

A transzfinit átmérő

TOTIK VILMOS*

1923-ban, egy számelméleti problémával kapcsolatban vezette be Fekete Mihály [2] a transzfinit átmérő fogalmát, amely később más területeken (analízis, geometria) is alkalmazásra talált, és máig jelentőséggel bír. Dolgozatunkban ezt a magyar „találmányt” ismertetjük röviden. Az érdeklődő olvasó a dolgozat végén szereplő feladatokon keresztül behatóbban is megismerkedhet a témával, illetve az [1], [5] és [9] könyvekben további részleteket találhat.

Fekete Mihály Zentán született 1886-ban. 1909-ben Budapesten doktorált, ezután Göttingában tanult, majd Budapesten egyetemen, ill. különböző középiskolákban tanított, többek között a fiatal Neumann Jánossal is foglalkozott. 1928-ban emigrált, és a jeruzsálemi Hebrew egyetem (ma a világ egyik vezető egyeteme) egyik első matematikaprofesszora, később a matematikai intézet vezetője, az egyetem dékánja, majd rektora lett. Elsősorban komplex függvénytanal és approximációelmélettel foglalkozott. Jeruzsálemben halt meg 1958-ban.

1. A transzfinit átmérő

Legyen K egy korlátos és zárt halmaz a térben, és jelölje $d(P, Q)$ két térbeli pont távolságát. Egy adott n természetes számra n olyan pontot szeretnénk választani K -ból, amelyek a lehető legtávolabb vannak egymástól abban az értelemben, hogy a távolságuk szorzata a lehető legnagyobb, tehát maximalizálni szeretnénk a $\prod_{i \neq j} d(P_i, P_j)$ szorzatot azon feltétel mellett, hogy a $P_1, \dots, P_n$ pontok mind K -beliek. Legyen $\delta_n(K)$ a fenti szorzatok maximuma (megmutatható, hogy a maximum felvétetik):

$$(1) \quad \delta_n(K) = \max \left\{ \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} d(P_i, P_j) \mid P_1, \dots, P_n \in K \right\}.$$

*A dolgozat a European Research Council Advanced Grant No. 267055 támogatásával készült.

Ha $P_1, \dots, P_n \in K$ extrémális, azaz a P_i -k közötti távolságok szorzata $\delta_n(K)$, akkor a $P_1, \dots, P_n$ pontokat Fekete-pontoknak nevezzük (pontosabban, $\{P_1, \dots, P_n\}$ egy n pontú Fekete-pontrendszert alkot). Ilyen extrémális rendszer több is lehet (pl. kör vagy gömb esetén).

Ha $P_1, \dots, P_{n+1}$ tetszőleges $(n+1)$ darab K -beli pont, és kihagyjuk a k -adik pontot (valamely $1 \leq k \leq n+1$ -ra), akkor egy olyan n elemű K -beli pontrendszert kapunk, amelyre az összes távolság szorzata legfeljebb $\delta_n(K)$, azaz

$$\prod_{1 \leq i \neq j \leq n+1, i, j \neq k} d(P_i, P_j) \leq \delta_n(K).$$

Szorozzuk össze az így kapott egyenlőtlenségeket $k = 1, 2, \dots, n+1$ -re! Egy $d(P_i, P_j)$ távolság a bal oldalon $(n-1)$ -szer fog szerepelni, ezért

$$\left(\prod_{1 \leq i \neq j \leq n+1} d(P_i, P_j) \right)^{n-1} \leq \delta_n(K)^{n+1}.$$

Ha itt most a bal oldal maximumát vesszük minden $P_1, \dots, P_{n+1} \in K$ esetére,

$$(2) \quad \delta_{n+1}(K)^{n-1} \leq \delta_n(K)^{n+1}$$

adódik. Mivel a $\delta_n(K)$ -t definiáló (1) szorzatban $n(n-1)$ tényező szerepel, célszerű δ_n -et úgy normálni, hogy az $n(n-1)$ -edik gyökét vesszük. (2) szerint

$$\delta_{n+1}(K)^{1/n(n+1)} \leq \delta_n(K)^{1/n(n-1)},$$

azaz a $\{\delta_n(K)^{1/n(n-1)}\}$ nemnegatív sorozat csökken, ezért létezik határértéke, amit $\delta(K)$ -val jelölünk:

$$(3) \quad \delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(K)^{1/n(n-1)}.$$

$\delta(K)$ -t a K halmaz transzfinit átmérőjének nevezzük.

