

Cserélődő számjegyek

MOLDOVÁNYI ANDRÁS

1. Bevezetés

Sokan felfedezhették, hogy egy 7-tel nem osztható pozitív egész számot 7-tel elosztva a tizedesvessző utáni számjegyek az osztandótól függetlenül mindig azonosak. Sőt, a számjegyek sorrendje is azonos a kiolvasás elkezdésének helyétől eltekintve:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{7} = 0, \dot{1}4285\dot{7}; & \frac{2}{7} = 0, \dot{2}8571\dot{4}; & \frac{3}{7} = 0, \dot{4}2857\dot{1}; \\ \frac{4}{7} = 0, \dot{5}7142\dot{8}; & \frac{5}{7} = 0, \dot{7}1428\dot{5}; & \frac{6}{7} = 0, \dot{8}5714\dot{2}. \end{array}$$

Láthatjuk, hogy az 142857 egy olyan szám, amelyet 2, 3, 4, 5 és 6 számok bármelyikével megszorozva, az eredeti számot kapjuk eredményül, csupán a kiolvasását kell máshonnan kezdeni. Vajon létezik más ilyen szám is?

Feltettem tehát a kérdést:

1. Kérdés. *Melyek azok a számok, amelyeket egy k természetes ($k > 1$) számmal megszorozva a szorzat számjegyei megegyeznek az eredeti szám számjegyeivel, továbbá a számjegyek sorrendje is azonos marad a kiolvasás elkezdésének helyétől eltekintve?*

Az alábbiakban minden $k > 1$ esetén érvényes eljárást adunk az összes említett tulajdonságú egész szám meghatározására. Mivel számjegyeket vizsgálunk, ezért a válasz számrendszerfüggő lesz. A kérdést általánosabban, 10-es számrendszer helyett tetszőleges $b > 1$ alapú számrendszerben tekintjük.

A következő fejezetben bevezetjük a szükséges jelöléseket, majd több lépésben megadjuk a kérdésünkre a választ.

2. Jelölések

Legyen a számrendszer alapja b , ahol b 1-nél nagyobb egész szám. Legyen a kérdésben megfogalmazott tulajdonságú szám b alapú számrendszerben felírt alakja

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Tegyük fel, hogy a szám $n > 1$ jegyű. A szorzó legyen k úgy, hogy $k \in \mathbb{N}$, $1 < k < b$.

$k \geq b$ esetén a számjegyek száma megváltozna, így nem lenne egyértelmű a hozzárendelés. Szorzás után a számjegyek legyenek m helyi értékkel eltolva jobbra úgy, hogy $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < n$. Tehát a szóban forgó egyenlőség:

$$(*) \quad \overline{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot k = \overline{a_{n-m+1} a_{n-m+2} \dots a_n a_1 a_2 \dots a_{n-m}}.$$

Értelemszerűen: $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i < b$, $a_1 \neq 0$, $a_{n-m+1} \neq 0$.

3. Megoldás

A megoldáshoz írjuk fel $(*)$ -ban a számokat a jegyek valódi értékének összegeként

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot b^{n-1} \cdot k + a_2 \cdot b^{n-2} \cdot k + \dots + a_n \cdot b^{n-n} \cdot k \\ &= a_{n-m+1} \cdot b^{n-1} + a_{n-m+2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_{n-m+m} \cdot b^{n-m} \\ & \quad + a_1 \cdot b^{n-m-1} + a_2 \cdot b^{n-m-2} + \dots + a_{n-m} \cdot b^{n-m-(n-m)} \end{aligned}$$

Rendezzük az egyenletet a következő módon

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot b^{n-m-1} (b^m \cdot k - 1) + a_2 \cdot b^{n-m-2} (b^m \cdot k - 1) + \dots \\ & \quad + a_{n-m} \cdot b^{n-m-(n-m)} (b^m \cdot k - 1) \\ &= a_{n-m+1} (b^{n-1} - b^{m-1} \cdot k) + a_{n-m+2} (b^{n-2} - b^{m-2} \cdot k) + \dots \\ & \quad + a_{n-m+m} (b^{n-m} - b^{m-m} \cdot k) \end{aligned}$$

Alakítsuk szorzattá mindkét oldalt

$$\begin{aligned} & (b^m \cdot k - 1)(a_1 \cdot b^{n-m-1} + a_2 \cdot b^{n-m-2} + \dots + a_{n-m} \cdot b^{n-m-(n-m)}) \\ &= (b^{n-m} - k)(a_{n-m+1} \cdot b^{m-1} + a_{n-m+2} \cdot b^{m-2} + \dots + a_{n-m+m} \cdot b^{m-m}) \end{aligned}$$

Jelölje a bal oldal első tényezőjét A , második tényezőjét x . A jobb oldal első tényezőjét B , a másodikat y .

