

Kettős számsorozatok és számsorok konvergenciája

MÓRICZ FERENC

1. Bevezetés: Valós számsorozatok és számsorok konvergenciája

A középiskolák matematikai tagozatának tanulói már találkoztak a valós számsorozatokból álló sorozatokkal és sorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakkal és tételekkel. Ezek fontos szerepet játszanak a differenciálhányados és az integrál fogalmának megértésében már a középiskolában is, de még inkább az egyetemi, főiskolai tanulmányok első évében sorra kerülő Kalkulus anyagának mélyebb megértésében és sikeres elsajátításában. Bevezetésünkben röviden összefoglaljuk a számsorozatokra és számsorokra vonatkozó legfontosabb definíciókat és tételeket.

Egy valós *számsorozat*, röviden: *sorozat*, olyan függvény (más szóval: hozzárendelés), amely a természetes számok sorrendjében minden természetes számhoz egy valós számot rendel hozzá. Ezt a hozzárendelést az $(a_j: j = 1, 2, \dots)$ szimbólummal jelöljük, de jelölhetjük részletesebben úgy, hogy

$$a_1, a_2, \dots, a_j, \dots;$$

vagy rövidebben úgy is, hogy (a_j) ; magát az a_j -t az (a_j) sorozat j -edik, vagy *általános tagjának* nevezzük.

Gyakran a nullát is hozzávesszük a természetes számokhoz, és ekkor nullával kezdődik a sorozat tagjainak indexezése, és az $(a_j: j = 0, 1, 2, \dots)$ szimbólum utal erre. Cikkünkben ezt az utóbbi számsorozat fogalmat használjuk.

Jól ismert, hogy az (a_j) sorozatot akkor nevezzük *konvergensnek* (a szó jelentése: összefutó, összetartó), ha létezik olyan a valós szám, hogy minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $j_0 = j_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(1.1) \quad |a_j - a| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad j \geq j_0.$$

Ezt az a számot nevezzük az (a_j) sorozat *határértékének*, vagy *limeszének*, és a konvergencia tényét a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a$$

szimbólummal jelöljük.

Az olyan sorozatot, amelynek nem létezik határértéke, *divergensnek* (a szó jelentése: szétfutó, széttartó) nevezzük. Megemlíti, hogy a végtelenbe divergáló sorozatokat szokás *valódi divergens sorozatoknak* nevezni. Akkor mondjuk, hogy az (a_j) sorozat *plusz végtelenbe divergál*, ha akármilyen nagy K valós számhoz meg tudunk adni egy a K -tól függő $j_0 = j_0(K)$ természetes számot úgy, hogy

$$a_j > K, \quad \text{ha } j \geq j_0.$$

Hasonló módon definiáljuk a *mínusz végtelenbe divergáló* sorozatokat.

Ha az (a_j) sorozat konvergens, akkor (1.1)-ből és a *háromszög egyenlőtlenségéből* következik, hogy

$$|a_j| = |(a_j - a) + a| \leq |a_j - a| + |a| < \varepsilon + |a|, \quad \text{ha } j \geq j_0(\varepsilon).$$

Mivel az innen kimaradó $a_0, a_1, \dots, a_{j_0-1}$ tagok száma véges, ezért az (a_j) sorozat minden tagjára érvényes az

$$|a_j| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{j_0-1}|, \varepsilon + |a|\}$$

egyenlőtlenség, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám lehet. Ezzel beláttuk, hogy minden konvergens sorozat *korlátos*.

Nagy jelentőségű az a tény, hogy egy sorozat konvergens voltát abban az esetben is meg tudjuk állapítani, hogy ha annak az a határértékét még nem ismerjük, vagy nem tudjuk explicite megadni. Erre szolgál a *Cauchy-féle belső konvergenciakritérium*: Az (a_j) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $k_0 = k_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(1.2) \quad |a_j - a_k| < \varepsilon, \quad \text{ha } \min\{j, k\} \geq k_0.$$

Megjegyezzük, hogy a belső konvergenciakritérium érvényességét a valós számok ún. teljességi axiómájára támaszkodva tudjuk bizonyítani. A további részletek iránt érdeklődő olvasónak *Leindler László* jegyzetét ajánljuk (lásd [2]-t a cikk végén található Forrásmunkák jegyzékében).

Ezek után áttérünk a valós számsorokkal, röviden: *sorokkal*, kapcsolatos ismeretek tárgyalására. A valós számokból álló

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_j + \dots$$

kifejezést, vagy az ún. *szigma jelölést* használva, a

$$(1.3) \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

szimbólummal jelölt végtelen összeget *sornak* nevezzük. A „szigma” betű a magyar ábécé „sz” betűjének a görök megfelelője, és „ $\sum$ ” ennek a nagy betűs változata. Magát a_j -t a sor j -edik, vagy *általános tagjának* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy az nem feltétlenül kell, hogy a sor kezdő tagjának indexe nulla legyen. A $\sum_{j=n}^{\infty} a_j$ végtelen összeget szintén sornak nevezzük, ahol az n tetszőleges egészszám (akár negatív is) lehet.

A sorok konvergenciájának fogalmát a sorozatok konvergenciájának fentebb már definiált fogalmára vezetjük vissza azáltal, hogy bevezetjük az (1.3) sor *részletösszegeinek* (s_m) sorozatát, ahol

$$(1.4) \quad s_m := \sum_{j=0}^m a_j, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Az (1.3) sort akkor nevezzük *konvergensnek* (illetve *divergensnek*), ha a részletösszegeinek (s_m) sorozata konvergens (illetve divergens). Konvergencia esetén az (s_m) sorozat s határértékét nevezzük az (1.3) sor *összegének*. Ezt a tényt úgy jelöljük, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = s, \quad \text{ahol} \quad s := \lim_{m \rightarrow \infty} s_m.$$

Képletben megfogalmazva: akkor mondjuk, hogy az (1.3) sor konvergens és az összege s -sel egyenlő, ha minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $m_0 = m_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(1.5) \quad |s_m - s| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad m \geq m_0.$$

Divergens sornak nem tulajdonítunk összeget. Ha viszont a részletösszegek sorozata valódi divergens sorozat, akkor a plusz (illetve mínusz) végtelenbe való divergencia esetében gyakran használják a

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = +\infty \quad (\text{illetve} \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j = -\infty)$$

jelölést is.

Mivel (1.4) szerint

$$a_j = s_j - s_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots;$$

ezért ha az (1.3) sor konvergens, akkor (1.5)-ből és a háromszög egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|a_j| = |(s_j - s) + (s - s_{j-1})| \leq |s_j - s| + |s - s_{j-1}| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad j > m_0(\varepsilon/2).$$

Tekintve, hogy $\varepsilon > 0$ tetszőleges (kicsi) szám lehet, ez azt jelenti, hogy ha az (1.3) sor konvergens, akkor

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy ha az (1.3) sor konvergens, akkor az általános tagja 0-hoz konvergál. De ez a feltétel *csak szükséges feltétele*, de nem elegendő feltétele a sor konvergenciájának. Például, jól ismert, hogy a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

harmonikus sor divergens, bár az általános tagja 0-hoz konvergál.