Halmazok transzfinit átmérőjének meghatározása messze nem triviális feladat, és általában még nehezebb egy adott n -re $\delta_n(K)$ értékének kiszámítása. Például gömbre $\delta_n(K)$ értéke nem ismert semmilyen $n > 5$ esetén. A dolgozat 3. és 4. részeiben megadjuk körök/körlapok, illetve szakaszok transzfinit átmérőjét.

Bár a fenti definíciót a térben mondtuk ki (tulajdonképpen akárhány dimenziós térben kimondható), a transzfinit átmérő jelentősége síkbeli halmazokra mutatkozik, így a továbbiakban mindig síkbeli halmazokkal fogunk foglalkozni. A síkot tekinthetjük a komplex síknak, és P_i helyett z_i -t, $d(P_i, P_j)$ helyett $|z_i - z_j|$ -t fogunk írni, tehát ekkor a transzfinit átmérőben szereplő szorzat a $\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} |z_i - z_j|$

alakot ölti, ahol $z_1, \dots, z_n \in K$. Könnyen látható, hogy ez még a

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \right)^2$$

alakban is írható.

2. Polinomok diszkrimánása és algebrai számok

Fekete a transzfinit átmérőt Schur [7] alább részletezendő számelméleti problémájával kapcsolatban vezette be. Hogy a gondolatmenetét megértsük, először polinomok diszkriminánsáról kell beszélnünk.

A már középiskolában bevezetett terminológia szerint az $ax^2 + bx + c$ polinom (vagy az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet) diszkriminánása $b^2 - 4ac$. Ez mutatja meg, hogy a polinom zérushelyei egyszeresek-e: e polinom két zérushelye pontosan akkor esik egybe, ha a diszkriminánása 0.

Magasabb fokú $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, polinomoknál is van hasonló fogalom: P_n diszkriminánása, $D(P_n)$ az alábbi determináns értéke osztva $(-1)^{n(n-1)/2} a_n$ -el:

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

Ebben a $(2n-1) \times (2n-1)$ méretű determinánsban az első $n-1$ sort úgy kapjuk, hogy az i -edik sorban a polinom együtthatói állnak $i-1$ egységgel jobbra tolvá (minden más elem 0), míg az utolsó n sor képzése hasonló, csak oda a polinom deriváltjának együtthatóit írjuk. Vegyük észre, hogy a determináns első oszlopából kiemelhető az a_n szám, ezért ha a polinom együtthatói egész számok, akkor a diszkrimináns egész szám. Ezt az alábbiakban lényegesen fel fogjuk használni.

Igazolható, hogy ha $z_1, \dots, z_n$ a polinom zérushelyei, akkor

$$D(P_n) = (-1)^{n(n-1)/2} a_n^{2n-2} \prod_{i \neq j} (z_i - z_j),$$

amiből azonnal következik, hogy a polinomnak akkor és csakis akkor van többszörös zérushelye, ha a diszkriminánása 0.

Egész együtthatós polinomok zérushelyeit nevezzük algebrai számoknak. Ha α algebrai, akkor van egy legkisebb fokszámú egész együtthatós $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, polinom, amelyre $P_n(\alpha) = 0$. Ha feltesszük, hogy $a_n > 0$, és P_n együtthatóinak 1 a legnagyobb közös osztója, akkor P_n egyértelműen meghatározott, ezt nevezzük az α minimálpolinomjának. A P_n fokszámát nevezzük az α szám fokának, és P_n zérushelyeit nevezzük az α algebrai konjugáltjainak. Pl. minden $\alpha = b/a$ racionális szám (ahol a és b relatív prímek) algebrai, és a legkisebb fokú polinom amelynek α zérushelye nyilván $ax - b$. Itt az a főegyüttható az α nevezője, és ennek analógiájára, ha az α algebrai szám minimálpolinomja $P_n(x) = a_n x^n + \dots$, akkor nevezzük a_n -et az α nevezőjének. Az 1 nevezőjű algebrai számokat algebrai egészeknek hívjuk (ezeknél tehát a minimálpolinomban 1 a főegyüttható).

