf{P} := (p_{ij})$ mátrixot a folyamat *átmenetvalószínűség-mátrixának* nevezzük:

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

A p_{ij} mennyiségek nyilván kielégítik a

$$(2.3) \quad p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(2.4) \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

feltételeket. A (2.4) feltétel csupán azt fejezi ki, hogy valamilyen átmenet biztosan bekövetkezik minden egyes állapotból. A Markov-láncot teljesen meghatározza, ha (2.1) adott és X_0 valószínűség-eloszlása rögzített. A *Markov-tulajdonság* azt jelenti, hogy a folyamat jövőbeni állapota csak a jelen állapottól függ, a múltbeli történésektől nem, azaz a rendszer jelenbeli állapota a lényeges, és nem az, hogy miként került a rendszer ebbe az állapotba. Populációs modellünkben ez azt jelenti, hogy az egyetlen lényeges információ az utolsó ismert populáció nagysága, mivel az utódok száma csak a jelenlegi populáció nagyságának függvénye. Matematikailag:

$$(2.5) \quad p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n = i) \\ = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Tehát $\{X_n\} = X_0, X_1, X_2, \dots$ egy Markov-lánc, ahol X_n valószínűségi változó a populáció nagysága az n . generációban. Az n . generációban lévő X_n számú egyed egymástól függetlenül $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_{X_n}^{(n)}$ számú utódot hoz létre az $(n+1)$. generációnak. $\xi_j^{(n)}$ úgy fogható fel, mint az $(n+1)$. generáció azon egyedeinek száma, melyek az n . generáció j . egyedének utódai. Nyilván $\{\xi_j^{(n)}, n \geq 1, j \geq 1\}$ azonos eloszlású (a közös eloszlás $\{p_k\}$), nemnegatív, egész-értékű valószínűségi változók. E jelölésekkel:

$$(2.6) \quad X_{n+1} = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_{X_n}^{(n)}.$$

Így egy $\{X_n, n \geq 0\}$ elágazó folyamatot definiáltunk, amelyben $X_0 = 1$, $X_1 = \xi_1^{(0)}$, $X_2 = \xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} + \dots + \xi_{X_1}^{(1)}$, $\dots$, $X_n = \xi_1^{(n-1)} + \xi_2^{(n-1)} + \dots + \xi_{X_{n-1}}^{(n-1)}$. Könnyen látható, hogy ha valamely i -re $X_i = 0$, akkor $X_{i+1} = 0$, azaz a folyamat véget ér, vagyis a populáció kihal.

Természetes ötletként merül fel megvizsgálni, hogy mennyi az n . generáció egyedszámának várható értéke, varianciája és mennyi a kihalás valószínűsége. Jelölje μ az egy egyed által létrehozott utódok számának várható értékét, azaz

$$\mu = E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k.$$

Jelölje σ^2 a ξ varianciáját, azaz $\text{Var}(\xi) = \sigma^2$. Jelölje $E(X_n)$ az n . generáció nagyságának várható értékét és $\text{Var}(X_n)$ a varianciáját. Ekkor a populáció méretének

várható értéke az $(n + 1)$. generációban, feltéve, hogy az n -edikben k darab egyed volt:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} E(X_{n+1}|X_n = k) &= E(\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_k^{(n)}) = \\ &= E(\xi_1^{(n)}) + E(\xi_2^{(n)}) + \dots + E(\xi_k^{(n)}) = k\mu. \end{aligned}$$

Ez alapján a teljes várható érték tételéből meghatározható az $E(X_n)$:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n-1} = k) E(X_n | X_{n-1} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n-1} = k) k\mu \\ &= \mu \sum_{k=0}^{\infty} k P(X_{n-1} = k) = \mu E(X_{n-1}). \end{aligned}$$

Ezt n -szer megismételve az alábbi kapjuk:

$$(2.9) \quad E(X_n) = \mu^n E(X_0) = \mu^n. \quad (\text{Az elején feltettük, hogy } E(X_0) = 1.)$$

$\text{Var}(X_{n+1})$ -re a következő számítható ki: $\text{Var}(X_{n+1}) = E(X_n)\sigma^2 + \mu^2 \text{Var}(X_n)$. Ezt felhasználva teljes indukcióval megmutatható, hogy

$$(2.10) \quad \text{Var}(X_n) = \begin{cases} n\sigma^2, & \text{ha } \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}, & \text{ha } \mu \neq 1. \end{cases}$$

(2.9)-ből levonható az a következtetés, hogy a kihalás valószínűsége direkt módon függ a μ értékétől. Ha $\mu > 1$, akkor a populáció méretének várható értéke növekedni fog, ha $\mu < 1$, akkor a várható érték tart nullához, ha n tart a végtelenbe, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 0$. Ha $\mu = 1$, akkor a populáció méretének várható értéke állandó.

