

Szokatlan gondolatok geometriai sorozatokról

MÁTÉ LÁSZLÓ

„A matematikai intuíció lángja éppen hogy pislákol a gyermek agyában. Meg kell erősíteni és fenn kell tartani, hogy fénye minden számtani tevékenységre rávetülhessen.” (Stanislas Dehaene)

Az itt következő írással néhány példán keresztül azt szeretném megmutatni, hogy ha egy geometriai sorozatot végtelen sorozattá terjesztünk ki, akkor ezzel a látszólag kis lépéssel nagymértékben tágíthatjuk diákjaink matematikai szemléletét. Ez a kiterjesztés az első lépés lehet a határérték fogalma felé és megadhatja azt az élményt, amit a végtelen kicsi és a végtelen nagy világa nyújt a megszokott makrovilágunkkal szemben.

Bevezetőül, vizuális képet fogunk adni a véges geometriai sorozat

$$(1) \quad a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

összegképletére és az (1) összefüggés szokásos bizonyítására.

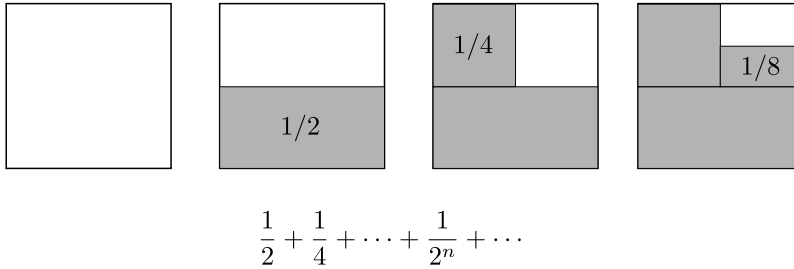
Az (1) egyenlőségből rögtön következik a végtelen geometriai sorozat összege:

$$(2) \quad a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots = a \frac{1}{1 - q}$$

ha $|q| < 1$, amennyiben intuitíve értelmezzük egy végtelen sorozat összegét és elfogadjuk, hogy $q^n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow +\infty$.

Geometriai szerkesztéseket fogunk bemutatni (1) és (2) szemléltetésére, amit *geometriai modellnek* fogunk nevezni. A geometriai modellek vezetnek majd el a $q^n \rightarrow 0$ és a (2) formula pontos értelmezésére és az (1) és (2) formulák bizonyítására.

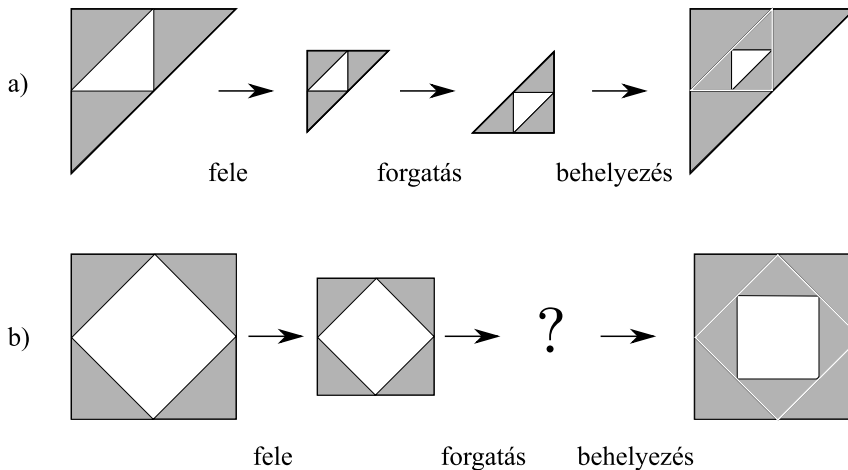
Geometriai modell



1. ábra

Az 1. ábrán láthatjuk a legegyszerűbb modellt. Itt $q = 0.5$ és a sorozat első eleme a négyzet területének a fele. Az ábrából úgy tűnik, hogy a végtelen sorozat összege a négyzet T területe. Ezt abból következtetjük, hogy a szerkesztés minden lépése után a még fehérén maradó rész fele akkora lesz. A matematika nyelvén ezt kifejezve: az n -edik lépés után a még fehérén maradó rész területe $2^{-n}T$.