A sorozatokra vonatkozó *Cauchy-féle belső konvergenciakritérium* (lásd (1.2)-ben) megfelelőjét *sorokra* a következőképpen fogalmazhatjuk meg: Az (1.3) sor akkor és csak akkor konvergens, ha minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $n_0 = n_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(1.6) \quad |s_n - s_m| = \left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > m \geq n_0.$$

Megjegyezzük, hogy egy sorozat véges sok tagjának megváltoztatása, vagy törlése nem változtatja meg a sorozat konvergens vagy divergens voltát, és konvergencia esetén a sorozat határértékét sem változtatja meg. Hasonló állítás érvényes sorokra is azzal a különbséggel, hogy konvergens sor véges sok tagjának megváltoztatása vagy törlése már megváltoztathatja a sor összegét.

Az (1.3) sort akkor nevezzük *abszolút konvergensnek*, ha a tagjainak abszolút értékéből képzett

$$(1.7) \quad \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$$

sor konvergens. Mivel az (1.7) sor részletösszegei *monoton növekvő sorozatot* alkotnak, ezért (1.7) akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegeinek sorozata felülről korlátos. A valós számok teljességi axiómájából következik, hogy egy felülről korlátos sorozat felső korlátai között mindig van legkisebb, amelyet a sorozat *felső határának*, idegen szóval: *szuprémumának* nevezünk; és konvergencia esetén éppen ez a szuprémum az (1.7) sor összege.

Azt a tényt, hogy az (1.7) sor konvergens (illetve divergens) úgy is szokás jelölni, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty \quad (\text{illetve} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| = \infty).$$

A Cauchy-féle belső konvergenciakritérium és a háromszög egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy ha az (1.3) sor abszolút konvergens, akkor az (1.3) sor maga is konvergens. Ugyanis, ha az (1.7) sor konvergens, akkor

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^n |a_j| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n > m \rightarrow \infty.$$

Azokat a konvergens sorokat pedig, amelyek nem abszolút konvergenssek, *feltételesen konvergens soroknak* nevezzük. Például, a

$$(1.8) \quad \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{1}{j} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

sor feltételesen konvergens, mivel a $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j$ harmonikus sor divergens. Ismert, hogy az (1.8) sor összege $(\ln 2)$ -vel egyenlő, ahol $\ln$ -nel a természetes alapú logaritmust jelöljük.

Az eddigi tárgyalás során a sorok konvergenciájának fogalmát a sorozatok konvergenciájának fogalmára vezettük vissza az adott sor (1.4)-ben definiált részletösszegeinek bevezetésével. Érdeemes megjegyezni, hogy ez a visszavezetés a fordított irányban is lehetséges. Ugyanis, a sorozatok konvergenciájának fogalmát vissza tudjuk vezetni a sorok konvergenciájának fogalmára az ún. *visszafelé tartó differencia operátor* (angolul: backward difference operator) fogalmának a segítségével. Az (a_j) sorozatra definiáljuk a

$$(1.9) \quad \nabla a_j := a_j - a_{j-1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

szimbólumot azzal a megállapodással, hogy $a_{-1} := 0$. A fordított háromszög alakú ∇ jel neve: *nabla*, amely a függvények polinomokkal történő interpolációjának elméletében játszik fontos szerepet (lásd [4]-et a cikk végén található Forrásmunkák jegyzékében). Ekkor a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \nabla a_j$$

sor m -edik részletösszege

$$(1.10) \quad \begin{aligned} s_m &:= \sum_{j=0}^m \nabla a_j = (a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \dots \\ &\quad \dots + (a_1 - a_0) + a_0 = a_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

és ugyanilyen módon kapjuk, hogy

$$s_n - s_m = \sum_{j=m+1}^n \nabla a_j = a_n - a_m, \quad n > m \geq 0.$$

A fentiekkel összhangban akkor mondjuk, hogy az (a_j) sorozat *abszolút konvergens*, ha

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\nabla a_j| = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j - a_{j-1}| < \infty, \quad \text{ahol} \quad a_{-1} := 0.$$

Ebben az esetben az (a_j) sorozat maga is konvergens, mivel

$$|a_n - a_m| = \left| \sum_{j=m+1}^n \nabla a_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^n |\nabla a_j| \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad n > m \rightarrow \infty.$$

2. Valós kettős számsorozatok és számsorok Pringsheim szerinti konvergenciája

Egy *valós kettős számsorozat*, röviden: *kettős sorozat* (angolul: double sequence) olyan függvény, amely minden nemnegatív egészszámból álló *rendezett pár*hoz egy valós számot rendel hozzá. A számpárok rendezésén azt értjük, hogy a (j, k) és (k, j) párokat különbözőnek tekintjük, ha $j \neq k$. Ezt a hozzárendelést az $(a_{j,k} : j, k = 0, 1, 2, \dots)$ szimbólummal jelöljük, vagy egyszerűen csak $(a_{j,k})$ -t írunk.

Megjegyezzük, hogy a kettős sorozattól való megkülönböztetés végett az előző részben tárgyalt (a_j) sorozatot nevezhetjük *egyszeres sorozatnak* is (angolul: single sequence).

Az $(a_{j,k})$ kettős sorozatot akkor nevezzük *konvergensnek Pringsheim szerint* (angolul: convergent in Pringsheim's sense), ha létezik olyan a valós szám, hogy minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $p_0 = p_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(2.1) \quad |a_{j,k} - a| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \min\{j, k\} \geq p_0.$$

Ezt az a számot az $(a_{j,k})$ kettős sorozat *határértékének* nevezzük és a konvergencia tényét a

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} a_{j,k} = a$$

szimbólummal jelöljük. *Pringsheim* német matematikus volt, aki ezt a róla elnevezett konvergencia fogalmat bevezette (lásd [5]-öt a cikk végén található Forrásmunkák jegyzékében). Az olyan $(a_{j,k})$ kettős sorozatot, amelynek nem létezik határértéke, (Pringsheim szerint) *divergensnek* nevezzük.

