

Az epsilon-delta játék és a sakk

KOVÁCS ZOLTÁN

A határérték definíciójának *megértése* minden nemzedék számára kihívás. A tanár számára ugyanúgy erőfeszítés és szellemi kihívás jól előkészíteni a definíció lényegét, tartalmát, akárcsak megfelelő példákat választva a hallgatóság felé *megértetni* ezen definíció hasznosságát is. Különbség van természetesen hallgató és hallgató között, de az oktatás kiszélesedésével a matematikai tartalom minél szélesebb körű továbbadása hatékony tanítási eszközöket is igényel.

Ebben az írásban a számsorozatok határértékének epsilon-os definíciójának bevezetésére adok egy javaslatot. Az ötlet nem egészen új, sőt, mondhatni szokványos, hogy a definíciót egy kétszemélyes játékként adjuk meg. A cikkben ezt a játékot szeretném pontosítani, és egy véleményem szerint letisztult formában továbbadni. A módszer módosítás nélkül továbbvihető a függvényhatárérték fogalmának epsilon-deltás definíciójához is.

Az epsilon-delta játékra akár az interneten is találhatunk konkrétan kidolgozott interaktív anyagokat. Az egyik első ilyen anyag, az [1] Mathematica munkalap mintegy 15 éve került fel az internetre, de további példák is rendelkezésre állnak akár egy böngészőben azonnal indítható GeoGebra munkalapként is (mint pl. [2]).

A határérték fogalmának egy szokásos definíciója a következő: Legyen adott az a_n valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az a valós szám az a_n sorozat határértéke, ha bármely pozitív ε számhoz megadható olyan N szám, amelyre $n > N$ esetén $|a - a_n| < \varepsilon$. Jelben:

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N (n \in \mathbb{N}) \quad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Az első egzisztenciális kvantort nem mindig hangsúlyozzuk, de a továbbiakban kulcsszerepe lesz.

A fenti definíció tanításakor bevezetésként az epsilon-nak többnyire konkrét értékeket adunk, amelyekhez konkrét N küszöbszámokat keresünk. Ezáltal a definíció a „felére” lerövidül:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N (n \in \mathbb{N}) \quad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Míg az általános definíció a $\exists \forall \exists \forall$ sémát követi, addig itt a $\exists \forall$ séma jelenik meg. Voltaképpen ezek a sémák egy kétszemélyes játék két- ill. egylépéses befejezésének struktúrájával azonosak:

- (1) az 1. játékosnak van olyan lépése,
- (2) amelyre a 2. játékos bármit lép,
- (3) az 1. játékosnak van olyan lépése,
- (4) amelyre a 2. játékos bármit lép, veszített;

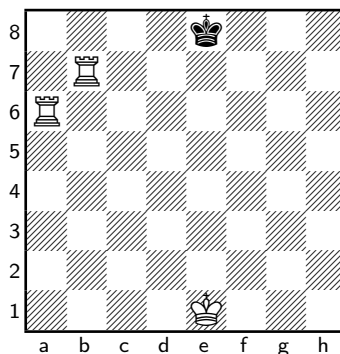
valamint

- (1) az 1. játékosnak van olyan lépése,
- (2) amelyre a 2. játékos bármit lép, veszített.

Míg logikai szempontból bármilyen kétszemélyes játék megfelelő lehet a struktúra hétköznapi illusztrálásához, a sakk játék választásának több didaktikai előnye is lehet:

- A sakk az európai kultúra szerves része, mindenki látott már sakktáblát.
- A lépéseket többnyire ismerik a tanulók, s ha ez hiányozna, néhány perc alatt a definíció megértetéséhez elegendő bevezető adható.
- A játék vizuális, két dimenziós, ezáltal más síkra fókuszálódik a figyelem: ez *grafikus* tudásreprezentáció a *numerikus* ill. *szavakkal történő* leírás kiegészítéseképpen ([3]).
- Magyarországon a sakk tanításának nagy hagyományai vannak, a jelenlegi 100-as világranglistán 4 magyar is szerepel ([4]). A Polgár Judit által kidolgozott tehetségfejlesztő sakk, mint oktatási eszköz, 2013 óta választható tantárgy az általános iskolákban.
- Akár egyszerűbb vagy bonyolultabb sakktáblák elemzésével a határérték definíciójának struktúrája kezelhető véges számú eset bemutatására korlátozódik.

Az alábbiakban egy didaktikailag lehetséges módot vázolok fel a fentiek illusztrálására.

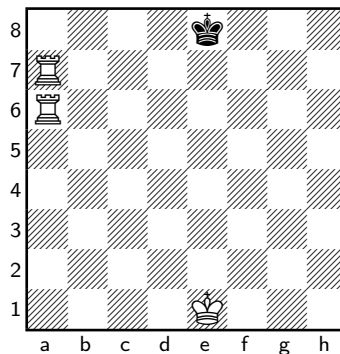


A konkrét epsilon-hoz történő küszöbszámkeresést a „világos indul és mattot ad” feladvánnyal kapcsolhatjuk össze. Azoknak a diákoknak, akik nem ismerik a sakk szabályait, egy egyszerű mattfeladványt mutathatunk példaképpen. Az ábrán csupán kétféle bábu szerepel: király és bástya, melyek lépései könnyen elmagyarázhatóak. Esetünkben a konkrét ε -hoz adott N a bástya a8 lépése (Ba8), melyre a sötét király mind az 5 lehetséges válaszlépése problémás: a sötét király „sakkban marad”, tehát mattot kap. Itt tehát a Ba8 lépés a definícióbeli N -nek felel meg, amely esetén a sötét bármely lépése „a sötét király leütésével”, azaz mattal jár.

