

A legrövidebb utak probléma speciális esetének értelmezési tartományára vonatkozó megfontolások

TÖRÖK ÁRPÁD

Bevezetés

Jelen cikk egy gráf két csúcspontja közötti legrövidebb útvonal meghatározására irányuló feladat értelmezési tartományának korlátozásával kapcsolatos megfontolásokat mutat be. Célunk az értelmezési tartomány korlátozásával a legrövidebb útvonal kiválasztására irányuló feladat egyszerűsítése.

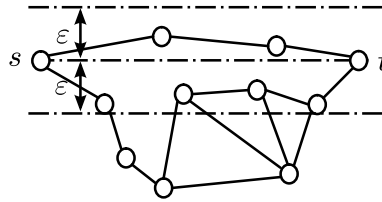
Legyen a vizsgált véges, egyszerű, nem súlyozott, síkba rajzolható gráf, $G = (V, E, s, t)$, melynek élei egyenes szakaszok ahol $V = (v_0, \dots, v_{N-1})$ a gráf csúcspontjainak halmaza, $E \subseteq V^2$ a gráf éleinek halmaza, $s \in V$ a kiindulási csúcspont és $t \in V$ a cél csúcspont. Az i -edik csúcspont koordinátáit jelölje (x_i, y_i) . Két csúcspont tehát szomszédos, ha éllel vannak összekötve. A G gráf éleit reprezentálja a C szomszédsági mátrix (Sawitzki, 2004).

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & & & \\ c_{j1} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ c_{n1} & \cdots & & & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } v_i v_j \in E, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A G gráf két különböző s, t csúcsát összekötő legrövidebb útvonalon a gráf csúcspontjainak azon sorozatát értem, mely a gráf szomszédos csúcspontjaiból épül fel, s kezdőponttal, t végponttal rendelkezik, és a sorozatot alkotó szomszédos csúcspontok összegzett távolsága a G -beli s -et t -vel összekötő útvonalakra nézve minimális értékű (Seidel, 1995).

Az értelmezési tartomány korlátozásának kezdeti lépései

A gráf két pontja között a legrövidebb út meghatározásának több módja ismert. Egyéb módszer mellett algebrai szélsőérték problémaként is felírhatjuk a feladatot (Xiao, Thulasiraman, Xue, & Jüttner, 2005), illetve útvonal kereső algoritmusokkal (pl. Dijkstra által kidolgozott eljárás segítségével) is megoldhatjuk a problémát (Dijkstra, 1959), kisebb méretű síkba rajzolható gráf esetében azonban akár szemrevételezést követően is leszűkíthető a megoldáshalmaz néhány lehetséges útvonalra. Az alábbi példa jól szemlélteti az említett esetet. Ha ránézésre becsüljük az s és t csúcspontok közötti legrövidebb útvonalat felépítő élek halmazát, az alábbi síkbeli tartományt jelölhetjük ki.



E tartomány jól szűkíti a problémát, feltételezésem szerint egy képzeletbeli szakasszal kötöttem össze az s és t pontot, mely szakasz a két pont közötti távolság becslésére szolgál. Ezután e képzeletbeli szakasz ε környezetében található útvonalakat jelöltem ki, mint lehetséges legrövidebb útvonalak. Fenti megoldás menetének leképezése céljából első lépésként célszerű felírni az s és t pontok által meghatározott $f(x)$ egyenes egyenletét. Legyen $f(x) = ax + b$. A vizsgálandó élek az alábbi egyenesek által határolt síkbeli tartományon belül helyezkednek el:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + \varepsilon, \\ h(x) &= f(x) - \varepsilon. \end{aligned}$$

A G részgráfját reprezentáló A szomszédsági mátrix a teljes gráf azon éleit tartalmazza, melyek $f(x)$ egyenes ε környezetébe esnek.

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{j1} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{ahol}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{ha } h(x_i) < y_i < g(x_i) \text{ és } h(x_j) < y_j < g(x_j), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

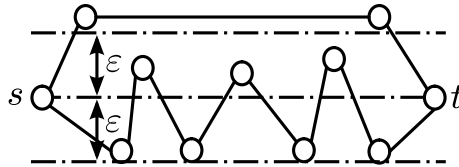
K mátrix jelölje az ε által kijelölt részgráfot reprezentáló A szomszédsági mátrixnak az 1-től a Z -edik hatványig történő összegzését, ahol ahol Z jelöli azon élek számát, melyek teljes terjedelmükkel az ε által kijelölt tartományban találhatók. K mátrix k_{st} eleme megadja tehát, hogy legfeljebb Z darab él érintésével lehetséges-e eljutni s -ből t -be.

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1i} & \cdots & 1n \\ \vdots & & & & \\ k_{j1} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ k_{n1} & \cdots & & & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad K = \sum_{p=1}^Z A^p, \quad Z = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{kl}.$$

Az ε által meghatározott tartományt úgy kell megválasztani, hogy ε minimális értéke mellett a K mátrixnak létezzen $k_{st} > 0$ eleme.

