

Egy hasznos trükk: a „Ravi-helyettesítés”

MATOS ZOLTÁN

1. Bevezető

Probléma megoldási stratégiák a matematikában. Ez volt a címe az egyik szabadon választható kurzusnak, melyet évekkel ezelőtt negyedéves matematikatanár szakos hallgatóként – az évfolyam jelentős részével együtt – hallgattam a Szegedi Tudományegyetemen. Középiskolai tanári munkám során (főleg szakkörökön és verseny előkészítőkön) folyamatosan érzékelem, milyen hasznos az, hogy képzeletbeli szerzőszámolásom tele van olyan eszközökkel, amiket egy feladat megoldásakor elő tudok venni. Az alábbi cikk egy ilyen eszköz feladatokon keresztül történő bemutatására vállalkozik.

2. A Ravi-helyettesítés

Amikor egy feladatban a bizonyítandó egyenlőtlenség egy háromszög a , b és c oldalára vonatkozik, gyakran hasznos a következő helyettesítés

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = x + z,$$

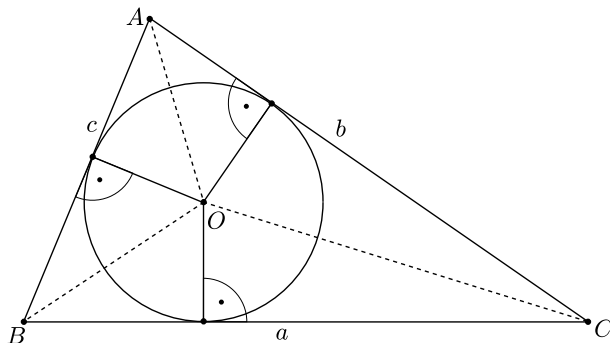
ahonnan

$$x = \frac{a + c - b}{2}, \quad y = \frac{a + b - c}{2}, \quad z = \frac{b + c - a}{2}$$

ahol a háromszög-egyenlőtlenségből adódóan x , y és z pozitívak.

Az x , y és z szakaszok geometriai jelentése a háromszög csúsaiból a beírható körhöz húzott érintőszakaszok, amelyeket a középszintű középiskolai törzsanyagban is (pl. a Thalész-tétel vagy az érintőnégyszögtétel kapcsán) megmutatunk a diákoknak.

A helyettesítésnek köszönhetően elkerülhetjük az a , b és c számokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség vizsgálatát. Ezt az $x > 0$, $y > 0$ és $z > 0$ feltételek helyettesítik.



Bár itthon is régóta használjuk feladatok megoldásához, külön nevével magyar nyelvű írásokban még nem találkoztam. Külföldi szakirodalomban Ravi Vakil, kanadai matematikus után gyakran Ravi-féle helyettesítésnek nevezik (franciául transformation de Ravi, angolul Ravi's transformation vagy Ravi substitution).

3. Minta feladatok a Ravi-helyettesítés használatára

1. feladat. Jelölje a , b és c egy háromszög oldalainak hosszát! Bizonyítsuk be, hogy

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) > a^4 + b^4 + c^4$$

Megoldás. Alkalmazzuk a Ravi-helyettesítést, $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ (ahol $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). A zárójelek felbontása és az összevonások (bár hosszú, de mechanikus) elvégzése után a fenti egyenlőtlenség a következő – az eredetivel ekvivalens – alakot ölti:

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 > 0,$$

ami pedig triviálisan teljesül, hiszen $x, y, z > 0$.

2. feladat. Jelölje a, b és c egy háromszög oldalainak hosszát! Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$$

(indiai olimpia 1989).

Megoldás. Alkalmazva a Ravi-helyettesítést, $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ (ahol $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= \frac{x+y}{x+2z+y} + \frac{y+z}{y+2x+z} + \frac{z+x}{z+2y+x} < \\ &< \frac{x+y}{y+z+y} + \frac{y+z}{y+x+z} + \frac{z+x}{z+y+x} = 2 \end{aligned}$$

Az összeg felülről történő becslésekor azt használtuk ki, hogy egy pozitív nevezőjű és számlálójú tört értékét növeljük azzal, ha nevezőjét csökkentjük.