Mármost Fekete az alábbi problémát vizsgálta: ha adott egy K korlátos zárt halmaz a síkon, és egy a természetes szám, akkor hány olyan (akárhányadfokú) a nevezőjű algebrai szám van K -ban, amelynek összes konjugáltja is K -ba tartozik. Fekete tétele szerint ha a halmaz transzfinit átmérője egynél kisebb, akkor csak véges sok ilyen algebrai számot tartalmazhat (korábban ezt Schur egynél kisebb átmérőjű körlapra, illetve 4-nél rövidebb szakaszra igazolta). Ezt igazolandó, először is jegyezzük meg, hogy egy adott fokszámra K biztosan csak véges sok ilyen algebrai számot tartalmaz (ld. a 8. feladatot a dolgozat végén). Ha tehát végtelen sok fenti tulajdonsággal rendelkező algebrai szám van K -ban, akkor azok fokszáma a végtelenhez tart. Legyen α egy ilyen K -beli algebrai szám, és $P_n(z) = az^n + \dots$ a minimálpolinomja. Könnyen látható, hogy P_n -nek nem lehet többszörös zérushelye (ugyanis akkor P_n és P'_n legnagyobb közös osztója nem konstans, így P_n -et azzal leosztva egy olyan egész együtthatós polinomot kaphatnánk, amely eltűnik α -ban, és n -nél kisebb fokszámú). Tehát P_n diszkriminánsa $D(P_n)$ egész szám és nem nulla, ezért $|D(P_n)| \geq 1$. Ha $z_1, \dots, z_n$ a P_n zérushelyei (mind K -beliek a feltevés szerint), akkor az előbbi reláció azt mondja, hogy

$$a^{2n-2} \prod_{i \neq j} |z_i - z_j| \geq 1.$$

Tehát $\delta_n(K)$ definíciója alapján $\delta_n(K) \geq 1/a^{2n-2}$, és így

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(K)^{1/n(n-1)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 1/a^{2/n} = 1,$$

ami ellentmond a feltételnek, hogy $\delta(K) < 1$.

Jegyezzük még meg, hogy a Schur-Fekete-probléma 1-nél nagyobb transzfinit átmérőjű halmazokra meglehetősen nehéz. Fekete és Szegő [3] igazolták, hogy ha egy halmaz a belsejében tartalmaz egy 1-nél nagyobb transzfinit átmérőjű, a számegyenesre szimmetrikus zárt halmazt, akkor végtelen sok algebrai egész tartalmaz

amelyeknek minden konjugáltja is a halmazban van. Robinson [6] pedig azt mutatta meg, hogy ugyanez igaz a számegegyenes bármely 1-nél nagyobb transzfinit átmérőjű halmazára.

3. Körök transzfinit átmérője

Legyen C_1 az origó középpontú egységsugarú kör. C_1 transzfinit átmérőjét két módon is ki fogjuk számítani, az egyik teljesen elemi, a másik viszont azt is adni fogja, hogy nemcsak C_1 transzfinit átmérője 1, de ugyanez igaz az egységkör lap transzfinit átmérőjére is (bár ez elemi megfontolással is könnyen látható).

Az első módszer a [4] dolgozat gondolatmenetét követi. Legyen $z_1, z_2, \dots, z_n \in C_1$ egy n pontú Fekete-pontrendszer a C_1 -re vonatkozóan, amelyre tehát

$$\delta_n(C_1)^{1/2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|$$

maximális. Nyilvánvaló, hogy ezen pontrendszer tetszőleges elforgatottja is Fekete-pontrendszer, ezért feltehetjük, hogy $z_1 = 1$, és hogy a $z_1, z_2, \dots, z_n$ pontok a körön az óramutató járásával ellenkező irányban követik egymást. Legyen az $1z_j$ húr középponti szöge $2\alpha_j$. Ekkor $\alpha_1 = 0$, $\alpha_j \in [0, \pi)$, és a $z_i z_j$, $i < j$, húr hossza $2 \sin(\alpha_j - \alpha_i)$. Tehát

$$\delta_n(C_1)^{1/2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| = \prod_{i < j} 2 \sin(\alpha_j - \alpha_i).$$

Megmutatjuk, hogy nincs más n pontú Fekete-rendszer amelynek egyik pontja 1. Valóban, tegyük fel, hogy $z_1^*, \dots, z_n^*$ egy másik Fekete-rendszer amelyre $z_1^* = 1$ és a $z_1^*, \dots, z_n^*$ pontok az óramutató járásával ellenkező irányban követik egymást. Legyen az $1z_j^*$ húr középponti szöge $2\beta_j$, amivel tehát $\beta_1 = 0$, $\beta_j \in [0, \pi)$, és

$$\delta_n(C_1)^{1/2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i^* - z_j^*| = \prod_{i < j} 2 \sin(\beta_j - \beta_i).$$