1. Állítás. A $(*)$ egyenlet megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy A és B legnagyobb közös osztója nagyobb, mint k .

Bizonyítás. Legyen $(A, B) = p$. Az egyenlet szerint $A \cdot x = B \cdot y$, ahol

$$b^{n-m-1} \leq x \leq b^{n-m} - 1, \quad \text{továbbá} \quad b^{m-1} \leq y \leq b^m - 1.$$

Az x -re, illetve y -ra nyert alsó és felső korlátot $x_{\min}$, $x_{\max}$, $y_{\min}$, $y_{\max}$ -szal fogjuk jelölni.

1.1. Állítás. $y < \frac{A}{k}$.

Bizonyítás. Írjuk át a két oldalt

$$y_{\max} = b^m - 1, \quad \frac{A}{k} = \frac{b^m \cdot k - 1}{k} = b^m - \frac{1}{k}.$$

Felvetés szerint

$$k > 1 \Rightarrow \frac{1}{k} < 1 \Rightarrow b^m - 1 < b^m - \frac{1}{k},$$

Amiből az állítás következik. ■

Legyen $\frac{A}{p} = \alpha$ és $\frac{B}{p} = \beta$. Mivel $(A, B) = p$, ezért $(\alpha, \beta) = 1$.

Ha $p \leq k$, akkor $A \cdot x = B \cdot y$ egyenlet mindkét oldalát p -vel elosztva $\alpha \cdot x = \beta \cdot y$ adódik, ahol az 1.1. Állítás miatt $y < \alpha$ és $(\alpha, \beta) = 1$. Tehát az egyenlet nem megoldható. ■

Létezhetsz megoldás ellenben, ha $p > k$, figyelembe véve, hogy x és y a megadott intervallumon bármilyen egész értéket felvehet.

2. Állítás. Ha $p > k$, akkor $y_{\max} > \alpha$.

Bizonyítás. Írjuk át a bizonyítandó állítást a következő alakban

$$y_{\max} = b^m - 1 > \frac{b^m \cdot k - 1}{p}, \quad \text{azaz} \quad b^m \cdot p - p > b^m \cdot k - 1.$$

Ez ekvivalens a

$$b^m (p - k) > p - 1 \quad \text{azaz a} \quad b^m > \frac{p - 1}{p - k}$$

egyenlőséggel. Viszont ez teljesül, mert a felvetések miatt

$$b^m > 1, \quad \frac{p - 1}{p - k} < 1.$$

Látható továbbá, hogy $x_{\max} > \beta$, hiszen ■

$$x_{\max} = b^{n-m} - 1 > \frac{b^{n-m} - k}{p} = \beta.$$

Így az egyenlet felírható $\alpha \cdot x = \beta \cdot y$ formában, ahol $x = l \cdot \beta$, $y = l \cdot \alpha$ és l olyan pozitív egész szám, melyre

$$\frac{x_{\min}}{\beta} \leq l \leq \frac{x_{\max}}{\beta} \quad \text{és} \quad \frac{y_{\min}}{\alpha} \leq l \leq \frac{y_{\max}}{\alpha}.$$

Tekintsük a két intervallum metszetét.

3. Állítás.

$$\frac{x_{\min}}{\beta} > \frac{y_{\min}}{\alpha}.$$

Bizonyítás. Írjuk át a bizonyítandó állítást:

$$\frac{x_{\min}}{\beta} = \frac{b^{n-m-1}}{b^{n-m} - k} \cdot p > \frac{y_{\min}}{\alpha} = \frac{b^{m-1}}{b^m \cdot k - 1} \cdot p$$

vagyis ami ezzel ekvivalens

$$b^{n-1} \cdot k - b^{n-m-1} > b^{n-1} - b^{m-1} \cdot k.$$

Ez egyenértékű a

$$k \cdot (b^{n-1} + b^{m-1}) > b^{n-1} + b^{n-m-1}$$

vagyis a

$$k > \frac{b^{n-1} + b^{n-m-1}}{b^{n-1} + b^{m-1}}$$

egyenlőtlenséggel, viszont ez teljesül, hiszen itt a jobb oldal kisebb, mint 2, és a feltétel miatt $k > 2$. ■

4. Állítás.