A populáció kihalása nyilván akkor következik be, ha a populáció mérete valamelyik generációban lenullázódik. Jelölje T a kihalás véletlenszerű időpontját, azaz azt az első n -et, amelyre $X_n = 0$, azaz $T := \min_{n \geq 0} \{X_n = 0\}$. Nyilván ekkor $X_{n+i} = 0$, minden $i \geq 0$ esetén. Legyen

$$(2.11) \quad u_n = P(T \leq n | X_0 = 1) = P(X_n = 0 | X_0 = 1)$$

a kihalás valószínűsége az n -edik vagy az az előtti generációban.

Nézzük meg a folyamatot az elejéről. A 0. generációban egyetlen egyed van, $X_0 = 1$. Ez az egyed k számú utódot hoz létre. Ezen utódok azután saját utódokat produkálnak. Megfigyelhetjük, hogy ha az eredeti populáció az n -edik generációban kihal, akkor ezen k számú ág minden egyes darabja legkésőbb az $(n - 1)$ -edik generációban elhal. Mivel mind a k számú részpopuláció egymástól független és ugyanazok a statisztikai tulajdonságaik, mint az eredeti populációnak, ezért annak

valószínűsége, hogy ez a k darab ág mindegyike kihál az $(n - 1)$ -edik generációban: u_{n-1} . Tehát a teljes populáció kihalásának valószínűsége az $(n - 1)$ -edik generációban: $(u_{n-1})^k$. A teljes valószínűség tételét felhasználva kapjuk, hogy

$$(2.12) \quad u_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (u_{n-1})^k := \Phi(u_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

A (2.12) kifejezést *generátorfüggvénynek* nevezzük. A következő fejezetben tárgyaljuk a generátorfüggvények legfontosabb tulajdonságait, hogy a (2.12) egyenletet tovább tudjuk elemezni. Annak valószínűsége, hogy a kihálás már az első generációban bekövetkezik, nyilván $u_1 = p_0 = P(\xi = 0) = \Phi(u_0)$. (2.12)-ből adódnak a kihálási valószínűségek: $u_0 = 0$, $u_1 = \Phi(u_0)$, $u_2 = \Phi(u_1)$, $\dots$

3. Generátorfüggvények és a kihálás valószínűsége

Független valószínűségi változók összegének vizsgálatában rendkívül hasznos szerepet játszanak a generátorfüggvények, így az elágazó folyamatok tárgyalásához fontos eszköznek bizonyulnak [3].

Legyen ξ egész-értékű valószínűségi változó, melynek eloszlása (v.ö. (2.1))

$$P(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A $\{p_k\}$ eloszlás generátorfüggvénye egy hatványsor, melynek együtthatóit a $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ sorozat adja:

$$(3.1) \quad \Phi(s) := p_0 + sp_1 + s^2p_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = E(s^\xi), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Könnyű észrevenni, hogy $s \geq 0$ esetén $\Phi(s)$ monoton növekvő függvény, $\Phi(0) = p_0$ és $\Phi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Differenciálva a generátorfüggvényt és a deriváltba az $s = 1$ -et helyettesítve a ξ várható értékét kapjuk, azaz

$$(3.2) \quad \Phi'(1) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots = E(\xi).$$

$\Phi(s)$ második deriváltja $s = 1$ esetén:

$$\begin{aligned} \Phi''(1) &= 2p_2 + 3 \cdot 2p_3 + 4 \cdot 3p_4 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k = E(\xi(\xi-1)) \\ &= E(\xi^2 - \xi) = E(\xi^2) - E(\xi). \end{aligned}$$

Átrendezve:

$$E(\xi^2) = \Phi''(1) + E(\xi) = \Phi''(1) + \Phi'(1).$$

Így

$$(3.3) \quad \text{Var}(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 = \Phi''(1) + \Phi'(1) - [\Phi'(1)]^2.$$