$\exists$		$\forall$	
	$\rightarrow$	Kd8	$\rightarrow$
	$\rightarrow$	Kd7	$\rightarrow$
Ba8#	$\rightarrow$	Ke7	$\rightarrow$ Bx
	$\rightarrow$	Kf7	$\rightarrow$
	$\rightarrow$	Kf8	$\rightarrow$

Olyan diákok esetében, akik már ismerik a sakklépéseket, bonyolultabb feladványt is elemezhetünk. Az interneten számos weboldal rendelkezésre áll, ahol ilyen típusú feladatokat letölthetünk¹.

Előfordulhat, hogy diákjainknak több időre van szükségük az 1 lépéses mattból a 2 lépéses mattrá történő elvonatkoztatáshoz. Sok tanulónál a konkrét epsilon-ról általános epsilon-ra való áttérés igazi szellemi kihívásnak számít (ld. pl. [5]). A fenti sakktábla minimális módosítása viszont a sakktáblát lényegesen megváltoztatja, mivel a világos fél már nem tud 1 lépésben mattot adni, ehhez legalább két lépés kell:



Valóban, az egyik bástyát először el kell húzni a b vonalra, majd a sötét király tetszőleges válaszlépése után a 6. sorban lévő a 8. sorba tolni. A „visszavezetjük az előzőre” típusú feladatmegoldás kapcsán célszerű lehet a diákoknak a Bb7-K?-Ba8

¹Egy lehetőség pl. a www.artline.hu/sakk_matt-egy-lepes.

lépéssort javasolni. Végül a Bb7–K?–Ba8–K? jelölés valójában már a $\exists\forall\exists\forall$ struktúrával lesz azonos, ami a hatéérték precíz definícióját teljes egészében előkészíti.

$\exists$	$\forall$	$\exists$	$\forall$
		$\rightarrow$	Kc8 $\rightarrow$
		$\rightarrow$	Kc7 $\rightarrow$
		Ba8# $\rightarrow$	Kd7 $\rightarrow$ Bx
		$\rightarrow$	Ke7 $\rightarrow$
		$\rightarrow$	Ke8 $\rightarrow$
	Kd8 $\nearrow$		
Bb7+ $\nearrow$			
	Kf8 $\searrow$		
		$\rightarrow$	Ke8 $\rightarrow$
		$\rightarrow$	Ke7 $\rightarrow$
		Ba8# $\rightarrow$	Kf7 $\rightarrow$ Bx
		$\rightarrow$	Kg7 $\rightarrow$
		$\rightarrow$	Kg8 $\rightarrow$

Megfigyelhetjük azt is, hogy a világos lépéseiből több nyíl vezet tovább (hiszen annak *minden* lépésére van a sötétnek valamilyen válasza), míg a sötét lépéseiből csak egy-egy nyíl van megrajzolva (hiszen a világosnak elegendő *egyetlen* jó válaszlépést megtalálnia).

A www.artline.hu/sakk_matt-ket-lepes oldalon bonyolultabb feladványokat is találhatunk.

Mint látható, a függvényhatáérték definíciója is ugyanezt a „világos indul és 2 lépésben mattot ad” struktúrát követi: adott $f(x)$ valós függvénynek az x_0 pontban hatáértéke van, ha létezik olyan valós a szám, melyre bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan pozitív δ , melyekre ha $|x - x_0| < \delta$, úgy $|f(x) - a| < \varepsilon$. Jelben:

$$\exists a \in \mathbf{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Mintaképpen lássuk, hogyan készíthetünk a 2 lépéses mattot bemutató diagramhoz hasonló egy konkrét példa esetén: Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^2$ függvénynek az $x = 3$ helyen hatáértéke van.

Ez a hatáérték nyilván $a = 9$, ez a lesz a „világos” első „lépése”. Tegyük fel, hogy a „sötét” $\varepsilon = 1$ „választ” ad. Ez esetben az $|x^2 - 9| < 1$ egyenlőtlenségből a $8 < x^2 < 10$ ekvivalens egyenlőtlenségekre jutunk, amelyek nyilván fennállnak, ha $|x - 3| < 3 - \sqrt{8}$. Tehát ehhez az epszilonhoz a $\delta = 3 - \sqrt{8}$ választás megfelelő. Konkrétan, ha pl. $x = 2,9$, akkor ennek a 3-tól való eltérése $3 - \sqrt{8} \approx 1,7$ -nél kisebb, és csakugyan, $2,9^2 = 8,41$, ami 9-től 1-nél kevesebbel tér el. Vagy $x = 2,95$ esetén még kisebb a 3-tól való eltérés, és ebben az esetben $2,95^2 = 8,7025$ még közelebb van a 9-hez. Nyilvánvalóan további (végtelen sok) példa említhető.