$$\frac{x_{\max}}{\beta} > \frac{y_{\max}}{\alpha}.$$

Bizonyítás. A bizonyítandó állítás

$$\frac{x_{\max}}{\beta} = \frac{b^{n-m} - 1}{b^{n-m} - k} \cdot p > \frac{y_{\max}}{\alpha} = \frac{b^m - 1}{b^m \cdot k - 1} \cdot p$$

alakban írható, ami ekvivalens a

$$b^n \cdot (k - 1) > k - 1$$

egyenlőtlenséggel. Ez viszont teljesül, mivel $b^n > 1$ és $k \geq 2$. ■

Tehát a végső intervallumunk:

$$\frac{x_{\min}}{\beta} = p \cdot \frac{b^{n-m-1}}{b^{n-m} - k} \leq l \leq \frac{y_{\max}}{\alpha} = p \cdot \frac{b^m}{b^m \cdot k - 1}$$

Az (*) egyenlet a b, n, m, k paraméterek ismeretében a következő:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = x \cdot b^m + y$$

Kihasználva, hogy $x = l \cdot \beta$ és $y = l \cdot \alpha$,

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = l \cdot (b^m \cdot \beta + \alpha) = l \cdot \left(b^m \cdot \frac{b^{n-m} - k}{p} + \frac{b^m \cdot k - 1}{p} \right) = l \cdot \frac{b^n - 1}{p}$$

Mindezt összegezve a (*) egyenlet megoldása adott b, n, m, k esetén:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = l \cdot \frac{b^n - 1}{p}$$

ahol

$$p = (A, B), \quad A = b^m \cdot k - 1, \quad B = b^{n-m} - k$$

és

$$p \cdot \frac{b^{n-m-1}}{b^{n-m} - k} \leq l \leq p \cdot \frac{b^m}{b^m \cdot k - 1}$$

A $p > k$ megoldhatósági feltétel teljesülése mellett is előfordulhat bizonyos paramétereknél, hogy ilyen l egész nem léteik. Ezt $l = \{\}$ -zal jelöljük. Ilyenkor az egyenletnek nincs megoldása.

Az egyenletben p meghatározásához érdemes kihasználni a következőt.

5. Állítás. Ha $p|A$ és $p|B$, akkor $p|b^n - 1$.

Bizonyítás. Kihasználva, hogy

$$A = b^m \cdot k - 1, \quad B = b^{n-m} - k$$

a feltétel miatt

$$b^m \cdot k \equiv 1 \pmod{p}, \quad b^{n-m} \equiv k \pmod{p}.$$

A második kongruenciából k -t az elsőbe behelyettesítve:

$$b^m \cdot b^{n-m} = b^n \equiv 1 \pmod{p},$$

ami a bizonyítandó következmény volt. ■

4. Keresési algoritmus

```
// Keresési algoritmus adott számrendszerben véges számú n-re.
// A számrendszer alapja b, a számjegyek száma n.
//n-jegyű számok
for (n = n_min; n <= n_max; n++)
{
    //m számjeggyel jobbra tolva
    for (m = 1; m < n; m++)
    {
        //k szorzó esetén
        for (k = 2; k < b; k++)
        {
            A := b^m * k - 1;
            B := b^(n - m) - k;
            p := 1;
            for (i = 0; i < prim[n - n_min].count; i++)
            {
                if (A mod prim[n - n_min][i] = 0 and B mod prim[n - n_min][i] = 0)
                {
                    p := p * prim[n - n_min][i];
                    A := A / prim[n - n_min][i];
                    B := B / prim[n - n_min][i];
                }
            }
            if (p > k)
            {
                alfa := A;
                beta := B;
                x_min := b^(n - m - 1);
                y_max := b^m - 1;
                l_min := ceiling(x_min / beta);
                l_max := floor(y_max / alfa);
                if (l_min <= l_max)
                {
                    for (l = l_min; l <= l_max; l++)
                    {
                        number := l * (b^m - 1) / p;
                        print number;
                    }
                }
            }
        }
    }
}
```

Mivel az egyenlet megoldása teljes mértékben algoritmizálható, kézenfekvő a számokat programmal keresni.