Még két fontos tulajdonságot szükséges megemlíteni. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók a

$$\Phi_{\xi_1}(s) = \Phi_{\xi_2}(s) = \dots = \Phi_{\xi_n}(s) := \Phi(s) = E(s^\xi)$$

generátorfüggvénnyel, akkor az összegük generátorfüggvénye a generátorfüggvényeik szorzata:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \Phi_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}(s) &= E(s^{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}) = E(s^{\xi_1} \cdot s^{\xi_2} \dots s^{\xi_n}) \\ &= E(s^{\xi_1})E(s^{\xi_2}) \dots E(s^{\xi_n}) = \Phi_{\xi_1}(s)\Phi_{\xi_2}(s) \dots \Phi_{\xi_n}(s) = [\Phi(s)]^n. \end{aligned}$$

A levezetésben azt használtuk ki, hogy független valószínűségi változók szorzatának várható értéke a várható értékek szorzata.

Legyen most N nemnegatív, egész-értékű valószínűségi változó, mely független $\xi_1, \xi_2, \dots$ -től és generátorfüggvénye $\Phi_N(s) = E(s^N)$. Legyen $X_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$ egy véletlen tagszámú összeg, és legyen $\Phi_{X_N}(s) = E(s^{X_N})$ az X_N generátorfüggvénye. Ekkor

$$(3.5) \quad \Phi_{X_N}(s) = \Phi_N(\Phi(s)).$$

Ennek bizonyítása a teljes várható érték tételén alapul, melyet itt nem részletezünk.

Térjünk vissza a kihálás valószínűségéhez, amelyre azt kaptuk, hogy $u_n = \Phi(u_{n-1})$ (ld. 2.12). Legyen

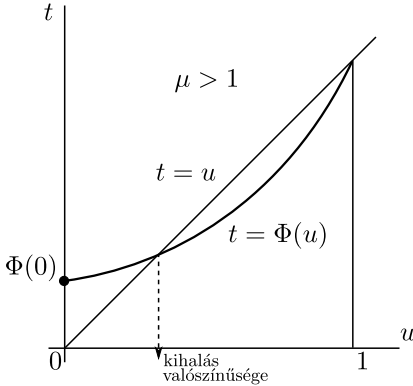
$$u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = P(X_m = 0 \text{ valamely } m > 0\text{-ra}).$$

Felhasználva, hogy Φ folytonos, adódik, hogy $u = \Phi(u)$. Ennek az egyenletnek az $u = 1$ mindig megoldása, mivel láttuk, hogy $\Phi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot 1^k = 1$. Fontos tény az is, hogy $\Phi(u)$ konvex függvény minden $0 \leq u \leq 1$ esetén. Valóban,

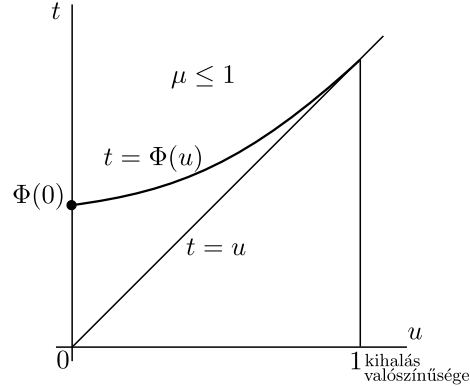
$$\Phi''(u) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k u^{k-2} > 0, \quad \text{minden } 0 \leq u \leq 1\text{-re.}$$

A következő tétel döntő fontosságú a kihálás valószínűségének vizsgálatában [4].

3.1. Tétel. *Ha $\mu = E(\xi) > 1$, akkor a kihálás valószínűsége az $u = \Phi(u)$ egyenlet legkisebb gyöke, melyre $0 \leq u \leq 1$. Ha $E(\xi) \leq 1$, akkor a kihálás valószínűsége 1, azaz $u=1$.*



2. ábra



3. ábra

Bizonyítás. Szemléletesen, grafikusan mutatjuk be. Mivel $\Phi(0) = p_0 > 0$, ezért a $\Phi(u)$ görbe ordinátatengely metszete az origó fölött van. Ha $\mu > 1$, akkor $\Phi(u)$ görbéje a $\Phi(1) = 1$ pontból a $\Phi(0) = p_0$ pontba úgy halad, hogy közben metszi a $t = u$ egyenest (2. ábra).