Egy geometriai sorozat részletösszegeinek összetettebb ábrázolását láthatjuk a 2.a. ábrán.



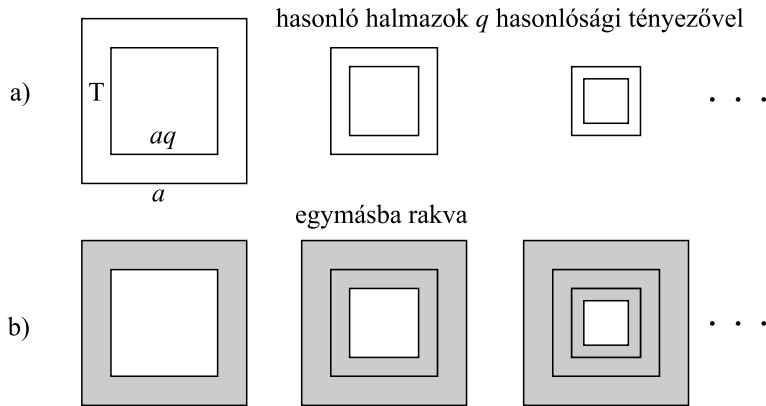
2. ábra

A háromszög egyre nagyobb részét befedő szürke részek területei egy olyan geometriai sorozat részletösszegei, amelynek első eleme $\frac{3T}{4}$ és hányadosa $\frac{1}{4}$. Az ábrán azt mutatjuk, hogy hogyan szerkesztjük a sorozat második elemét, majd az első két elem összegét. Ezután a szerkesztés ismétlésével (iterációjával) kapjuk a további részletösszegeket. Az ábrából úgy tűnik, hogy ekkor a végtelen geometriai sorozat összege a háromszög T területe. Ugyanis a fehérén maradó háromszög negyed

akkora lesz a szerkesztés ismétlésével, a rekurzív szerkesztés minden lépése után. Formulával, a matematika nyelvén ezt kifejezve: az n -edik lépés után a szürke rész területe $T - \frac{T}{4^n}$.

A mondottak alapján nem nehéz belátni, hogy a b) négyzetből indítva, az előző a) ábrához hasonló rekurzív szerkesztéssel is megkapjuk a $q = 0.5$ hányadosú geometriai sorozat részletösszegét mint a szürke poligon területét.

Figyeljük meg, hogy az előző ábrák a véges, n -tagú összeget is szemléltetik. Számunkra viszont (2) szemléltetése az érdekes, mivel írásunkban a határérték érzékeltetése és definíciója a cél.



3. ábra

A 3. ábrán egy $q^2 < 1$ hányadosú geometriai sorozatot illusztrálunk képkeretszerű halmazokkal. A 3.a. ábrán, az egyre kisebb képkeretek területei egy q^2 hányadosú geometriai sorozatot alkotnak, amelynek első tagja a legnagyobb képkeret T területe. Az egymással hasonló halmazokat a 3.b. ábrán látható módon egymásba skatulyázva, az egyre vastagodó kék színű „képkeretek” területei

$$T, \quad T + Tq^2, \quad \dots \quad T + Tq^2 + \dots + Tq^{2(n-1)}$$

és a 3.b. ábrából leolvasható

$$(3) \quad T + Tq^2 + \dots + Tq^{2(n-1)} = a^2 - a^2q^{2n}$$

mivel az n -edik keret beillesztése után a fehérén maradó terület $a^2(q^2)^n$.

A 3.b. ábrán azt is láthatjuk, hogy a fehérén maradó rész egyre kisebb lesz, területe egyre közeledik a nullához. Úgy gondoljuk, hogy a fehér négyzet végül eltűnik. Ezzel egyszerű formulát kaptunk a geometriai sorozat összegére $q^2 < 1$ hányados esetén.