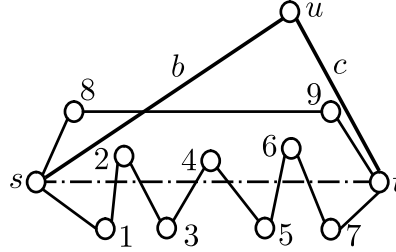
A vizsgálati tartomány újradefiniálása az eljárás alkalmazhatóságának javítása céljából

A megoldáshalmaz korlátozására irányuló – fentiekben leírt – vizsgálati tartomány számos gráf esetében nem tartalmazza a legrövidebb útvonalat, hiszen nem ritka az olyan véges egyszerű gráf, mely esetében $f(x)$ egyenes minimális ε környezetében megtalált s -et t -vel összekötő útvonalnál létezhet rövidebb az ε által kijelölt vizsgálati tartományon kívül.

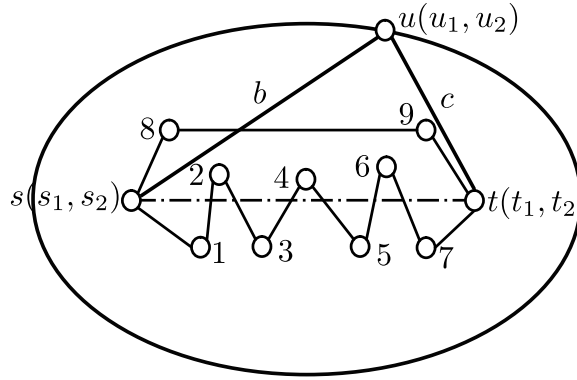


Annak céljából, hogy ezeket a lehetséges legrövidebb utakat is megtaláljuk, újra kell definiálnunk a vizsgálati tartományt, vagyis azt a tartományt kell meghatározunk, melyre igaz, hogy a tartományon belüli útvonalak mindenképpen rövidebbek, mint a tartományon kívül található csúcspontot is tartalmazó útvonalak hossza.

Legyen $f(x)$ egyenes minimális ε környezetében megtalált s -et t -vel összekötő legrövidebb útvonal (pl. $s-1-2-3-4-5-6-7-t$) hossza d . Az útvonal bármely u pontjára az su szakasz hossza, a háromszög egyenlőtlenség miatt legfeljebb akkora, mint az út s -től u -ig terjedő része és hasonlóan, az ut szakasz hossza legfeljebb az út u -tól t -ig terjedő része. Tehát $\overline{su} + \overline{ut} \leq d$.



Ennek megfelelően a vizsgálati tartomány határvonala egy olyan ellipszissel írható le, melynek fókuszai s és t , a vezérsugarak összege pedig d .



Ezt figyelembe véve az előzőekben meghatározott $f(x)$ egyeneshez képest a vizsgálati intervallum az alábbi szerint módosul:

$$\sqrt{(u_1 - s_1)^2 + (u_2 - s_2)^2} + \sqrt{(u_1 - t_1)^2 + (u_2 - t_2)^2} \leq d.$$

u pont koordinátáit a gráf i -edik csúcspontjának (x_i, y_i) koordinátáival helyettesítve az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk, mely megadja a vizsgálandó részgráf csúcspontjait:

$$\sqrt{(x_i - s_1)^2 + (y_i - s_2)^2} + \sqrt{(x_i - t_1)^2 + (y_i - t_2)^2} \leq d.$$

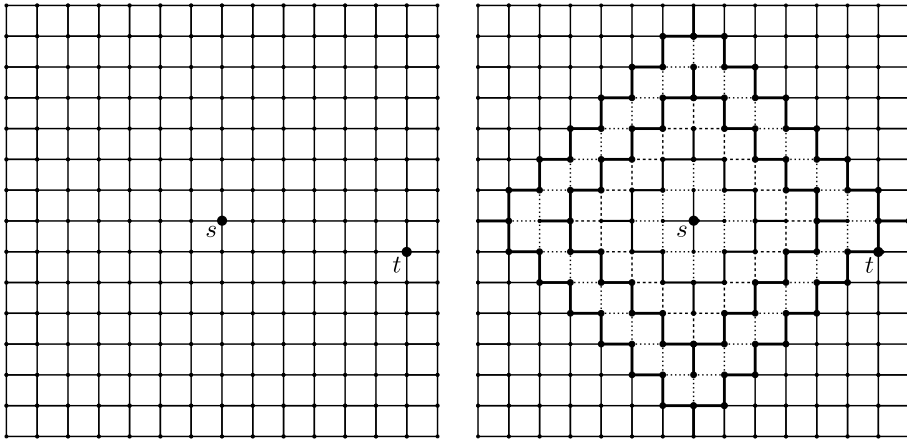
Fentiekkel összhangban elmondható, hogy $f(x)$ egyenes minimális ε környezete helyett már az eljárás kezdeti szakaszában célszerű lehet egy $2c$ paraméterű ellipszis által kijelölt tartományban keresni az s és t között kapcsolatot teremtő útvonalat, ahol $2c = \sqrt{d^2 - 4b^2}$ az ellipszis fókuszpontjainak távolsága st távolságtól indulva növekszik, addig amíg a tartományon belül az s és t között kapcsolatot teremtő útvonalat nem találunk. Megfontolandó azonban, hogy a probléma algoritmizálásával az iterációs lépések során alkalmazott lineáris keresési feltétel jelentősen csökkentheti a feladat megoldásának számításigényét. Ennek megfelelően egyes esetekben

a legrövidebb útvonal keresési probléma értelmezési tartományát szűkítő ellipszis d paraméterének értékét célszerű lehet egy $f(x)$ egyenes minimális ε környezetében keresni.