Visszatérve a (2.1) definícióra észrevesszük, hogy végtelen sok olyan (j, k) pár van, amelyekre $\min\{j, k\} < p_0$. Például, mindegyik (j, k) pár ilyen, ha $j = 0, 1, 2, \dots$ és $k = 0, 1, \dots, p_0 - 1$. Ennek egyik következménye az, hogy egy $(a_{j,k})$ kettős sorozat akkor is konvergálhat Pringsheim szerint, ha az $a_{j,k}$ tagjai

összességükben nem korlátosak. Például, ha

$$a_{j,k} := \begin{cases} j, & \text{ha } j = 0, 1, 2, \dots \text{ és } k = 0; \\ k, & \text{ha } j = 0 \text{ és } k = 0, 1, 2, \dots; \\ 0, & \text{ha } \min\{j, k\} \geq 1; \end{cases}$$

akkor az $(a_{j,k})$ kettős sorozat Pringsheim szerint 0-hoz konvergál, viszont

$$\sup_{j,k \geq 0} a_{j,k} = \infty.$$

Ezen hiányossága ellenére, a Pringsheim szerinti konvergencia fogalom esetében is érvényes egy *Cauchy-féle belső konvergenciakritérium* (vö. (1.2)-vel). Ezt fogalmazzuk meg a következő tételben.

1. Tétel. *A (2.1) kettős sorozat akkor és csak akkor konvergens Pringsheim szerint, ha minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $q_0 = q_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy*

$$(2.2) \quad |a_{j,k} - a_{j_1,k_1}| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \min\{j, k, j_1, k_1\} \geq q_0.$$

Bizonyítás. *Szükségesség.* Azt kell belátnunk, hogy ha $(a_{j,k})$ Pringsheim szerint konvergál valamely a határértékhez, akkor (2.2) fennáll. Valóban, a háromszög egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk (2.1)-ből, hogy

$$\begin{aligned} |a_{j,k} - a_{j_1,k_1}| &= |(a_{j,k} - a) + (a - a_{j_1,k_1})| \leq \\ &\leq |a_{j,k} - a| + |a - a_{j_1,k_1}| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \min\{j, k, j_1, k_1\} \geq p_0(\varepsilon/2). \end{aligned}$$

Tehát (2.2) minden $\varepsilon > 0$ -ra fennáll a $q_0(\varepsilon) := p_0(\varepsilon/2)$ választással.

Elegendőség. Most azt kell belátnunk, hogy ha (2.2) fennáll minden $\varepsilon > 0$ -ra, akkor az $(a_{j,k})$ kettős sorozat Pringsheim szerint konvergens. Először észrevesszük, hogy a diagonális tagok $(a_{j,j} : j = 0, 1, 2, \dots)$ egyszeres sorozatára is érvényes a Cauchy-féle belső konvergenciakritérium. Ehhez elég (2.2)-t azon speciális esetben tekintenünk, amikor $j = k$ és $j_1 = k_1$. Jelöljük a -val az $(a_{j,j})$ sorozat határértékét. Definíció szerint minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $j_0 = j_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(2.3) \quad |a_{j,j} - a| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad j \geq j_0.$$

Ezután (2.2)-ből és (2.3)-ból a háromszög egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |a_{j,k} - a| &= |(a_{j,k} - a_{j,j}) + (a_{j,j} - a)| \leq \\ &\leq |a_{j,k} - a_{j,j}| + |a_{j,j} - a| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \min\{j, k\} \geq \max\{q_0(\varepsilon/2), j_0(\varepsilon/2)\}. \end{aligned}$$

Tehát (2.1) fennáll a $p_0(\varepsilon) := \max\{q_0(\varepsilon/2), j_0(\varepsilon/2)\}$ választással minden $\varepsilon > 0$ -ra. Ez pedig azt bizonyítja, hogy az $(a_{j,k})$ kettős sorozat Pringsheim szerint konvergál az a határértékhez.

Ezek után áttérünk a *valós kettős számsorokkal*, röviden: *kettős sorokkal* (angolul: double series) kapcsolatos fogalmak és összefüggések tárgyalására. A valós számokból álló

$$\begin{aligned} & a_{0,0} + a_{0,1} + \cdots + a_{0,k} + \cdots \\ & + a_{1,0} + a_{1,1} + \cdots + a_{1,k} + \cdots \\ & \dots\dots\dots \\ & + a_{j,0} + a_{j,1} + \cdots + a_{j,k} + \cdots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

kifejezést, vagy az ún. *kettős szigma jelölést* használva, a

$$(2.4) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}$$

szimbólummal jelölt összeget kettős sornak nevezzük, ahol j a sorindex, k pedig az oszlopindex.

A kettős sorok Pringsheim szerinti konvergenciájának fogalmát a kettős sorozatok Pringsheim szerinti konvergenciájának fentebb már definiált fogalmára vezetjük vissza azáltal, hogy bevezetjük a (2.4) kettős sor *téglalap alakú részletösszegeinek* (angolul: rectangular partial sums) az $(s_{m,n})$ kettős sorozatát, ahol

$$(2.5) \quad s_{m,n} := \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{j,k}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Akkor mondjuk, hogy a (2.4) kettős sor *Pringsheim szerint konvergál* (illetve *divergál*), ha a téglalap alakú részletösszegeinek $(s_{m,n})$ kettős sorozata Pringsheim szerint konvergál (illetve divergál). Konvergencia esetén a $(s_{m,n})$ kettős sorozat s határértékét a (2.4) kettős sor *összegének* nevezzük. Ezt a tényt úgy jelöljük, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = s, \quad \text{ahol} \quad s := \lim_{m,n \rightarrow \infty} s_{m,n}.$$

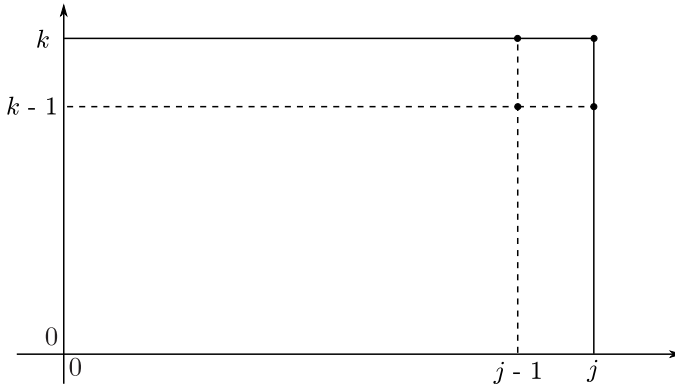
Képletben megfogalmazva, a (2.4) kettős sor akkor konvergál Pringsheim szerint az s összeghez, ha minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy ε -tól függő $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(2.6) \quad |s_{m,n} - s| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \min\{m, n\} \geq \mu_0.$$

Azon kettős soroknak, amelyek Pringsheim szerint divergálnak, nem tulajdonítunk összeget.

Az 1. Ábrán (ahol a téglalapok jobb felső csúcspontját kis körrel jelöltük meg) láthatjuk, hogy

$$(2.7) \quad a_{j,k} = s_{j,k} - s_{j-1,k} - s_{j,k-1} + s_{j-1,k-1}, \text{ ahol } j, k = 1, 2, \dots$$



1. Ábra.