Így az $u = \Phi(u)$ egyenletnek biztosan van megoldása 0 és 1 között. Ez a megoldás a kihalás valószínűsége, mivel ez a mennyiség a legkisebb nemnegatív megoldás. Ebben az esetben a kihalás nem biztos esemény, mivel $E(X_n)$ végtelenbe tart, amint $n \rightarrow \infty$. Ezt a folyamatot *szuperkritikusnak* nevezzük.

Ha $\mu < 1$, akkor a $\Phi(u)$ görbe a $\Phi(1) = 1$ pontból úgy halad a $\Phi(0) = p_0$ pontba, hogy nem metszi a $t = u$ egyenest (3. ábra).

Így az $u = \Phi(u)$ egyenletnek az $u = 1$ megoldáson kívül nincs más megoldása, azaz a kihalás valószínűsége egy. A kihalás tehát biztosan bekövetkezik, mivel $E(X_n) \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$. Ezt a folyamatot *szubkritikusnak* nevezzük.

Ugyanez a helyzet áll elő, ha $\mu = 1$. A kihalás ebben az esetben is biztosan bekövetkezik, mivel $E(X_n) = \mu^n = 1$, minden n -re. Ezt a folyamatot *kritikusnak* nevezzük. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Még egy fontos formulát megemlítünk. A (3.5) egyenletet elágazó folyamatunkra alkalmazva kapunk egy rekurzív formulát:

$$(3.7) \quad \Phi_{n+1}(u) = \Phi_n(\Phi(u)) = \Phi(\Phi_n(u)).$$

Nézzünk néhány számítási példát elágazó folyamatokra, melyekben meghatározzuk a kihalás valószínűségét.

3.1. Példa. Legyen $p_0 = 1/4$, $p_1 = 1/4$ és $p_2 = 1/2$. A generátorfüggvény $\Phi(u) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}u + \frac{1}{2}u^2$. Ebből $\mu = \Phi'(1) = 5/4$, és az $u = \Phi(u)$ egyenlet megoldásai 1 és $1/2$, tehát a kihalás valószínűsége $1/2$.

3.2. Példa. Legyen $p_0 = 1/2$, $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/4$. A generátorfüggvény $\Phi(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u^2$. Ebből $\mu = \Phi'(1) = 3/4$, és az $u = \Phi(u)$ egyenlet megoldásai 1 és 2, tehát a kihálás valószínűsége 1. (Ez abból is látszik, hogy $\mu < 1$.)

3.3. Példa. Legyen $p_0 = 1/4$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$. A generátorfüggvény $\Phi(u) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2$. Ebből $\mu = \Phi'(1) = 1$, és az $u = \Phi(u)$ egyenletnek most csak az $u = 1$ a megoldása, tehát a kihálás valószínűsége 1. (Ez abból is látszik, hogy $\mu = 1$.)

3.4. Példa. Tekintsük az alábbi elágazó folyamatot. A 0. generációs ős λ paraméterű Poisson eloszlás szerint hoz létre utódokat, majd innentől kezdve az összes többi nemzedékben az utódszám generátorfüggvénye: $\Phi(u) = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{50}u + \frac{24}{50}$. Meghatározzuk a kihálás valószínűségét.

Annak valószínűsége, hogy az első generációban k ($k = 0, 1, 2, \dots$) darab egyed él, a Poisson eloszlás szerint: $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Ezek egymástól függetlenül elindítanak egy $\Phi(u)$ generátorfüggvényű elágazó folyamatot. A teljes rendszer akkor hal ki, ha mind a k darab első nemzedékből származtatott folyamat kihál.