Használhatóbb képletet kapunk, ha csupán a T, q változókkal írjuk fel a (3) formulát. A 3.a. ábrából

$$T = a^2 - (aq)^2$$

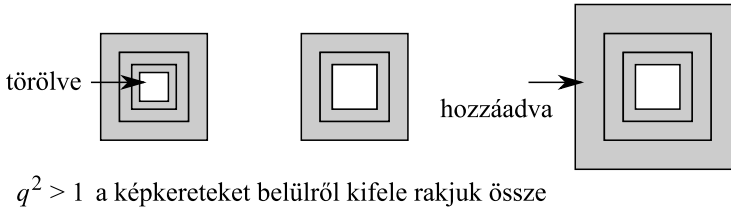
hiszen T annak a képkeretnek a területe, amelyet úgy kapunk, hogy az a oldalú négyzetből kivágjuk a qa oldalú négyzetet. Ebből

$$a^2 = \frac{T}{1 - q^2}$$

amit a (3) formulába helyettesítve, megkapjuk az ismert, használhatóbb képletet.

Figyeljük meg, hogy körgyűrűkkel, vagy háromszögekből indítva, hasonlóan modellezhető egy geometriai sorozat összege.

Hátra van a geometriai sorozat összegének vizuális tárgyalása a $q^2 > 1$ esetén. Ekkor a kék színű képkereteket *belülről kifelé rakjuk össze*. (Ezt nem is lehet másként, hiszen ekkor a keretek n növekedésével egyre nagyobbak lesznek.)



4. ábra

Legyen az összerakott keret területe, vagyis a (3) baloldalán álló összeg, s_n . Töröljük az első keretet és adjuk hozzá a következő, $n + 1$ -edik keretet (4. ábra). Az így kapott halmaz területe $q^2 s_n$. A matematika nyelvén ezt leírva

$$(4) \quad s_n - T + q^{2n}T = q^2 s_n$$

A (4) formulából, az s_n területet kifejezve, megkapjuk a geometriai sorozat (1) összegképletét.

A 4. ábrán illusztrált modell egy *univerzális modell*, mivel q alkalmas megválasztásával, minden pozitív hányadosú geometriai sorozat összege illusztrálható az ábrával. Hasonlóan szerkeszthető univerzális modell körből, háromszögből és különböző sokszögekből.

Figyeljük meg, hogy $q^2 > 1$ esetén a szürke színű képkeretek területe bármely számnál nagyobb lesz, ha elég messze megyünk a képkeretek sorozatában.

Hasonlítsuk össze a mondottakat a geometriai sorozat (1) összegképletének hagyományos bizonyításával. Ha

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$$

akkor

$$qs_n = aq + \dots + aq^n$$

Kivonva egymásból a két egyenlőséget

$$qs_n - s_n = aq^n - a$$

amelyet s_n -re rendezve adódik (1). Vegyük észre, hogy a (4) formulára vezető szerkesztés a hagyományos bizonyításnak egy vizuális megjelenítése, a hagyományos bizonyítás szemléltetése.

A végtelen geometriai sorozatot illusztráló geometriai modell tárgyalásában fontos szerepe van a következő megállapításnak: „*Úgy gondoljuk, hogy a fehér négyzet végül eltűnik.*”. Pontosítsuk ezt az intuitív megállapítást és írjuk le a matematika nyelvén. Könnyen belátható, hogy a következő megállapítás kifejezi ezt az intuitív szemléletet: *a fehérén maradó négyzet átmérője tetszőlegesen kicsi lesz, ha elég messze megyünk a képeretek sorozatában.* A matematika nyelvén:

Minden $\varepsilon > 0$ számhoz van N , hogy ha $n > N$ akkor

$$|a^2 - s_n| < \varepsilon,$$

ahol s_n , mint eddig, az n tagú részletösszeg.

A következő példával illusztráljuk, hogy a szöveg és a matematikai formulák ugyanazt mondják. Legyen $\varepsilon = 0.1$, vagyis azt kérdezzük, hogy milyen messze menjünk a sorozatban, hogy a képeretek területe legfeljebb egyszázaddal térjen el a négyzet területétől. Erre a kérdésre az

$$a^2 - T \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2} < 0.01$$

egyenlőtlenség megoldása adja a választ. Ha $a = 1$, $q = 0.5$ akkor $T = 0.75$ és így a választ az

$$1 - 0.75 \frac{1 - 0.5^{2n}}{0.75} < 0.01$$

megoldása adja. A negyedik tagon túl a képeretek területe legfeljebb egyszázaddal tér el egytől, a négyzet területétől.