Eszerint, ha a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint konvergál az s összeghez, akkor (2.6)-ból és (2.7)-ből a háromszög egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |a_{j,k}| &= |(a_{j,k} - s) - (a_{j-1,k} - s) - (a_{j,k-1} - s) + (s_{j-1,k-1} - s)| \leq \\ &\leq |s_{j,k} - s| + |s_{j-1,k} - s| + |s_{j,k-1} - s| + |s_{j-1,k-1} - s| < \varepsilon, \\ &\text{ha } \min\{j, k\} > \mu_0(\varepsilon/4). \end{aligned}$$

Mivel az így kapott egyenlőtlenségben ε tetszőleges pozitív szám lehet, ezzel belátuk, hogy

$$(2.8) \quad \lim_{j,k \rightarrow \infty} a_{j,k} = 0.$$

Szavakban megfogalmazva, hogy ha a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint konvergens, akkor az $a_{j,k}$ általános tagja Pringsheim szerint konvergál 0-hoz. Ez a feltétel csak szükséges feltétele, de nem elegendő feltétele a kettős sor Pringsheim szerinti konvergenciájának, amint ezt az alábbi 1. Példa mutatja.

1. Példa. Tekintsük azt a kettős sort, amelynek általános tagja

$$a_{j,k} := \begin{cases} \frac{1}{\max\{j,k\}+1}, & \text{ha } \min\{j,k\} = 0; \\ 0, & \text{ha } \min\{j,k\} \geq 1. \end{cases}$$

Ekkor a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint divergens, bár a (2.8) feltétel még abban az általánosabb formában is teljesül, amelyben $\max\{j,k\} \rightarrow \infty$.

A kettős sorokra vonatkozó *Cauchy-féle belső konvergenciakritériumot* a következőképpen fogalmazhatjuk meg. A (2.4) kettős sor akkor és csak akkor konvergál Pringsheim szerint, ha minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy (vö. (1.6)-tal)

$$(2.9) \quad |s_{m,n} - s_{m_1,n_1}| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \min\{m,n,m_1,n_1\} \geq \nu_0.$$

A kettős sorozatokhoz hasonlóan egy kettős sor akkor is konvergálhat Pringsheim szerint, ha tagjai összességükben nem korlátosak. Ennek megmutatására a (2.4) kettős sor $a_{j,k}$ tagjait a derékszögű koordinátarendszer első negyedében olyan elrendezésben adjuk meg (lásd a 2. Ábrán), hogy az általános $a_{j,k}$ tagjának számértékét azon egységnégyzetbe írjuk be, amelyben a balalsó csúcspont koordinátája éppen (j,k) . Ez összhangban van azzal, hogy az első j indexet már korábban is sorindexnek nevezzük, a második k indexet pedig oszlopindexnek.

$\vdots$						$\ddots$		$\vdots$							$\ddots$
$a_{5,0}$	$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$			-3	3	0	0	0	0	0	
$a_{4,0}$	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$			3	-3	0	0	0	0	0	
$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$			-2	2	0	0	0	0	0	
$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$			2	-2	0	0	0	0	0	
$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$			-1	1	-2	2	-3	3	0	
$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$	$a_{0,4}$	$a_{0,5}$	$\dots$		1	-1	2	-2	3	-3	$\dots$	

2. Ábra

A 2. Ábra jobboldali részéből látható, hogy a (2.4) kettős sor téglalap alakú $s_{m,n}$ részletösszegeire fennáll, hogy

$$s_{m,n} = 0, \quad \text{ha} \quad \min\{m,n\} \geq 1.$$

Most tehát a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint konvergál és összege $s = 0$, viszont

$$\sup_{j,k \geq 0} |a_{j,k}| = \infty.$$

Visszatérve a 2. Ábra baloldali részére, adott (2.4) kettős sor esetén tekinthetjük külön-külön az egyszerűes

$$(2.10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}, \quad \text{ahol } j = 0, 1, 2, \dots;$$

vízszintes részsorokat (angolul: row series), és az egyszerűes

$$(2.11) \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}, \quad \text{ahol } k = 0, 1, 2, \dots;$$

függőleges részsorokat (angolul: column series).

2. Példa. Tekintsük azt a (2.4) kettős sort, amelynek $a_{j,k}$ tagjait a 3. Ábrán tüntetjük fel. Nyilvánvaló, hogy mindegyik vízszintes és függőleges részsora konvergál 0-hoz. Viszont a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint divergál, mivel

$$s_{m,m} = \begin{cases} 1, & \text{ha } m \text{ páros szám;} \\ 0, & \text{ha } m \text{ páratlan szám;} \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$\vdots$						$\ddots$
0	0	0	0	-1	1	
0	0	0	0	1	-1	
0	0	-1	1	0	0	
0	0	1	-1	0	0	
-1	1	0	0	0	0	
1	-1	0	0	0	0	$\dots$

3. Ábra

A fordított eset is előfordulhat, amikor a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint konvergál, viszont mindegyik vízszintes és függőleges részsora divergál. Erre adunk példát a következőben.

3. Példa. Tekintsük azt a (2.4) kettős sort, amelynek $a_{j,k}$ tagjait a 4. Ábrán tüntetjük fel. Nyilvánvaló, hogy mindegyik vízszintes és függőleges részsora divergál. Másrészt, a téglalap alakú $s_{m,n}$ részletösszegekre fennáll, hogy

$$s_{m,n} = \begin{cases} \frac{2}{2+\min\{m,n\}}, & \text{ha } m \text{ és } n \text{ páros számok;} \\ 0, & \text{ha } m \text{ és } n \text{ közül legalább az egyik páratlan szám.} \end{cases}$$

Tehát most a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint konvergál és összege $s = 0$.

$\vdots$						$\ddots$
-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
-1	1	-1	1	-1	1	
1	-1	1	-1	1	-1	$\dots$

4. Ábra

A (2.4) kettős sor Pringsheim szerinti konvergenciájával kapcsolatban még egy észrevételt teszünk. Ha a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint konvergál az s összeghez, akkor (2.6)-ból következik (ahhoz hasonlóan, ahogyan fentebb az 1. Ábra alapján (2.8)-at levezettük), hogy tetszőleges pozitív ε számra

$$(2.12) \quad \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N a_{j,k} \right| = |s_{M,N} - s_{m-1,N} - s_{M,n-1} + s_{m-1,n-1}| < \varepsilon,$$

$$\text{ha } M \geq m \geq 0, \quad N \geq n \geq 0 \text{ és } \min\{m,n\} \geq \mu_0(\varepsilon/4) =: \mu_*,$$

kiegészítve azzal a megállapodással, hogy

$$(2.13) \quad s_{-1,n} = s_{m,-1} = s_{-1,-1} := 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Az 1. Példában szereplő kettős sor arra is például szolgál, hogy (2.12)-nek tetszőleges pozitív ε számra való fennállásából még nem következik, hogy a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint konvergál.