Az utóbbi két szorzat-formulát összeszorozva kapjuk, hogy

$$\delta_n(C_1) = \prod_{i < j} 2^2 \sin(\alpha_j - \alpha_i) \sin(\beta_j - \beta_i).$$

Most felhasználjuk, hogy ha $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, akkor

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \leq \frac{1}{2} (1 - \cos(\alpha + \beta)) = \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2},$$

és itt egyenlőség csak az $\alpha = \beta$ esetben állhat fenn. Tehát

$$\delta_n(C_1) \leq \prod_{i < j} 2^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha_j + \beta_j}{2} - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right) = \left(\prod_{i < j} 2 \sin \left(\frac{\alpha_j + \beta_j}{2} - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right) \right)^2,$$

és egyenlőség csak az $\alpha_j = \beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ esetben áll fenn. De ez azt jelenti, hogy ha $Z_j \in C_1$ az a pont az egységkörön, amelyre az $1Z_j$ húr középponti szöge $(\alpha_j + \beta_j)/2$, akkor $Z_0 = 1$ és

$$(4) \quad \delta_n(C_1)^{1/2} < \prod_{1 \leq i < j \leq n} |Z_i - Z_j|,$$

hacsak nem $\alpha_j = \beta_j$ minden j -re. De (4) lehetetlen a $\delta_n(C_1)$ definíciója miatt, így $\alpha_j = \beta_j$ kell, hogy legyen minden j -re, ami adja az egyértelműséget.

Az egyértelműségből következik, hogy $z_1, \dots, z_n$ egy szabályos n -szög csúcsait alkotják. Valóban, ha a $\{z_1, \dots, z_n\}$ pontrendszert elforgatjuk α_1 szöggel az óramutató járásával megegyező irányban, akkor a z_2 elforgatottja kerül az 1 pontba, és mivel az olyan Fekete-rendszerek egyértelműek, amelyek tartalmazzák az 1 pontot, azt kapjuk, hogy ezzel az elforgatással a $z_1, \dots, z_n$ rendszer önmagába megy át, ami igazolja, hogy ezek a pontok egy szabályos n -szög csúcsait alkotják.

Most már könnyen kiszámolhatjuk a $\delta_n(C_1)$ mennyiséget, hiszen az nem más, mint az egységkörbe írt szabályos n -szög átlói hosszának szorzata (a sokszög oldalait is átlónak nevezve). Ha a szabályos n -szög csúcsai a $z_1, \dots, z_n$ pontok mint az előbb, akkor ezek az n -edik egységgyökök, azaz a $z^n = 1$ egyenlet megoldásai. Az 1 pontból kiinduló átlók hosszának szorzata

$$\prod_{2 \leq j \leq n} |1 - z_j| = \left| \prod_{2 \leq j \leq n} (1 - z_j) \right|$$

és vegyük észre, hogy $z_1 = 1$ miatt a jobb oldalon a $\prod_{1 \leq j \leq n} (z - z_j) = z^n - 1$ polinom deriváltjának az 1 helyen felvett értéke szerepel, tehát a jobb oldal pontosan n . Persze ugyanez lesz bármely más pontból húzott átlók hosszának szorzatára is, így

$$\delta_n(C_1) = \prod_{i \neq j} |z_i - z_j| = n^n.$$

Ha itt most $n(n-1)$ -edik gyököt vonunk és n -et tartatjuk a végtelenbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$\delta(C_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(C_1)^{1/n(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n-1} = 1,$$

azaz az egységkör transzfinit átmérője 1. Ebből nagyítással azonnal adódik, hogy egy R sugarú kör transzfinit átmérője R .

A második megoldásban célszerű C_1 -re úgy tekinteni, mint azon komplex számok halmazára, amelyek abszolút értéke 1: $C_1 = \{z \mid |z| = 1\}$. A következőkben Pólya György gondolatmenetével fogjuk kiszámolni C_1 transzfinit átmérőjét. Ismét elegendő azt igazoljuk, hogy $\delta_n(C_1) = n^n$.