Legyen most $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Ekkor az $|x^2 - 9| < \frac{1}{10}$ egyenlőtlenségből a $8,9 < x^2 < 9,1$ ekvivalens egyenlőtlenségekre jutunk, amelyek nyilván fennállnak, ha $|x - 3| < 3 - \sqrt{8,9}$. Tehát ehhez az epsilonhoz a $\delta = 3 - \sqrt{8,9}$ választás megfelelő. Itt is tehetünk egy (vagy akár több) konkrét próbát: ha pl. $x = 2,99$, akkor ennek a 3-tól való eltérése $3 - \sqrt{8,9} \approx 0,016$ -nál kisebb, és csakugyan, $2,99^2 = 8,9401$, ami 9-től $\frac{1}{10}$ -nél kevesebbel tér el.

Világos, hogy ez a stratégia bármilyen kicsi pozitív epsilon esetén játszható. Tetszőleges „sötét” ε „lépés” esetén az $|x^2 - 9| < \varepsilon$ egyenlőtlenségből a $9 - \varepsilon < x^2 < 9 + \varepsilon$ ekvivalens egyenlőtlenségek következnek, amelyek fennállnak, ha $|x - 3| < 3 - \sqrt{9 - \varepsilon}$. Tehát a „sötét” akárhogyan is próbálkozik, a „világos” $\delta = 3 - \sqrt{9 - \varepsilon}$ „válaszlépése” biztosítani fogja a definícióban elvárt egyenlőtlenséget, vagyis a „matt” garantált:

$\exists a$	$\forall \varepsilon$	$\exists \delta$	$\forall x$
			$\rightarrow$
			2,9
			$\rightarrow$
			2,95
			$\rightarrow$
			$\vdots$
9	$\rightarrow$	$\frac{1}{10}$	$\rightarrow$
			3 - $\sqrt{8,9}$
			$\rightarrow$
			2,99
			$\rightarrow$
			$ x^2 - 9 < \varepsilon$
			$\vdots$
			$\rightarrow$
	tetsz.	$\rightarrow$	3 - $\sqrt{9 - \varepsilon}$
			$\rightarrow$
			$ x - 3 < \delta$
			$\rightarrow$

Megjegyzések.

1. Felmerülhet az az ötlet is, hogy a $\exists \forall$ struktúrát a 2 lépéses mattal, a $\exists \forall \exists$ struktúrát pedig a 3 lépéses mattal szemléltessük. Ez esetben a „van olyan lépése a világosnak, amelyre bármit is lép a sötét, a világos bemattolhatja” logikai reprezentációról ill. a „van olyan lépése a világosnak, amelyre bármit is lép a sötét, a világosnak van olyan lépése, amelyre bármit is lép a sötét, mattot kaphat” szituációról beszélhetünk. Ennek a megközelítésnek az lehet az előnye, hogy a sakkjáték lejegyzésében nem kell olyan lépéseket leírunk, amelyek végeredményben nem történnek meg (a sötét király és a világos bástya gondolatbeli lépései ilyenek). Azok számára, akik a sakkbán jobban járatosak, talán ez a fajta megközelítés kézenfekvőbb lehet, azonban módszertanilag mégis egyszerűbbnek tűnik a kevesebb lépésekkel történő azonosítás.

2. A klasszikus határérték-definíciónál gyakran alkalmazott módszer a jobb megértés elősegítésére, hogy a definíciót *tagadjuk*. Mi több, a nem konvergens sorozatoknak külön nevük van: ezek a *divergens* sorozatok. A sakkjátékkal való párhuzam egyik további előnye, hogy a matt lehetőségének tagadása is természetes szituáció. Tehát az, hogy a világos nem tud 2 lépésben mattot adni, abban a formában fogalmazható meg, hogy „bármit is lép a világos, lesz a sötétnek olyan el-

lenlépése, melyre bármit is lép a világos, a sötét nem kerül mattba”. Nyilvánvalóan ez a struktúra meg fog egyezni a divergens sorozatok klasszikus definíciójával.

Irodalomjegyzék

- [1] Mark A. Townsend (2000), The Epsilon Delta Game, Wolfram Library Archive, <http://library.wolfram.com/infocenter/Demos/4734/>
- [2] Jamie Mulholland (2013), Epsilon-Delta Game (Formal Definition of a Limit), <http://www.geogebra.org/m/47174>, 2013
- [3] Alice Deanin (2003). The rule of four. <http://www19.homepage.villanova.edu/alice.deanin/courses/Mat7310/rule%20of%20four.htm>
- [4] World Chess Federation (2015). Standard Top 100 Players. <https://ratings.fide.com/top.phtml?list=men>
- [5] Craig Swinyard, Sean Larsen (2012). Coming to Understand the Formal Definition of Limit: Insights Gained From Engaging Students in Reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43 (4) (2012. július), 465-493. <http://www.web.pdx.edu/~slarsen/ResearchPapers/SwinyardLarsenJRME.pdf>