3. Valós kettős számsorok és számsorozatok reguláris konvergenciája

Az előző részben több példát is láttunk a kettős sorok Pringsheim szerinti konvergenciájával kapcsolatos hiányosságokra. Azon célból, hogy ezen hiányosságok felépését elkerüljük, Hardy angol matematikus (lásd [1]-et a cikkünk végén található Forrásmunkák jegyzékében) a kettős sorokra erősebb konvergencia fogalmat vezetett be, amelyet reguláris konvergenciának (angolul: regular convergence) nevezett el. Akkor mondjuk, hogy a (2.4) kettős sor *regulárisan konvergál*, ha Pringsheim szerint konvergál, és ezen felül még minden egyes vízszintes és függőleges részsora is (mint egyszeres sor) konvergál.

Ezt a konvergencia fogalmat a jelen cikk szerzője később újra felfedezte (lásd [3]-at a Forrásmunkák jegyzékében), és nem ismerve Hardy cikkét, ezt a konvergencia fogalmat ekvivalens feltételekkel definiálta és „megszorított értelemben vett konvergenciának” nevezte el (angolul: convergence in a restricted sense). Ez utóbbi konvergencia fogalom definíciója a következő. Akkor mondjuk, hogy a (2.4) kettős sor a *megszorított értelemben konvergál*, ha minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $\kappa_0 = \kappa_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(3.1) \quad \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N a_{j,k} \right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad M \geq m \geq 0; \quad N \geq n \geq 0 \text{ és } \max\{m, n\} \geq \kappa_0.$$

Ez az általunk bevezetett konvergencia fogalom lényegében Cauchy-típusú belső konvergenciakritérium, hiszen az ellenőrzéséhez nincs szükség a kettős sor s összegének az ismeretére. Érdeemes megjegyezni, hogy a (2.4) kettős sor Pringsheim szerinti konvergenciájából csak a (2.12) egyenlőtlenség következik. A (2.12) és (3.1) egyenlőtlenségek között az a lényeges különbség, hogy a szóbanforgó $\sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N a_{j,k}$ kettős összeg (m, n) alsó indexeire (2.12)-ben a „min”, míg (3.1)-ben a „max” szerepel.

Fentebb már említettük, hogy a Hardy által bevezetett reguláris konvergencia fogalom és a jelen cikk szerzője által bevezetett ún. megszorított értelemben vett konvergencia fogalom ekvivalens. Ezt bizonyítjuk a következő tételben.

2. Tétel. *A (2.4) kettős sor akkor és csak akkor konvergál regulárisan, ha a megszorított értelemben konvergál.*

Bizonyítás. Először azt tegyük fel, hogy a (2.4) kettős sor regulárisan konvergál. Egyrészt, ekkor (2.4) Pringsheim szerint konvergál. Így minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy $n_0(\varepsilon/4)$ természetes számot úgy, hogy (2.12) fennáll. Másrészt, a (2.4) kettős sor mindegyik vízszintes és függőleges részsora is konvergál.

Tekintsük a (2.10)-beli vízszintes részsorokat $j = 0, 1, 2, \dots, \mu_* - 1$ értékekre. Mivel ezek mindegyike konvergál és mivel véges sok konvergens sor *egyenletesen* is konvergál, ezért minden pozitív ε számhoz meg tudjuk adni az $\ell_1 = \ell_1(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(3.2) \quad \left| \sum_{k=n}^N a_{j,k} \right| < \varepsilon, \text{ ha } j = 0, 1, \dots, \mu_* - 1 \text{ és } N \geq n \geq \ell_1.$$

Ezután tekintsük a (2.1)-beli függőleges részsorokat $k = 0, 1, 2, \dots, \mu_* - 1$ értékekre. Hasonló megfontolással belátjuk, hogy minden pozitív ε számhoz meg tudjuk adni az $\ell_2 = \ell_2(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

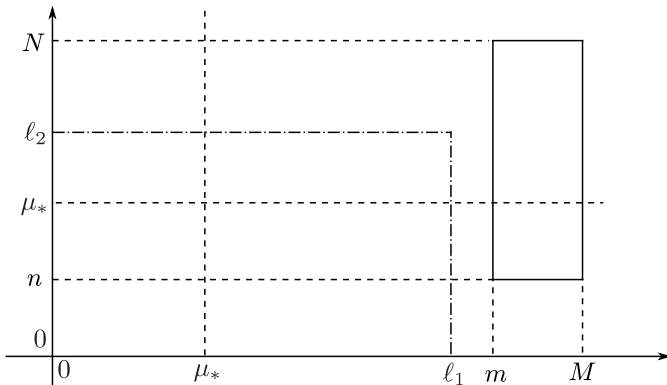
$$(3.3) \quad \left| \sum_{j=m}^M a_{j,k} \right| < \varepsilon, \text{ ha } k = 0, 1, 2, \dots, \mu_* - 1 \text{ és } M \geq m \geq \ell_2.$$

Ha a (2.12) és a most kapott (3.2) és (3.3) egyenlőtlenségeket összevetjük, az 5. Ábrán feltüntetett módon, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N a_{j,k} \right| < \varepsilon, \text{ ha } M \geq m \geq 0, N \geq n \geq 0$$

$$\text{és } \max\{m, n\} \geq \max\{\mu_*(\varepsilon/3), \ell_1(\varepsilon/3), \ell_2(\varepsilon/3)\} =: \kappa_0(\varepsilon).$$

A most nyert egyenlőtlenség megegyezik (3.1)-gyel. Tehát a (2.4) kettős sor a megszorított értelemben is konvergál.

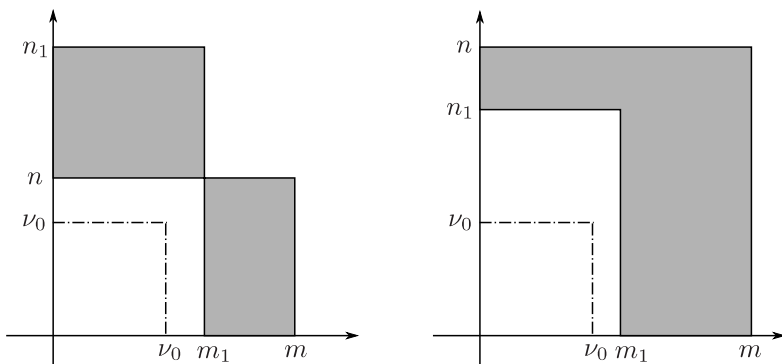


5. Ábra.

Másodszor azt bizonyítjuk, hogy ha a (2.4) kettős sor a megszorított értelemben konvergál, akkor regulárisan is konvergál. A 6. Ábrán jól látható, hogy (3.1)-ből mindkét esetben egyből következik, hogy

$$|s_{m,n} - s_{m_1,n_1}| < \varepsilon, \text{ ha } \min\{m, n, m_1, n_1\} > \kappa_0(\varepsilon/2) =: \nu_0(\varepsilon).$$

Ez az egyenlőtlenség pedig egybeesik (2.9)-cel. Tehát a (2.4) kettős sor Pringsheim szerint is konvergens.