Végtelen geometriai sorozat egy tábla szelvényes csokoládében

Egy csokoládét úgy reklámoz a gyártója, hogy minden tábla csokoládéhoz mellékel egy szelvényt, amelyből bizonyos mennyiséget összegyűjtve, az összegyűjtött szelvényekért egy újabb tábla csokoládét kap a vásárló. Egy tábla csokoládé ára 175 Ft, és öt szelvényért kapunk még egy tábla csokoládét.

Mennyibe kerül valójában egy tábla csokoládé?

Egy tábla csokoládé árért, 175 forintért, a tábla csokoládé mellé még egy szelvényt is kapunk. Ezért ha a csokoládé c forintot és egy szelvény s forintot ér, akkor nyilván

$$(5) \quad c + s = 175$$

és mivel öt szelvényért kapunk egy tábla csokoládét, amelyhez egy újabb szelvény tartozik, ezért

$$(6) \quad 5s = c + s$$

Az (5), (6) egyenletrendszerből $c = 140$, $s = 35$.

Mi köze van ennek az egyszerű csokoládépéldának egy geometriai sorozat összegeéhez?

A szelvény s értéke egy geometriai sorozat összegeként is előáll a következőképpen. A (6) összefüggés szerint, egy szelvény 0.2 csokoládét meg 0.2 szelvényt ér (5. ábra). Így a 0.2 szelvény 0.2^2 csokoládét meg 0.2^2 szelvényt ér. Tovább folytatva ezzel a gondolatmenettel: 0.2^2 szelvény értéke 0.2^3 csokoládé meg 0.2^3 szelvény és így tovább a végtelenségig.



5. ábra

A matematika nyelvén a fenti *rekurzív* gondolatmenet így írható

$$(7) \quad s = 0.2c + 0.2s = 0.2c + 0.2(0.2c + 0.2s) = 0.2c + 0.2(0.2c + 0.2(0.2c + 0.2s)),$$

azaz

$$s = 0.2c + 0.2^2c + 0.2^3c + 0.2^3s$$

és teljes indukcióval

$$s = 0.2c + 0.2^2c + \dots + 0.2^n c + 0.2^n s \quad n = 1, 2, \dots$$

Így a szelvény s értéke a $0.2c$ -ből induló, 0.2 hányadosú (végtelen) geometriai sorozat összege.

Mi történt eddig?

Különböző nézőpontból és különböző készségekre építve tárgyaltuk a geometriai sorozat összegezését.

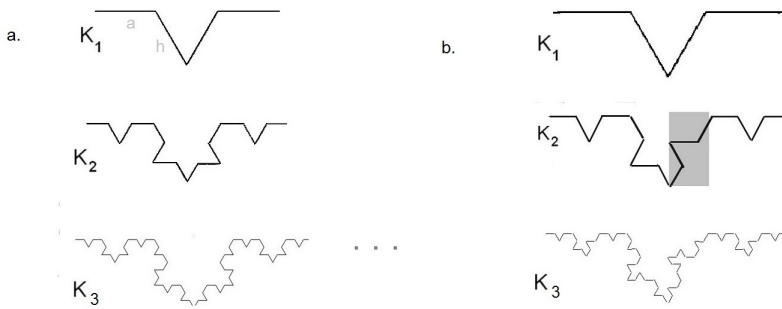
Geometriai modellekkel kezdtünk, amelyben a geometriai sorozat elemei olyan egymással hasonló körök, sokszögek, amelyek egymásba skatulyázhatók, és ismert területű halmazzal töltene ki. Ezzel nemcsak a részletösszegek alakulását szemléltetjük, hanem felvillantjuk a hasonlóság és a geometriai sorozat kapcsolatát is. Ez a szemléltetés szoros kapcsolatban van az ókori görög matematikából származó kimerítés módszerével.

Összehasonlítottuk az *univerzális* matematikai modellt az (1) összegképlet szokásos bizonyításával, amely arra a megfigyelésre épít, hogy a q hányadossal szorozva, a geometriai sorozat elemeit egy lépéssel előre toljuk. Ezzel egy szemléletes, geometriai megfogalmazását adtuk az (1) összegképlet szokásos bizonyításának.