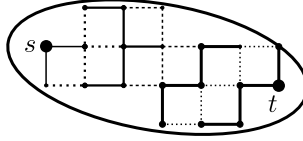
Az eljárás hatékonyságnövelő hatása

Jelen cikk célja elsősorban a legrövidebb utak probléma speciális esetéhez kapcsolódóan az értelmezési tartomány szűkítésére vonatkozó megközelítés ismertetése, azonban alábbiakban röviden illusztrálom az eljárás lehetséges hatékonyságnövelő hatását.

Példánkban az egyszerűség kedvéért egy rácsgráf két tetszőleges pontja közötti legrövidebb útvonalat keressük. A módszerek értékelése során a vizsgálat által érintett csúcspontok számát hasonlítom össze az értelmezési tartomány szűkítés alkalmazása, illetve mellőzése esetén. Alábbi gráf s és t pontjai között keresem tehát a legrövidebb útvonalat a Dijkstra algoritmus segítségével.



A legrövidebb útvonalak s -ből t -be 6 vízszintes és 1 függőleges élen keresztül vezetnek. Az értelmezési tartomány szűkítésére irányuló eljárás mellőzése esetén a szükséges 7 iterációs lépés során összesen 113 csúcspontot érint a vizsgálat. Az s csúcspontból kiindulva az 1. iterációs lépés során a vékony folytonos vonallal jelzett élek szomszédos csúcspontjaira juthatunk el. Ezekből kiindulva a 2. lépés során a pontvonallal, a 3. lépés során a vastag folytonos vonallal, a 4. lépés során a szaggatott vonallal, az 5. lépés során a vastag folytonos vonallal, a 6. lépés során a vékony pontvonallal, végül a 7. lépés során a vastag folytonos vonallal jelzett szakaszok járhatók be. Az értelmezési tartomány szűkítésére irányuló eljárás alkalmazása esetén a szükséges 7 iterációs lépés során összesen 19 csúcspontot érint a vizsgálat.



Elmondható tehát, hogy az értelmezési tartomány szűkítésével a bemutatott példában az s -ből t -be vezető legrövidebb útvonal meghatározására irányuló eljárás hatékonysága javítható.

Összefoglalás

A cikkben bemutatott módszer alkalmas a legrövidebb útvonal kiválasztására irányuló feladat speciális eseteinek egyszerűsítésére a probléma értelmezési tartományának korlátozásával. Az ismertett megfontolások mentén kirajzolódó módszer első lépésében keressük tehát azt a minimális $2c$ paraméterű ellipszist, melynek fókuszpontjai a gráf s és t pontjai:

$$\sqrt{(x_i - s_1)^2 + (y_i - s_2)^2} + \sqrt{(x_i - t_1)^2 + (y_i - t_2)^2} \leq d, \text{ ahol}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = c^2 + b^2,$$

$2c$: az ellipszis fókuszpontjainak távolsága,

b : az ellipszis fél kistengelyének hossza, valamint

d : a vezérsugarak hosszának összege,

$$K = \sum_{p=1}^Z A^p, \quad Z = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{kl}.$$

Az $2c$ által meghatározott tartományt úgy kell megválasztani, hogy $2c$ minimális értéke mellett a K mátrixnak létezzen $k_{st} > 0$ eleme, mely kritériumok biztosítják, hogy az adott intervallumon a két csúcspont között létezzen kapcsolat. Ezt követően a megtalált d hosszúságú útvonalból kiindulva az ellipszis általános képlete alapján meghatározható a gráf csúcspontjaira vonatkoztatott azon feltétel, mely alkalmazása alábbiak szerint korlátozza a vizsgált legrövidebb útvonal probléma értelmezési tartományát:

$$\sqrt{(x_i - s_1)^2 + (y_i - s_2)^2} + \sqrt{(x_i - t_1)^2 + (y_i - t_2)^2} \leq d.$$

Irodalomjegyzék

- [1] E.W. Dijkstra, A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik*, 1(1959), 269–271.

- [2] D. Sawitzki, Experimental studies of symbolic shortest-path algorithms. Lecture Notes in Computer Science (including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 3059(1126), 482–497.
- [3] R. Seidel, On the All-Pairs-Shortest-Path Problem in Unweighted Undirected Graphs, Journal of Computer and System Sciences.
- [4] Y. Xiao, K. Thulasiraman, G. Xue, A. Jüttner, The constrained shortest path problem: algorithmic approaches and an algebraic study with generalization, AKCE International Journal of ..., 1–38.

Török Árpád, BMGE, Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar, Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszék,
artorok@kgazd.bme.hu