6. Ábra.

Ha pedig (3.1)-ben $m = M$ és ezt a közös értéket j -vel jelöljük, akkor a (3.1)-beli egyenlőtlenség a következő alakú lesz:

$$\left| \sum_{k=n}^N a_{j,k} \right| < \varepsilon, \text{ ha } N \geq n \geq \kappa_0 \text{ és } j = 0, 1, 2, \dots,$$

ahol ε tetszőleges pozitív szám lehet. Tehát a (2.10)-beli vízszintes részsorok mindegyikére teljesül a Cauchy-féle belső konvergenciakritérium; így ezek mindegyike konvergens. A (2.11)-beli függőleges részsorok konvergenciáját hasonló módon láthatjuk be. Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha a (2.4) kettős sor a megszorított értelemben konvergál, akkor regulárisan is konvergál.

A továbbiakban a most bizonyított 2. Tétel alapján nem teszünk különbséget a Hardy által bevezetett reguláris konvergencia és az általunk bevezetett „megszorított értelemben vett konvergencia” között, és ezentúl csak a *reguláris konvergencia* megnevezést fogjuk használni.

Az egyszeres sorokhoz hasonlóan, a (2.4) kettős sort akkor nevezzük *abszolút*

konvergensnek, ha a tagjainak abszolút értékéből képzett

$$(3.4) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}|$$

sor konvergens akár Pringsheim szerint, akár regulárisan; mivel állandó előjelű sorokra ez a két konvergencia fogalom egybeesik. Ezt a kézenfekvő állítást bizonyítjuk a következő tételben, ahol $S_{m,n}$ -nel jelöljük (3.4) téglalap alakú részletösszegeit.

3. Tétel. *A (3.4) kettős sor akkor és csak akkor konvergál akár Pringsheim szerint, akár regulárisan, ha a négyzet alakú*

$$(3.5) \quad S_{m,m} := \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m |a_{j,k}|, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

részletösszegek egyszeres sorozata felülről korlátos. Ekkor a (3.4) kettős sor S összege a (3.5) sorozat szuprémuma. Képletben megfogalmazva:

$$(3.6) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| = S, \text{ ahol } S := \sup_{m \geq 0} |S_{m,m}|.$$

Bizonyítás. *Szükségesség.* Tegyük fel, hogy (3.4) Pringsheim szerint konvergál valamely $S \geq 0$ összeghez. Alkalmazzuk a (2.6) definíciót az $m = n$ és $\varepsilon := 1$ esetben. Ekkor kapjuk, hogy

$$S_{m,m} = (S_{m,m} - S) + S \leq |S_{m,m} - S| + S < 1 + S, \text{ ha } m > \mu_0(1).$$

Mivel a (3.5)-ben definiált $(S_{m,m})$ egyszeres sorozat monoton növekvő, ezért az előbb kapott egyenlőtlenség szerint felülről korlátos, ahogyan ezt a 3. Tételben állítottuk.

Elegendőség. Most azt tesszük fel, hogy a négyzet alakú részletösszegek $(S_{m,m})$ sorozata korlátos, és jelöljük S -sel ezeknek a szuprémumát. Jól ismert, hogy az S szuprémumot az alábbi két tulajdonsága jellemzi: egyrészt

$$(3.7) \quad S_{m,m} \leq S, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

másrészt, minden pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $m_1 = m_1(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(3.8) \quad S_{m_1, m_1} > S - \varepsilon.$$

Ezen két egyenlőtlenségből már következni fog, hogy a (3.4) kettős sor regulárisan konvergál, és ezért Pringsheim szerint is konvergál. Állításunk bizonyítását

a 7. Ábrán szemléltetjük. Adott $\varepsilon > 0$ esetén tekintsük az ábrán azt a négyzetet, amelynek csúcsai a

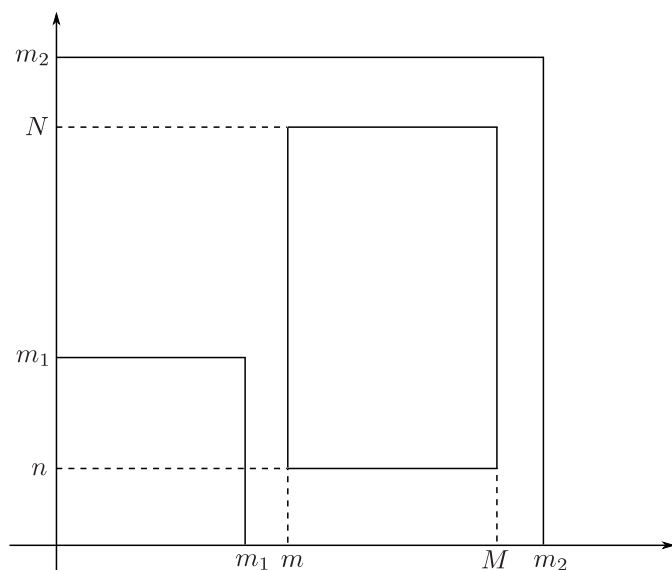
$$(3.9) \quad (0, 0), (m_1, 0), (m_1, m_1), (0, m_1)$$

pontokban vannak, ahol m_1 a (3.8) egyenlőtlenségben fordul elő. Ezután vegyünk fel tetszőlegesen egy téglalapot, amelynek nincs közös pontja az előbb definiált négyzettel, az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, és amelynek csúcspontjai az

$$(3.10) \quad (m, n), (M, n), (M, N), (m, N)$$

pontokban vannak. Végül vegyünk még fel egy olyan nagyobb négyzetet is, amelynek balalsó csúcspontja az origó, és amely mind a (3.9) csúcspontokkal rendelkező négyzetet, mind a (3.10) csúcspontokkal rendelkező téglalapot teljesen a belsejében tartalmazza. Ezen négyzet csúcspontjai legyenek

$$(0, 0), (m_2, 0), (m_2, m_2), (0, m_2).$$



7. Ábra.

Mivel a (3.4) kettős sor tagjai nemnegatívok, ezért (3.7)-ből és (3.8)-ból követ-

kezik, hogy

$$\sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |a_{j,k}| \leq S_{m_2, m_2} - S_{m_1, m_1} < S - (S - \varepsilon) = \varepsilon,$$

ha $M \geq m \geq 0$, $N \geq n \geq 0$ és $\max\{m, n\} \geq m_1$.

Tekintve, hogy itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ez a (3.4) kettős sor reguláris konvergenciáját bizonyítja.