Tekintsük a $z_1, \dots, z_n$ n -edik egységgyököket, amelyek tehát a $z^n = 1$ egyenlet megoldásai. Az előző megoldás utolsó részében kiszámoltuk, hogy

$$\prod_{i \neq j} |z_i - z_j| = n^n,$$

tehát $\delta_n(C_1)$ is legalább ennyi: $\delta_n(C_1) \geq n^n$.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához legyenek $z_1, \dots, z_n \in C_1$ tetszőlegesek. A $\prod_{j < i} (z_i - z_j)$ szorzat a

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Vandermonde-determináns értéke. Hadamard determinánsokra vonatkozó egyenlőtlensége azt mondja ki, hogy ha $\Delta = |a_{ij}|_{i,j=1}^n$ tetszőleges (komplex) számokból álló determináns, akkor az értéke abszolút értékben legfeljebb akkora, mint a sorában álló vektorok hosszának szorzata:

$$|\Delta| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Mivel minden z_j -re és k -ra $|z_i^k| = 1$, azt kapjuk, hogy a fenti determinánsban a sorvektorok hossza $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n |z_i^j|^2} = \sqrt{n},$$

és így az eddigiekből

$$\left| \prod_{j < i} (z_i - z_j) \right| \leq (\sqrt{n})^n$$

adódik. A bal oldal négyzetének maximuma $\delta_n(C_1)$, amivel kapjuk, hogy $\delta_n(C_1) \leq n^n$.

Ezzel ismét igazoltuk, hogy

$$\delta_n(C_1) = n^n.$$

Ha D_1 a zárt egységkörlap, akkor ugyanez a bizonyítás adja, hogy

$$\delta_n(D_1) = \delta_n(C_1) = n^n,$$

csak annyit kell módosítani, hogy $z_1, \dots, z_n \in D_1$ esetén

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n |z_i^j|^2} \leq \sqrt{n}.$$

A fentiek mutatják, hogy az n -edik egységgyökök egy n elemű Fekete-halmazt alkotnak (azaz rájuk $\prod_{i \neq j} |z_i - z_j|$ maximális), és tulajdonképpen csak ez az egyedi extrémális halmaz, nevezetesen ha $\prod_{i \neq j} |z_i - z_j|$ maximális, akkor $z_1, \dots, z_n$ egy, az egységkörbe írt szabályos n -szög csúcsait adják.

Igazoltuk tehát, hogy egy R sugarú kör vagy körlap transzfinit átmérője R . Ez speciális esete az ellipszisnek: ha K ellipszis, amelynek féltengelyeinek hossza a és b , akkor $\delta(K) = (a + b)/2$.

4. Szakaszok transzfinit átmérője

A $[-1, 1]$ szakaszra a δ_n értékét Stieltjes határozta meg 1885-ben (egy más kérdés kapcsán). Tétele szerint

$$(6) \quad \delta_n([-1, 1]) = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot (n-2)^{n-2}}{3^3 5^5 \cdot \dots \cdot (2n-3)^{2n-3}},$$

és egy adott n -re a Fekete-pontok egyértelműen meghatározottak, azaz minden n -re csak egyetlen extrémális ponthalmaz van, amelyre $\prod_{i \neq j} |z_i - z_j|$ maximális. Ezt úgy kapjuk meg, hogy az $n-2$ fokszámú ún. $(1, 1)$ paraméterű Jacobi polinom zérushelyeihez hozzávesszük a ± 1 pontokat. Az $(1, 1)$ paraméterű Jacobi polinomok azok a $p_k(x) = x^k + \dots$, $k = 0, 1, \dots$ polinomok, amelyekre igaz, hogy

$$\int_{-1}^1 p_k(x) p_l(x) (1-x^2) dx = 0$$

ha $k \neq l$. Könnyű megmutatni, hogy ez a feltétel egyértelműen definiálja a p_k polinomokat.

Hogy a transzfinit átmérőt meghatározhassuk, vegyük észre, hogy (6)-ból következik, hogy

$$\left(\frac{\delta_n([-1, 1])}{\delta_{n-1}([-1, 1])} \right)^{1/n} = \left(\frac{n^n \cdot (n-2)^{n-2}}{(2n-3)^{2n-3}} \right)^{1/n} \rightarrow \frac{1}{4},$$

ami alapján egyszerű megfontolással kapható (ld. a 13. feladatot a dolgozat végén), hogy

$$\delta([-1, 1]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n([-1, 1])^{1/n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Ebből végül nagytással adódik, hogy egy tetszőleges l hosszú szakasz transzfinit átmérője $l/4$.