Elsőként kiszámítjuk, hogy valamely ilyen $\Phi(u)$ generátorfüggvényű folyamat milyen valószínűséggel hal ki. Az $u = \Phi(u)$ egyenletet átalakítva: $\frac{1}{2}u^3 - \frac{491}{50}u + \frac{24}{50} = 0$ adódik, ennek keressük a legkisebb nemnegatív gyökét. Mivel $\Phi(1) = 1$, így a bal oldalon lévő polinomból kiemelhetünk $(u - 1)$ -et:

$$(u - 1) \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{24}{50} \right) = 0.$$

Ebből pedig $u_1 = -\frac{8}{5}$, $u_2 = \frac{3}{5}$, $u_3 = 1$ adódik. Tehát u_2 lesz a kihálás valószínűsége, jelöljük ezt a számot mostantól q -val. Legyen továbbá Q az az esemény, hogy a teljes, nulladik generációból származtatott folyamat kihál, és jelölje ennek valószínűségét q_0 .

Ha az első nemzedéknek k számú egyede van, akkor az általuk indított k darab elágazó folyamat függetlensége miatt a teljes kihálás valószínűsége q^k lesz. A teljes valószínűség tétele alapján:

$$\begin{aligned} q_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Q|X_1 = k)P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} q^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda q} = e^{-\frac{2}{5}\lambda} \end{aligned}$$

lesz a kihálás valószínűsége.

3.5. Példa. Legyen a szaporodási eloszlás: $p_0 = 0,3$, $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,2$, és tegyük fel, hogy $X_0 = 1$. Mi a valószínűsége annak, hogy a populáció a második generációban kihál ($X_2 = 0$), feltéve, hogy az elsőben nem hal ki ($X_1 > 0$)?

A kérdéses feltételes valószínűség az alábbi módon írható fel:

$$P(X_2 = 0 | X_1 > 0) = \frac{P(\{X_2 = 0\} \cap \{X_1 > 0\})}{P(X_1 > 0)} = \frac{P(X_2 = 0) - P(X_1 = 0)}{1 - P(X_1 = 0)}.$$

Itt a $P(X_2 = 0)$ valószínűséget kell meghatározni. Az első generáció eloszlása $\Phi(u)$ együtthatóiból, a másodiké pedig (3.7) alapján $\Phi(\Phi(u))$ együtthatóiból adódik. Tehát $\Phi(u) = 0,3 + 0,5u + 0,2u^2$, és

$$\begin{aligned}\Phi(\Phi(u)) &= 0,3 + 0,5(0,3 + 0,5u + 0,2u^2) + 0,2(0,3 + 0,5u + 0,2u^2)^2 \\ &= 0,008u^4 + 0,04u^3 + 0,174u^2 + 0,31u + 0,468.\end{aligned}$$

Az egyedek számának eloszlását az alábbi táblázat mutatja:

Egyedek száma	0	1	2	3	4
0. generáció	0	1	0	0	0
1. generáció	0,3	0,5	0,2	0	0
2. generáció	0,468	0,31	0,174	0,04	0,008

Most már írhatjuk, hogy $P(X_2 = 0 | X_1 > 0) = \frac{0,468-0,3}{1-0,3} = 0,24$. Tehát 0,24 a valószínűsége, hogy a populáció a második generációban kihál, feltéve, hogy az elsőben nem hal ki.

4. Az elágazó folyamatok alkalmazásai

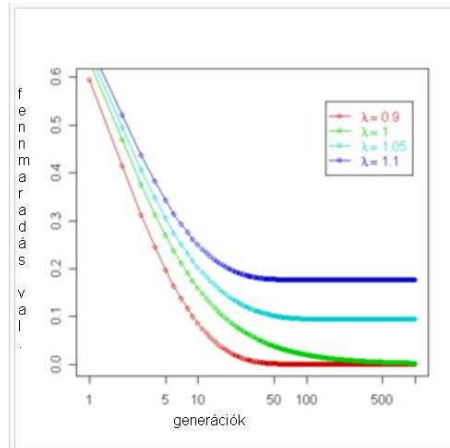
- Gyakran találkozunk az interneten „Küldd tovább!” típusú levelekkel. Feltehetjük, hogy egy személy p_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) valószínűséggel k számú embernek küld tovább egy üzenetet. Ha elküldünk egy levelet egy ismeretlen címre, elágazó folyamatot generálunk. Az elindító lesz a nulladik generációs ős, az ismerősei, akiknek továbbküldi az első nemzedék, és így tovább. Itt a folyamat kihalása annak felel meg, hogy valamely generációban egyik személy sem küldi tovább a levelet.