Nyilvánvaló, hogy a (3.4) kettős sor tetszőleges téglalap alakú $S_{m,n}$ részletösszege sem lehet nagyobb, mint a négyzet alakú $S_{\max\{m,n\}, \max\{m,n\}}$ részletösszege; továbbá minden négyzet egyben téglalap is. Ezek következtében nyilvánvaló, hogy

$$\sup_{m,n \geq 0} S_{m,n} = \sup_{m \geq 0} S_{m,m} =: S.$$

Ebből és (3.8)-ból pedig következik, hogy

$$|S_{m,n} - S| = S - S_{m,n} \leq S - S_{m_1, m_1} < S - (S - \varepsilon) = \varepsilon, \text{ ha } \min(m, n) > m_1.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezzel azt is beláttuk, hogy ha a (3.4) kettős sor négyzet alapú részletösszegeinek sorozata korlátos, a (3.4) kettős sor összege ezen sorozat S szuprémuma, amint ezt (3.6)-ban állítottuk. Ezzel a 3. Tétel bizonyítását befejeztük.

A következő állítás a 3. Tétel alapján nyilvánvaló. Ha a (2.4) kettős sor tagjai nemnegatív valós számok, kivéve esetleg véges sok tagot, akkor (2.4) Pringsheim szerinti konvergenciája ekvivalens annak abszolút konvergenciájával, és következésképpen annak reguláris konvergenciájával is. Állításunk akkor is igaz, ha a (2.4) kettős sor tagjai nempozitív számok, kivéve esetleg véges sok tagot.

Összefoglalva, az eddigiekből nyilvánvaló, hogy ha a (2.4) kettős sor abszolút konvergens, akkor regulárisan is konvergens, hiszen (3.1) fennállása tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén triviálisan következik a (3.4) kettős sor konvergenciájából. Továbbá, a (2.4) kettős sor reguláris konvergenciájából egyből következik a Pringsheim szerinti konvergenciája. Viszont a fordított következtetés egyik esetben sem igaz. Van olyan (2.4) kettős sor, amely Pringsheim szerint konvergál, de regulárisan nem konvergál; és van olyan kettős sor is, amely regulárisan konvergál, de nem abszolút konvergens.

Végül áttérünk a kettős sorozatok reguláris konvergenciájának értelmezésére, amelyet a kettős sorok reguláris konvergenciájának (3.1)-ben adott definíciójából vezetünk le. Ezen célból definiáljuk a ∇_1 és ∇_2 visszafelé tartó differenciaoperátorokat (vö. (1.9)-cel). Tetszőleges $(a_{j,k} : j, k = 0, 1, 2, \dots)$ kettős sorozat esetén legyen

$$\nabla_1 a_{j,k} := a_{j,k} - a_{j-1,k} \quad \text{és} \quad \nabla_2 a_{j,k} := a_{j,k} - a_{j,k-1}$$

azzal a megállapodással, hogy

$$(3.11) \quad a_{-1,k} = a_{j,-1} = a_{-1,-1} := 0, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots$$

Tehát ∇_1 az $(a_{j,k})$ kettős sorozat első indexére, míg ∇_2 a második indexére vonatkozik. Ezek együttes alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_2 a_{j,k} &= \nabla_1 (\nabla_2 a_{j,k}) = \nabla_1 (a_{j,k} - a_{j,k-1}) = \\ &= a_{j,k} - a_{j-1,k} - a_{j,k-1} + a_{j-1,k-1}, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Tekintsük a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \nabla_1 \nabla_2 a_{j,k}$$

kettős sort. Egyszerű számolással kapjuk, hogy ezen kettős sor téglalap alakú részletösszege megegyezik a kiinduló kettős sorozat megfelelő tagjával:

$$s_{m,n} := \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \nabla_1 \nabla_2 a_{j,k} = \sum_{j=0}^m \nabla_1 a_{j,n} = a_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Hasonlóképpen adódik az is, hogy

$$\begin{aligned} s_{M,N} - s_{m-1,N} - s_{M,n-1} + s_{m-1,n-1} &= \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N \nabla_1 \nabla_2 a_{j,k} = \\ &= \sum_{j=m}^M \nabla_1 \left(\sum_{k=n}^N \nabla_2 a_{j,k} \right) = \sum_{j=m}^M \nabla_1 (a_{j,N} - a_{j,n-1}) = \\ &= a_{M,N} - a_{m-1,N} - a_{M,n-1} + a_{m-1,n-1}, \quad M \geq m \geq 0, \quad N \geq n \geq 0; \end{aligned}$$

ami teljes összhangban van (2.12)-vel. A következő definíciónkat éppen ez az összefüggés motiválja. Akkor mondjuk, hogy az $(a_{j,k})$ kettős sorozat *regulárisan konvergál*, ha tetszőleges pozitív ε számhoz meg tudunk adni egy az ε -tól függő $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$ természetes számot úgy, hogy

$$(3.12) \quad \begin{aligned} &|a_{M,N} - a_{m-1,N} - a_{M,n-1} + a_{m-1,n-1}| < \varepsilon, \\ &\text{ha } M \geq m \geq 0, \quad N \geq n \geq 0 \text{ és } \max\{m, n\} > \lambda_0, \end{aligned}$$

a (3.11) megállapodás figyelembevételével.

A kettős sorok esetéhez hasonlóan bizonyíthatjuk be, hogy ha az $(a_{j,k})$ kettős sorozat regulárisan konvergál, akkor Pringsheim szerint is konvergál; továbbá, minden rögzített $k = 0, 1, 2, \dots$ értékre az $(a_{j,k} : j = 0, 1, 2, \dots)$ egyszeres sorozat

is konvergál; és minden rögzített $j = 0, 1, 2, \dots$ értékre az $(a_{j,k} : k = 0, 1, 2, \dots)$ egyszeres sorozat is konvergál.

Ugyancsak a kettős sorok abszolút konvergenciájának definíciójával összhangban akkor mondjuk, hogy az $(a_{j,k})$ kettős sorozat *abszolút konvergens*, ha

$$(3.13) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\nabla_1 \nabla_2 a_{j,k}| = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k} - a_{j-1,k} - a_{j,k-1} + a_{j-1,k-1}| < \infty,$$

a (3.11) megállapodás figyelembevételével.

Nyilvánvaló, hogy ha az $(a_{j,k})$ kettős sorozat abszolút konvergens, akkor regulárisan is konvergens, hiszen (3.12) fennállása tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén triviálisan következik (3.13)-ból. Továbbá, az $(a_{j,k})$ reguláris konvergenciájából egyből következik a Pringsheim szerinti konvergenciája is. Viszont a fordított következtetés egyik esetben sem igaz. Van olyan $(a_{j,k})$ kettős sorozat, amely Pringsheim szerint konvergál, de regulárisan nem konvergál; és van olyan kettős sorozat is, amely regulárisan konvergál, de nem abszolút konvergens.