5. A Csebisev-szám

P. L. Csebisev orosz matematikus az 1860-as években egy mechanikai feladat során jutott el a következő problémához: mennyire jól lehet a $[-1, 1]$ intervallumon megközelíteni az x^3 függvényt legfeljebb másodfokú polinomokkal? Mindjárt teljes általánosságban megoldotta kérdést: egy tetszőleges n természetes számra mi az x^n lehető legjobb megközelítése kisebb fokszámú polinomokkal? Ha P_{n-1} tetszőleges polinom, akkor az x^n vele való közelítésének hibáját

$$(7) \quad \|x^n - P_{n-1}(x)\|_{[-1, 1]}$$

méri, ahol bármely K korlátos zárt halmazra

$$\|f\|_K = \|f(x)\|_K = \max_{x \in K} |f(x)|$$

az ún. maximum normája egy f folytonos függvénynek. Csebisev problémája tehát az, hogy minimalizáljuk a (7) normát az összes P_{n-1} legfeljebb $(n-1)$ -ed fokú polinomra. Ha P_{n-1} befutja a legfeljebb $(n-1)$ -ed fokú polinomok halmazát, akkor $x^n - P_{n-1}(x)$ befutja az összes 1 főegyütthatójú n -ed fokú polinomok halmazát, így Csebisev feladata így írható: mi az $\|x^n + \dots\|_{[-1, 1]}$ minimuma ha a minimumot az összes 1 főegyütthatójú n -ed fokú polinomra vesszük? Csebisev azt igazolta, hogy ez a minimum 2^{1-n} , és az ezt elérő polinom a $\cos(\arccos x)/2^{n-1}$ ún. Csebisev polinom (ld. a 16. feladatot).

A Csebisev-problémát bármely síkbeli K halmazra megfogalmazhatjuk: mi a

$$t_n(K) = \min \|z^n + \dots\|_K$$

értéke, ahol a minimumot az összes, 1 főegyütthatójú, n -ed fokú polinomra vesszük.

Ha $T_n(z) = z^n + \dots$ egy extrémális polinom, amelyre tehát a $\|T_n\|_K$ norma minimális – ezt K Csebisev polinomjának is nevezik –, akkor világos, hogy $T_n(z)T_m(z) = z^{n+m} + \dots$ normája legalább $t_{n+m}(K)$. Másrésztől $\|T_n T_m\|_K \leq \|T_n\|_K \|T_m\|_K$, így kapjuk, hogy $t_{n+m}(K) \leq t_n(K)t_m(K)$. Tehát az $a_n = \log t_n(K)$ sorozat teljesíti az $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ tulajdonságot, amiből elemien levezethető (ld. a 14. feladatot), hogy az $\{a_n/n\}$ sorozat konvergál (vagy egy valós számhoz, vagy $-\infty$ -hez). Tehát $\{t_n(K)^{1/n}\}$ konvergens sorozat, és ha a határértékét $t(K)$ -val jelöljük, akkor ez a $t(K)$ a K halmaz ún. Csebisev-száma:

$$(8) \quad t(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(K)^{1/n}.$$

Mármost Fekete egy szép tétele szerint a transzfinit átmérő és a Csebisev-szám ugyanaz bármely síkbeli korlátos és zárt K halmazra:

$$(9) \quad t(K) = \delta(K).$$

Hogy ezt igazoljuk, legyenek $z_1, \dots, z_n \in K$ Fekete-pontok egy adott n -re, amelyekre tehát a $\prod_{i \neq j} |z_i - z_j|$ szorzat maximális, értéke $\delta_n(K)$. Ha $z \in K$ egy további K -beli pont, akkor a $z, z_1, \dots, z_n$ egy $(n+1)$ elemű rendszer K -ból, amelyre a pontok távolságának szorzata a $z_1, \dots, z_n$ választása miatt $\delta_n(K)|z - z_1|^2 \dots |z - z_n|^2$, és ez a $\delta_{n+1}(K)$ definíciója miatt legfeljebb $\delta_{n+1}(K)$. Az adódik, hogy bármely $z \in K$ -ra

$$|z - z_1|^2 \dots |z - z_n|^2 \leq \frac{\delta_{n+1}(K)}{\delta_n(K)},$$

azaz a $P_n(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n)$ polinom K -n vett normája legfeljebb $(\delta_{n+1}(K)/\delta_n(K))^{1/2}$. Ezért