A csokoládépélda egy manipulatív modell, amely valamilyen történéshez köti a problémát. A csokoládépéldát, némi változtatással, Péter Rózsa [4] könyvéből vettem. Figyeljük meg a geometriai modell és a csokoládépélda kapcsolatát.

Az elmondottakban végigvonul az intuitív szemlélet és a matematikai formulák kapcsolata. Figyeljük meg, hogyan fejeztünk ki egy tapasztalt összefüggést a matematika nyelvén és fordítva, matematikai formulákkal leírt összefüggésekhez hogyan gyártottunk kézzelfogható modelleket.

Furcsaságok a végtelenben



6. ábra

A 6.a. ábrán látható egyszerű K_1 töröttvonalból indítunk. A töröttvonal négy egyenesszakasz egyesítése (*uniója*), amelyek mindegyike a K_1 átmérőjének a har-

mada. Most cseréljük le minden egyenesszakaszt a K_1 töröttvonal harmadára kicsinyített másával. Ekkor kapjuk a K_2 töröttvonalat. A K_2 a K_1 -gyel hasonló négy töröttvonal uniója, amelyeknek a hasonlósági tényezője egyharmad. A K_3 töröttvonalat ugyanígy kapjuk K_2 -ből. A K_2 -ben minden egyenesszakaszt lecserélünk a K_1 megfelelően kicsinyített másával, vagyis egy K_1 -el hasonló töröttvonallal, amelynek hasonlósági tényezője $(\frac{1}{3})^2$. És ezt folytatjuk a végtelenségig.

Hogyan alakul a töröttvonalak hossza a kapott sorozatban?

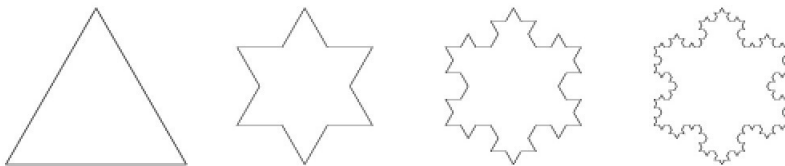
A szerkesztésből következik, hogy mindegyik töröttvonal hossza az előző hosszának négyharmada. Így, a K_1 átmérőjével mérve

$$K_n \text{ hossza } \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

A K_n hossza bármely értéknél is nagyobb lehet, ha a szerkesztést elég hosszán folytatjuk, ha elég messze megyünk a $\{K_n; n = 1, 2, \dots\}$ sorozatban. Mégis, a $\{K_n; n = 1, 2, \dots\}$ sorozat minden eleme elfér egy olyan körben, amelynek átmérője megegyezik a K_1 átmérőjével.

Az 6.b. ábrán a szerkesztést kissé megváltoztattuk. A K_2 -ben az egyik egyenesszakaszt a K_1 *tükörképével* cseréltük le (szürkével fedett rész). A töröttvonal hossza változatlan maradt, de a kapott sorozat képe drasztikusan megváltozott. Ily módon szimulálni tudunk különböző zeg-zugos partvonalat.

Ha K_1 átmérőjét az egyszázadára csökkentjük és ezzel a töröttvonallal végezzük a szerkesztést, akkor is tetszőlegesen nagy lesz a töröttvonal hossza, csupán ekkor tovább kell folytatnunk a szerkesztést, messzebb kell elmenni a $\{K_n; n = 1, 2, \dots\}$ sorozatban, hogy a K_n hossza az adott értéknél nagyobb legyen. Ily módon bármilyen kis átmérőjű körbe berajzolhatunk tetszőlegesen hosszú töröttvonalat. Ennek a szerkesztésnek a végeredményét Koch-görbének nevezzük.



7. ábra

A 7. ábrán, ugyanezzel a szerkesztéssel, egy háromszögből indítunk. A kapott $\{K_n^*; n = 1, 2, \dots\}$ sorozat ekkor egy a Koch-szigetre vezet. Azt is mondhatjuk, hogy a Koch-sziget egy háromszög oldalaira illesztett három Koch-görbe uniója (egyesítése). A Koch-sziget területe véges és legfeljebb a K_2^* Dávid csillag területének duplája.