4. Regulárisan konvergens kettős sorok szukcesszív összegzése

Jól ismert, hogy ha a (2.4) kettős sor abszolút konvergens, akkor összegét az ún. *szukcesszív összegzéssel* (angolul: successive summation) is megkaphatjuk. Ezen a kettős sor vízszintes és függőleges sorainak egymást követő összegzéseit értjük, képletben:

$$(4.1) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} =: s,$$

ahol s a kettős sor Pringsheim összege.

Azt alábbi 4. Tételben azt bizonyítjuk, hogy szukcesszív összegzéssel még azon kettős sorok összegét is megkaphatjuk, amelyek csak regulárisan (de nem abszolút) konvergenssek.

4. Tétel. *Ha a (2.4) kettős sor regulárisan konvergál, akkor a (4.1) összefüggés fennáll.*

A (4.1) képletet úgy is felfoghatjuk, mint a Lebesgue szerint integrálható kétváltozós függvények integrálásának kiszámítására vonatkozó *Fubini tétel* (lásd például a Forrásmunkák [6] könyvében) *diszkrét változatát*.

A bizonyítás előtt még azt jegyezzük meg, hogy azon kettős sorok esetében, amelyek csak Pringsheim szerint (de nem regulárisan) konvergenssek, a (4.1) összefüggés

már csak azért sem állhat fenn általában, mivel a Pringsheim szerinti konvergencia nem feltétlenül biztosítja az adott kettős sor vízszintes és függőleges részsorainak a közönséges értelemben vett konvergenciáját (lásd a 3. Példát a 2. Részben).

A 4. Tétel bizonyítása. Feltevésünk szerint a (2.4) kettős sor regulárisan konvergál. Ezért Pringsheim szerint is konvergál, és mindegyik vízszintes és függőleges részsora is konvergens. Jelöljük s -sel a (2.4) kettős sor összegét és jelöljük v_j -vel a j -edik vízszintes részsorának (v.ö. (2.10)-zel) az összegét; képletben:

$$(4.2) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = s \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = v_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

A reguláris konvergenciát definiáló (3.1) egyenlőtlenséget az $m = 0$ és $M := m$ alakban felírva látjuk, hogy

$$\left| \sum_{j=0}^m \sum_{k=n}^N a_{j,k} \right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad N \geq n \geq \kappa_0 \quad \text{és} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Ebből az $N \rightarrow \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$(4.3) \quad \left| \sum_{j=0}^m \sum_{k=n}^{\infty} a_{j,k} \right| \leq \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n \geq \kappa_0 \quad \text{és} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

A (4.2)-beli második egyenlőtlenséget átírhatjuk a

$$(4.4) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{j,k} = v_j - \sum_{k=0}^n a_{j,k}, \quad j, n = 0, 1, 2, \dots$$

alakba. Az adott kettős sor téglalap alakú részletösszegét $s_{m,n}$ -nel jelölve, (4.3)-ból és (4.4)-ből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^m v_j - s_{m,n} \right| &= \left| \sum_{j=0}^m v_j - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{j,k} \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^m \left(v_j - \sum_{k=0}^n a_{j,k} \right) \right| = \left| \sum_{j=0}^m \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{j,k} \right| \leq \varepsilon, \\ &\quad \text{ha} \quad n \geq \kappa_0 \quad \text{és} \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ha a most nyert egyenlőtlenséget összevetjük a (2.6)-beli egyenlőtlenséggel, akkor

a háromszög egyenlőtlenség alkalmazásával az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^m v_j - s \right| &= \left| \left(\sum_{j=0}^m v_j - s_{m,n} \right) + (s_{m,n} - s) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{j=0}^m v_j - s_{m,n} \right| + |s_{m,n} - s| < \varepsilon, \\ &\text{ha } \min\{m, n\} \geq \max\{\mu_0(\varepsilon/2), \kappa_0(\varepsilon/2)\}. \end{aligned}$$

Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám lehet, ezzel az első egyenlőtlenség fennállását (4.1)-ben bebizonyítottuk.

A (4.1)-beli második egyenlőség fennállását hasonló módon bizonyíthatjuk be. Ennek végiggondolását az olvasóra bízuk.

A következő tételben a 4. Tétel megfelelőjét fogalmazzuk meg a regulárisan konvergens $(a_{j,k} : j, k = 0, 1, 2, \dots)$ kettős sorozatokra.

5. Tétel. *Ha az $(a_{j,k})$ kettős sorozat regulárisan konvergál, akkor annak az a határértékét úgy is megkaphatjuk, hogy először meghatározzuk az $(a_{j,k} : k = 0, 1, 2, \dots)$ egyszeres sorozatok ℓ_j határértékeit, majd ezután meghatározzuk az így kapott $(\ell_j : j = 0, 1, 2, \dots)$ egyszeres sorozat határértékét, amely a -val egyezik meg. Hasonló állítás érvényes akkor is, ha a j és k indexek szerepét felcseréljük. Képletben megfogalmazva:*

$$(4.5) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} (\lim_{k \rightarrow \infty} a_{j,k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lim_{j \rightarrow \infty} a_{j,k}) = \lim_{j, k \rightarrow \infty} a_{j,k} =: a.$$

Bizonyítás. A (4.5) összefüggés fennállását a már bizonyított (4.1) összefüggésre vezetjük vissza a 3. részben bevezetett ∇_1 és ∇_2 differenciaoperátorok és az azokra megállapított összefüggések segítségével. A részletek végiggondolását az olvasóra bízuk.

Az 5. Tétel triviális korolláriumaként adódik, hogy ha az $(a_{j,k})$ kettős sorozat abszolút konvergál, akkor arra a (4.5) összefüggés fennáll.

Befejező megjegyzés. Bár dolgozatunk teljes terjedelmében csak valós számokból álló közönséges sorozatok és sorok, kettős sorok és sorozatok konvergenciájával kapcsolatos kérdéseket vizsgáltunk, de mindhárom konvergencia fogalom változtatás nélkül alkalmazható komplex számokból álló közönséges sorozatok és sorok, kettős sorok és sorozatok esetében is. A dolgozatunkban kimondott és bizonyított öt tétel mindegyike bizonyításával együtt érvényes marad akkor is, ha a sorozatok és sorok tagjai nem valós, hanem komplex számok.

Forrásmunkák

- [1] G.H. Hardy, On the convergence of certain multiple series, Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, 19(1916–19), 86–95.
- [2] Leindler László, Analízis, Polygon, Szeged, 2001.
- [3] F. Móricz, On the convergence in a restricted sense of multiple series, Analysis Mathematica, 5(1979), 135–147.
- [4] Móricz Ferenc, Bevezetés a numerikus matematikába, Polygon, Szeged, 2008.
- [5] A. Pringsheim, Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, Mathematische Annalen, 53(1900), 289–321.
- [6] Szőkefalvi-Nagy Béla, Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

*Móricz Ferenc, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.,
moricz@math.u-szeged.hu*