Keresési algoritmus adott számrendszerben véges számú n -re. A számrendszer alapja b , a számjegyek száma n .

$$\text{Állapottér} = \frac{N}{b} \times \frac{N}{n_{\min}} \times \frac{N}{n_{\max}} \times \frac{N^{r \times s}}{\text{prim}}$$

$$\text{Előfeltétel} = (b \geq 2 \wedge 1 < n_{\min} < n_{\max} \wedge r = (n_{\max} - n_{\min} + 1) \wedge s > 1)$$

$$\text{Kimenet} = (\{\text{number} | \text{number} \in \mathbb{N}\})$$

prim tömb tartalmazza a $b^n - 1$ alakú számok prímtényezőit, amit érdemes előre megadni, mert nagy számok faktorizációja sok időt vesz igénybe.

5. Példák.

A program segítségével 10-es számrendszerben a következő 6-jegyű számokat találtam:

$b = 10, n = 6$			
m	k	szám	prímtényezős felbontás
1	4	102564	$2 * 2 * 3 * 3 * 7 * 11 * 37$
		128205	$3 * 3 * 5 * 7 * 11 * 37$
		153846	$2 * 3 * 3 * 3 * 7 * 11 * 37$
		179487	$3 * 3 * 7 * 7 * 11 * 37$
		205128	$2 * 2 * 2 * 3 * 3 * 7 * 11 * 37$
		230769	$3 * 3 * 3 * 3 * 7 * 11 * 37$
	5	142857	$3 * 3 * 3 * 11 * 13 * 37$
2	3	153846	$2 * 3 * 3 * 3 * 7 * 11 * 37$
		230769	$3 * 3 * 3 * 3 * 7 * 11 * 37$
		307692	$2 * 2 * 3 * 3 * 3 * 7 * 11 * 37$
	4	142857	$3 * 3 * 3 * 11 * 13 * 37$
		190476	$2 * 2 * 3 * 3 * 11 * 13 * 37$
		238095	$3 * 3 * 5 * 11 * 13 * 37$
3	6	142857	$3 * 3 * 3 * 11 * 13 * 37$
4	2	142857	$3 * 3 * 3 * 11 * 13 * 37$
		285714	$2 * 3 * 3 * 3 * 11 * 13 * 37$
		428571	$3 * 3 * 3 * 3 * 11 * 13 * 37$
	9	109890	$2 * 3 * 3 * 3 * 5 * 11 * 37$
5	3	142857	$3 * 3 * 3 * 11 * 13 * 37$
		285714	$2 * 3 * 3 * 3 * 11 * 13 * 37$

10-es számrendszerben az első ilyen szám a 102564, 5-jegyű és annál kisebb ilyen tulajdonságú nem létezik.

A következő számok 12-jegyűek, ezek mindegyike egy fentebb leírt 6-jegyű szám önmaga mögé írásából kapható. 10-es számrendszerben 50-jegyű számokig n lehet-

séges értékei, ahol az egyenlet megoldható: 6, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 50.

7-es számrendszerben egyébként sokkal hamarabb találunk ilyen számot: $15_7 \cdot 3 = 51_7$.

Példa az $l = \{\}$ esetre.

Legyen $b = 10$, $n = 15$, $m = 2$, $k = 9$. Így $A = 899$, $B = 10^{13} - 9$, $p = 31$. Ezek szerint $\alpha = 29$, $\beta = 322580645161$.

l minimumát x határozza meg, ahol $x = l \cdot \beta$ és $x_{\min} = b^{n-m-1}$. l maximumát y -ből kapjuk úgy, hogy $y = l \cdot \alpha$ és $y_{\max} = b^m$.

Tehát $3, 1 \leq l \leq 3,45$. De l egész, így $p > k$ feltétel teljesülése ellenére az egyenletnek nincs megoldása.

6. Legnagyobb közös osztó

Érdekes megvizsgálni adott b és n esetén a számok legnagyobb közös osztóját. Mivel a számok felírhatók

$$l \cdot \frac{b^n - 1}{p}$$

alakban, $b^n - 1$ minden prímtényezője, amely nem osztója p -nek, osztója lesz e számoknak. Például $b = 10$, $n = 6$ -ra ez a legnagyobb közös osztó a 3663, ahogy az kiolvasható az előző fejezetben közölt táblázat soraiból. Az is belátható, hogy A és B – ahol $p = (A, B)$ – nem lehetnek többszöröse (egyidejűleg) 3663 prímtényezőinek. Általános képletet nem találtam adott b és n esetén a legnagyobb közös osztó meghatározására.

7. Irodalmi beágyazás

Miután jelen írás eredményeit bizonyítottam, az irodalomban – [1], [2] továbbá ezek forrásai – több hasonló eredményt találtam, ezeket fogom röviden ismertetni, és saját eredményeimmal összevetni.