Érdeemes elgondolkodni azon, hogy ha a K_1 töröttvonalban, az egyenlőoldalú háromszög szárait egy tetszőleges h magasságú egyenlőszárú háromszög szárait

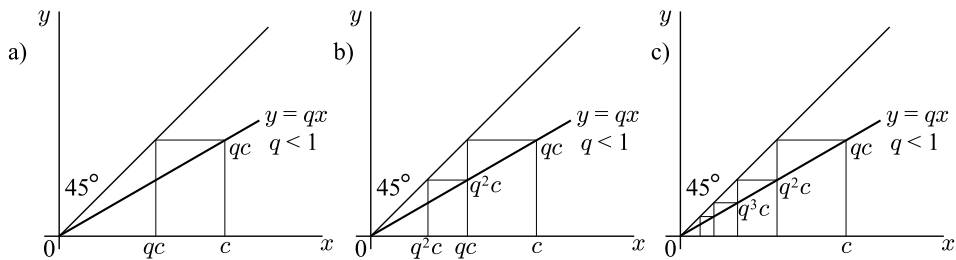
cseréljük, akkor milyen változás történik a szerkesztett töröttvonalak hosszában és alakjában.

Geometriai sorozatot alkotó lépcsők. A pókhálódíagram

A geometriai sorozat természetes felírása a

$$(8) \quad x_{n+1} = qx_n \quad n = 0, 1, \dots \quad x_0 = a$$

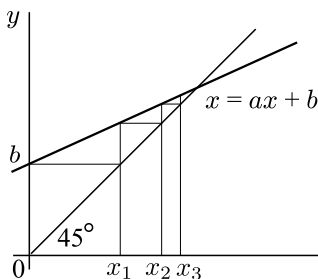
rekurzív formula, hiszen (8) pontosan azt fejezi ki, hogy az egymás után következő számok hányadosa q . A (8) rekurzív formula inspirálja a 8. ábra rekurzív szerkesztését, amit web vagy hálódíagramnak is neveznek.



8. ábra

Az a) ábra mutatja az első lépést, majd a b) ábrán látható ennek rekurzív folytatása. A c) ábra a teljes szerkesztést jelzi $0 < q < 1$ esetén. A szerkesztéssel kapott lépcsők befutnak az origóba, ami intuitíve jelzi, hogy a (8) sorozat nullához tart. Ez azt jelenti, hogy ha elég messze megyünk a sorozatban, akkor tetszőlegesen közel kerülhetünk a nullához (a $(0, 0)$ origóhoz).

Érdekes megvizsgálni, hogy ha $y = qx$ helyett egy tetszőleges $y = qx + b$ egyenessel végezzük ezt a szerkesztést, akkor milyen sorozatot kapunk? Mi a szerepe ekkor az egyenes és a 45° -os egyenes metszéspontjának?



$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= f(x_0) = b \\ x_2 &= f(x_1) = ab + b \\ x_3 &= f(x_2) = a^2b + ab + b \end{aligned}$$

9. ábra

A 9. ábra ad feleletet ezekre a kérdésekre. Ekkor a lépcsők a fenti (8) geometriai sorozat részletösszegeit reprezentálják. Pontosabban, az n -edik lépcső magassága a sorozat s_n összege, a $qx + b$ egyenes és a 45° -os egyenes metszéspontjának koordinátái pedig a végtelen geometriai sor összege.

Irodalomjegyzék

- [1] Barnsley, Michael F.: *Fractals Everywhere*, Academic Press, Orlando, FL, 2012 (3. kiadás).
- [2] Dehaene, Stanislas: *The number sense: How the mind creates mathematics*, OUP USA, 2011 (3. angol kiadás 2011). (Magyarul: *A számérzék: Hogyan alkotja meg az elme a matematikát?*, Osiris, Budapest, 2003.)
- [3] Németh József: *Előadások a végtelen sorokról*, POLYGON, Szeged, 2002
- [4] Péter Rózsa: *Játék a végtelennel*, TYPOTEX, Budapest, 2010 (9. kiadás).