3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c oldalú háromszögben

$$a(s-a) + b(s-b) + c(s-c) \leq 9Rr$$

ahol R a háromszög köré, r a háromszögbe írható kör sugara, s pedig a kerület fele.

Megoldás. Használjuk a háromszög területképleteket, ahonnan

$$R = \frac{abc}{4T} \quad \text{és} \quad r = \frac{T}{s}, \quad \text{így} \quad Rr = \frac{abc}{4s}$$

Alkalmazva a Ravi-helyettesítést, $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ (ahol $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$z(x+y) + x(y+z) + y(x+z) \leq \frac{9(x+y)(y+z)(x+z)}{4(x+y+z)}$$

A zárójeleket felbontva, az egyenlőtlenség két oldalát a pozitív nevezővel megszorozva majd rendezve a következőt kapjuk:

$$xyz \leq \frac{x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y}{6}$$

Mivel $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, ezért a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y}{6} \geq \sqrt[6]{x^6y^6z^6} = xyz$$

amivel a kiindulási egyenlőtlenséget bizonyítottuk.

4. feladat. Jelölje a , b és c egy háromszög oldalainak hosszát! Bizonyítsuk be, hogy

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq abc.$$

Megoldás. Alkalmazva a Ravi-helyettesítést, $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ (ahol $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$\begin{aligned} 2y \cdot 2x \cdot 2z &\leq (x+y)(y+z)(z+x) \\ y \cdot x \cdot z &\leq \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z+x}{2} \\ \sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx} &\leq \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z+x}{2}, \end{aligned}$$

ami a pozitív számok számtani és mértani közepe közti egyenlőtlenség miatt teljesül, és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y = z$, azaz $a = b = c$, vagyis a háromszög szabályos.

5. feladat. Legyen a, b és c egy háromszög három oldala! Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Megoldás. Alkalmazva a Ravi-helyettesítést, $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ (ahol $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2y} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2z} &\geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &\geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \\ \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{2} + \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{2} + \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}}{2} &\geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \end{aligned}$$

ami a harmonikus és számtani közép közti egyenlőtlenség miatt teljesül. Az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $x = y = z$, azaz $a = b = c$, vagyis a háromszög szabályos.

6. feladat. Legyen a, b és c egy háromszög három oldala! Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

(1996-os csendes óceáni olimpia 5-ös feladata).

Megoldás. Alkalmazva a Ravi-helyettesítést, $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ (ahol $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$\begin{aligned} \sqrt{2y} + \sqrt{2z} + \sqrt{2x} &\leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \\ \sqrt{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) &\leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \end{aligned}$$

Mivel az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény konkáv, ezért

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{\frac{x+y}{2}},$$

így

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) &\leq \sqrt{x+y} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{y} + \sqrt{z}) &\leq \sqrt{y+z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{z} + \sqrt{x}) &\leq \sqrt{z+x} \end{aligned}$$

A három egyenlőtlenséget összeadva, megkapjuk a bizonyítandót.

7. feladat. Jelölje a, b, c egy háromszög három oldalának a hosszát! Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

(1983-as nemzetközi matematikai diákolimpia 6-os feladat).