$$(10) \quad t_n(K) \leq \frac{\delta_{n+1}(K)^{1/2}}{\delta_n(K)^{1/2}}.$$

Egy fordított irányú egyenlőtlenséghez legyen $T_{n-1}(z) = z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} \dots + a_0$ a K $(n-1)$ -ed fokú Csebisev polinomja, amelyre tehát $\|T_{n-1}\|_K$ minimális, és legyenek $z_1, \dots, z_n$ Fekete-pontok K -ból. Az (5) Vandermonde-determinánsban, ha az i -edik oszlop a_i -szeresét hozzáadjuk az utolsó oszlophoz, akkor az utolsó oszlop elemei a $T_{n-1}(z_j)$ számok lesznek, azaz

$$\delta_n(K)^{1/2} = (5) \text{ abszolút értéke} = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & T_{n-1}(z_1) \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & T_{n-1}(z_2) \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & T_{n-1}(z_n) \end{array} \right| \text{ abszolút értéke.}$$

Ha itt a jobb oldali determinást kifejtjük az utolsó oszlopa szerint, és figyelembe vesszük, hogy a $T_{n-1}(z_j)$ együtthatójaként fellépő aldeterminánsok abszolút értéke mind $\leq \delta_{n-1}(K)^{1/2}$ a $\delta_{n-1}(K)$ definíciója szerint, és még azt is, hogy viszont $|T_{n-1}(z_j)| \leq t_{n-1}(K)$ minden j -re, azt kapjuk, hogy

$$(11) \quad \delta_n(K)^{1/2} \leq nt_{n-1}(K)\delta_{n-1}(K)^{1/2}.$$

(10) és (11) szerint

$$t_n(K)^{1/n} \leq \frac{\delta_{n+1}(K)^{1/2n}}{\delta_n(K)^{1/2n}} \leq (n+1)^{1/n} t_n(K)^{1/n}.$$

Itt mind a bal, mind a jobb oldal $t(K)$ -hoz konvergál ha n a végtelenségig tart, ezért a középső tag is oda kell, hogy tartson, azaz a $(\delta_{n+1}(K)/\delta_n(K))^{1/n}$ sorozat limesze $t(K)^2$. Ebből egyszerű analízis adja (ld. a 13. feladatot), hogy $\delta_n(K)^{1/n(n-1)} \rightarrow t(K)$, és mivel a bal oldal határértéke másrésztől $\delta(K)$, a (9) formula adódik.

6. A logaritmikus kapacitás

Legyen K ismét egy korlátos zárt halmaz a síkon. Tekintsünk K -ra mint vezetőre: valamely K -ra tett egységnyi töltés szabadon mozoghat a K -n belül. Végül a töltés egyensúlyba kerül (nincs már töltésmozgás K részei között), és ezt az egyensúlyi állapotot az jellemzi, hogy ekkor a töltés eloszlása olyan, hogy a belső energiája minimális. Matematikailag ha ω az egyensúlyi töltéseloszlás, akkor ez az ω minimalizálja az

$$I(\omega) = \int \int \log \frac{1}{|z-t|} d\omega(z) d\omega(t)$$

energiát. Ha $I(K)$ a minimális energia, akkor a K logaritmikus kapacitását, $\text{cap}(K)$ -t, a $\text{cap}(K) = e^{-I(K)}$ formula definiálja. Igazolható, hogy ez ismét megegyezik a transzfinit átmérővel, ami nem nagyon meglepő, hiszen $\log 1/\delta_n(K)$ a

$$\sum_{i \neq j} \log \frac{1}{|z_i - z_j|}$$

mennyiség minimuma $z_1, \dots, z_n \in K$ -ra, ami a fenti energia diszkrét változatának tekinthető.

Kimondhatjuk tehát az alábbi tételt:

Tétel. *Bármely síkbeli K korlátos zárt halmazra a transzfinit átmérő, a Csebiszev-szám és a logaritmikus kapacitás ugyanaz:*

$$\delta(K) = t(K) = \text{cap}(K).$$

7. Robin-konstans, konform-sugár

A komplex sík valamely tartományán értelmezett differenciálható (komplex értékű) függvényeket analitikusnak nevezzük. Analitikus függvény minden pontja körül a pont valamely környezetében konvergens hatványsorba fejthető. Egy ilyen f függvényt konform leképezésnek hívunk, ha ráadásul még 1-1 értelmű is (következésképpen a deriváltja sehol sem 0). A matematika egyik legszebb tétele Riemann konform leképezés-tétele: ha G_1 és G_2 két egyszeresen összefüggő, az egész síktól különböző síkbeli tartomány, akkor van egy konform megfeleltetés G_1 és G_2 között. Itt az egyszeres összefüggőség azt jelenti, hogy pl. G_1 -ben nincsenek "lyukak": bármely G_1 -ben haladó zárt görbe folytonosan összehúzható egy pontra mindig G -ben haladva.