Az angol szakirodalomban használt *cyclic number*-t ciklikus számnak, *transposable integer*-t cserélődő számnak, a *cyclic permutation*-t ciklikus permutációnak fordítottam, a továbbiakban ezeket a kifejezéseket használom.

1. Definíció. Ciklikus számnak nevezünk egy n -jegyű természetes számot, ha azt 1-től n -ig bármilyen egész számmal megszorozva, a szám különböző ciklikus permutációit kapjuk.

2. Definíció. Cserélődő számnak nevezünk egy természetes számot, ha egy egész számmal megszorozva a szám ciklikus permutációját kapjuk.

A ciklikus számok ilyen módon részhalmazát képezik a cserélődő számok halmazának.

Példák ciklikus permutációra:

A $142857 \cdot 3 = 428571$ szorzás elvégzésekor a szám egy hellyel balra tolódik.

A $128205 \cdot 4 = 512820$ szorzás elvégzésekor a szám egy hellyel jobbra tolódik.

A következő esetek nem nevezendők cserélődő számnak:

1. önálló számjegyek, pl.: 5
2. ismétlődő számjegyek, pl.: 555
3. ismétlődő cserélődő számok, pl.: 142857142857

Az első két eset kizárásának szükségessége akkor nyer értelmet, ha a szám kezdődhet nullával. Saját eredményeimben e lehetőségnek nem adtam teret.

A harmadik eshetőséget bizonyításaimban nem tekintettem kizárandónak.

Amennyiben a szám nem kezdődhet nullával, az egyetlen ciklikus szám 10-es számrendszerben a 142857.

A ciklikus és a cserélődő számok kapcsolatot mutatnak a végtelen szakaszos tizedes törtekkel és az egész számok reciprokával.

Az L hosszúságú ciklikus szám megkapható

$$\frac{1}{L+1}$$

tizedes tört alakjából.

Megfordítva: ha

$$\frac{1}{p}$$

tizedes tört alakjának ismétlődő szakaszainak hossza $p-1$ (ahol p prím), a szóban forgó szakasz ciklikus számot ad.

Az előzőekből következik, hogy a ciklikus szám mindig

$$\frac{b^{p-1} - 1}{p}$$

alakú, ahol b a számrendszer alapja, p prím úgy, hogy $p \nmid b$.

Ugyanakkor nem minden ilyen p ad ciklikus számot. 10-es számrendszerben ilyen például a $p = 13$ eset. Azonban ez az eset is cserélődő számhoz vezet. Az első néhány prím, amely ciklikus számhoz vezet: 7, 17, 19, 23, 29, 47.

A 10-eshez hasonlóan más számrendszerekben is találhatók ciklikus és cserélődő számok. Ha a számrendszer alapja négyzetszám, ciklikus szám nem található benne.

8. Összegzés

A dolgozatban a bevezetésben feltett 1. Kérdésre kerestük a választ. A megválaszoláshoz felírtuk a kérdést egyenlet formájában, az egyenletre megoldást és megoldhatósági kritériumokat adtunk. Mindezeket általános algoritmusba tömörítettük, és az eredményeket példákkal illusztráltuk. Felvetettük a legnagyobb közös osztók problémáját. A teljesség igénye nélkül ismertettük a hasonló problémával foglalkozó szakirodalmi eredményeket. Ezek összevetve a saját eredményekkel:

	saját eredmények	szakirodalomban talált eredmények
megközelítés	egyenlet	tizedes törtek ismétlődő szakaszai
számok keresése	egyenlet megoldása algoritmus segítségével	megfelelő hányadosok felírása
első számjegy nulla	nem megengedett	eldöntendő
ismétlődő cserélődő számok	megengedett	ignorálandó

A saját megközelítés egyenletben való felírásának és az ez alapján készült keresési algoritmusnak haszna, hogy adott b esetén az általunk meghatározott intervallumba eső minden cserélődő számot egyszerűen megkaphatunk. Tehát jelen dolgozat sajátja a probléma megközelítése, az egyenlet felírása és megoldása, továbbá a keresési algoritmus.

Köszönetnyilvánítás. Köszönettel tartozom Győry Kálmán professzor úrnak sok hasznos tanácsáért a cikk megírását illetően. Dolgozatomat gimnáziumi matematika tanárnőmnek, Dr. Pelényi Attilánénak ajánlom!

Irodalomjegyzék

- [1] Az angol nyelvű Wikipédia Cyclic number c. szócikke
- [2] Az angol nyelvű Wikipédia Transposable integer c. szócikke