Megoldás. Alkalmazva a Ravi-helyettesítést, $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ (ahol $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$(x+y)^2(y+z)(x-z) + (y+z)^2(x+z)(y-x) + (x+z)^2(x+y)(z-y) \geq 0.$$

Amiből a négyzetre emelések, zárójelfelbontás és összevonás után

$$\begin{aligned} 2x^3z + 2xy^3 + 2yz^3 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2 &\geq 0 \\ x^3z + xy^3 + yz^3 - x^2yz - xy^2z - xyz^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség bal oldalát alakítsuk át:

$$xz(x-y)^2 + xy(y-z)^2 + yz(z-x)^2 \geq 0.$$

A kapott egyenlőtlenség pedig nyilvánvalóan teljesül a benne szereplő tagok nem negatív volta miatt. Az egyenlőség pedig akkor és csakis akkor állhat fenn (az $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ miatt), ha $x = y = z$, azaz, ha $a = b = c$, tehát a szabályos háromszög esetén.

A feladat többféle módon (pl. a Cauchy-féle egyenlőtlenséggel) is megoldható. Az olimpián Bernhard Leeb külön díjat kapott arra, hogy az eredeti egyenlőtlenséget az

$$a(b-c)^2(b+c-a) + b(a-b)(a-c)(a+b-c) \geq 0$$

alakra hozva, oldotta meg a feladatot.

4. A Ravi-helyettesítés és a Héron-képlet

A Ravi-helyettesítés másik szép felhasználása a háromszög területét annak három oldalából megadó

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

Héron-képlettel való kapcsolatából adódik, hiszen segítségével ez utóbbi a

$$T = \sqrt{(x+y+z)xyz}.$$

alakra hozható. Ennek köszönhetően adhatunk egy szép megoldást a következő feladatra.

Feladat. Az x, y, z pozitív számokra teljesül, hogy

$$xyz(x + y + z) = 1.$$

Határozzuk meg a következő kifejezés minimumát: $(x + y)(x + z)!$

Megoldás. Legyen

$$x + y = a, \quad y + z = b \quad \text{és} \quad x + z = c.$$

Mivel x, y és z pozitívak, így az a, b és c teljesítik a háromszög-egyenlőtlenség feltételeit, s létezik olyan háromszög, amelynek oldalai a, b, c hosszúak. A fentiek miatt ennek területe

$$T = \sqrt{(x + y + z)xyz} = 1.$$

Ekkor felhasználva a trigonometrikus területképletet

$$(x + y)(x + z) = ac \geq ac \cdot \sin \beta = 2T = 2.$$

Az egyenlőség, akkor és csakis akkor áll fenn, ha $\beta = 90^\circ$.

5. Feladatok

1. Legyen a, b, c egy háromszög oldalainak hossza! Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket!

$$a) \quad (ab + bc + ac)(a + b + c) > a^3 + b^3 + c^3 + 5abc$$

$$b) \quad \frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geq 3$$

$$c) \quad \sqrt{3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})} \geq \sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b}$$

$$d) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T \quad (\text{ahol } T \text{ a háromszög területe})$$

$$e) \quad T \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 \quad (\text{ahol } T \text{ a háromszög területe})$$

2. Melyik az a legkisebb K pozitív egész szám amelyre

$$K > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc},$$

ha az a, b és c egy háromszög három oldalának hosszát jelöli.

Irodalom

- [1] Eigel Ernő, *Síkgeometriai feladatok*, Erkel Ferenc Gimnázium, Gyula, 2004.
- [2] Kosztolányi J.-Makay G.-Pintér K.-Pintér L., *Matematikai problémakalauz I.*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.
- [3] Reiman István, *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-1994*, Typotex, Budapest, 1997.
- [4] Tarik Belhaj Soulami, *Les olympiades de mathématiques, réflexes et stratégies*, Ellipses, Paris, 1999.
- [5] <https://cms.math.ca/Concours/APMO>
- [6] <https://mblog1024.wordpress.com/2011/02/14/ravi-substitution-explained/>
https://www.eleves.ens.fr/home/budzinsk/polys/Alg%C3%A8bre/Avanc%C3%A9/2013_tdineg.pdf
- [7] <https://www.normalesup.org/kortchem/olympiades/Cours/Inegalites/tin2006.pdf>

Matos Zoltán, SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola,
Szeged, Szentháromság utca 2., matos@freemail.hu