- Egy szervezet valamely génje mutáns génné alakulhat bizonyos külső hatásokra. Tegyük fel, hogy ez bekövetkezik, az így létrejött mutáns gén lesz a nulladik generációs ős. Innentől kezdve a következő generáció k darab egyedben p_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) valószínűséggel újra megjelenik a mutáns gén. Az elágazó folyamatok segítségével megbecsülhetjük a mutáns gén kihalásának vagy elterjedésének valószínűségét.

- Ha neutron részecskék egy atommaggal ütköznek, széthasítják azt. A hasadás eredményeként m számú neutron keletkezik. Ebben a folyamatban az utódok lehetséges száma 0 vagy m , előbbi p_0 , míg utóbbi $p_m = 1 - p_0$ valószínűséggel következik be. Ezt a problémát az atombomba működése kapcsán vizsgálták. Ha beindul a maghasadás (azaz a részecskék száma korlátlanul növekszik), akkor bekövetkezik a robbanás.

- Gyenge elektronáram felerősítésére elektronsokszorozó műszert használnak. Az elektronok útjába kis lapocskákat helyeznek el. Mikor ilyenek ütköznek egy elektronnal, véletlen számú új elektront szakít le. A probléma jól modellezhető elágazó folyamattal. Mivel a fémlapok száma véges, itt nincs értelme azt vizsgálni, hogy mi történik $n \rightarrow \infty$ esetén, de fontos kérdés, hogy mennyi az utolsó fémlapról távozó elektronok száma, azaz mennyire sikerült felerősíteni az áramot.
- Ősi családnevek fennmaradásának valószínűségét is vizsgálhatjuk elágazó folyamattal [5]. Ehhez elég a fiú utódokat tekintenünk, hiszen a vezetéknev általában általuk öröklődik. Tegyük fel, hogy az egyedek szaporulata független és azonos eloszlású: p_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) valószínűséggel születik k számú fiú gyermeke valakinek. Ezzel azért leegyszerűsítjük a feladatot, hiszen társadalmi hatások is befolyásolhatják a természetes szaporulatot, ezáltal p_k generációként változhat. A függetlenség sem mindig teljesül, de kis finomítással az elágazó folyamat jó modellje a problémának. A családnév kihalása akkor következik be, ha valamely generációban minden egyednek 0 fiú utóda születik. A. J. Lotka 1931-ben az USA-ra vonatkozóan kiszámította, hogy a férfiak kihalásának valószínűsége 0,819.

Magyarországon is jól megfigyelhető, hogy a régi szép családnevek közül egyre több egyre ritkábban fordul elő, ugyanakkor egyre több ember vezetéknéve: Kis, Nagy és Kovács. Jelenleg minden tizedik magyar állampolgár Nagy, Kovács, Szabó, Tóth vagy Horváth.



4. ábra

Kínában ma kb. 3100 családnév fordul elő, de pár száz éve ez még 12000 volt. A népesség 22%-a három családnéven osztozik (ez 300 millió ember) és a 200 leggyakoribb név lefedi a népesség 96%-át.

Vietnámban kb. 100 családnevet ismernek és a népesség 60%-a három családnéven osztozik. Egyedül a Nguyen nevet a népesség 40%-a használja és a maradék 90%-a 15 nevet visel.

Koreában a népesség 43%-a osztozik három családnéven, Kim 21%, Ri 14% és Park 8%.

A családnevek kihalását mutatja a 4. ábra, Poisson eloszlást feltételezve (λ az eloszlás paramétere):

$\lambda \leq 1$ esetén a kihalás 1 valószínűségű, de a fennmaradásnak még úgy is kicsi a valószínűsége, ha $\lambda > 1$.

Irodalom

- [1] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, Vol. 2. 3rd edition, *Wiley, New York*, 1971.
- [2] T. E. Harris, The theory of branching process, *Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg*, 1963.
- [3] S. Karlin, H. Taylor: Sztochasztikus folyamatok. *Gondolat Kiadó, Bp.* 1985.
- [4] Móri Tamás, Generátorfüggvények, <http://www.cs.elte.hu/~mori/genfv.pdf>
- [5] Székely J. Gábor: Paradoxonok a véletlen matematikájában, *Typotex*, 2004.
- [6] H. W. Watson – F. Galton, On the probability of the extinction of families, *J. Anthropol. Ins. Great Britain and Ireland*, 4, 138-144, 1874.