Legyen most K egy egynél több pontot tartalmazó összefüggő korlátos és zárt halmaz a síkon. Ekkor K komplementere a komplex sík végtelen távoli pontjával együtt egyszeresen összefüggőnek tekinthető: bármely $\mathbb{C} \setminus K$ -beli zárt görbe folytonos transzformációval kivihető a végtelenbe anélkül, hogy $\mathbb{C} \setminus K$ -t elhagynánk. Mivel ugyanez igaz a D_1 egységkör lap külsejére is, a Riemann-tétel miatt van egy φ konform leképezés $\mathbb{C} \setminus K$ -ról $\mathbb{C} \setminus D_1$ -re. φ minden pont körül, így a végtelen távoli pont körül is hatványsorba fejthető. A végtelen távoli pont körüli hatványsora

$$\varphi(z) = \gamma z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

alakú, és itt az egyenlőség fennáll a végtelen távoli pont egy környezetében, azaz valamilyen M -re fennáll minden $|z| > M$ számra. A $\gamma = \gamma(K)$ számot a K halmaz Robin-konstansának nevezik, és $R(K) = 1/\gamma(K)$ az ún. konform-sugár:

$$h(z) := \frac{1}{\gamma} \varphi(z) = z + \frac{a_0}{\gamma} + \frac{a_{-1}}{\gamma z} + \frac{a_{-2}}{\gamma z^2} + \dots$$

olyan konform leképezés, amely $\mathbb{C} \setminus K$ -t az origó körüli $R(K)$ sugarú kör külsejére képezi le, és amelyben a végtelen pont körüli sorfejtés főtagja z (ez az $R(K)$ sugár egyértelműen meghatározott).

Mármost kiderül, hogy a konform-sugár is megegyezik a transzfinit átmérővel, azaz összefüggő halmazokra fennáll, hogy

$$\delta(K) = t(K) = \text{cap}(K) = R(K) = \frac{1}{\gamma(K)}.$$

Ez a formula az egyik leghatékonyabb eszköz a transzfinit átmérő kiszámolására. Pl. a $\Phi(z) = z + 1/z$ ún. Zsukovszkij leképezés leképezi az egységkör külsejét a $[-2, 2]$ szakasz külsejére, ezért az inverze Φ^{-1} fogja a $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ halmazt leképezni az egységkör külsejére. Mivel $\Phi(z)$ -ben a végtelen körül a főtag z , ugyancsak z lesz

a főtag Φ^{-1} -ben. Tehát $[-2, 2]$ konform sugara 1, ezért a transzfinit átmérője is 1. Ebből nagyítással kapjuk, hogy l hosszú szakasz transzfinit átmérője $l/4$.

8. Feladatok

Igazoljuk az alábbi állításokat.

1. $\delta_n(K)$ akkor és csak akkor 0, ha K -nak n -nél kevesebb pontja van. Speciálisan adódik, hogy véges halmaz transzfinit átmérője 0. Általánosabban: ha egy halmazhoz hozzáteszünk véges sok pontot, akkor a transzfinit átmérő nem változik.
2. Ha K a 0 pontból és egy 0-hoz konvergáló sorozatból áll, akkor a transzfinit átmérője 0.
3. Ha $K_1 \subset K_2$, akkor $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$, ill. ha egy K halmazt λ -szorosára nagyítunk vagy kicsinyítünk, akkor a transzfinit átmérője λ -szorosára változik.
4. Ha K síkbeli és $z_1, \dots, z_n$ Fekete-pontok K -ban, akkor egyik z_i sem lehet K belsejében.
5. Ha $H : K \rightarrow V$ olyan ráképezés, amely két pont távolságát soha nem növeli, akkor $\delta(V) \leq \delta(K)$.
6. Ha K egy l átmérőjű összefüggő zárt halmaz, akkor $\delta(K) \geq l/4$. (Útmutatás: vetítsük K -t egy olyan szakaszra, amelynek két végpontja K -ban van, és a lehető legtávolabb vannak egymástól.)
7. Ha K egy l hosszú (sima) görbe, akkor a transzfinit átmérője legfeljebb $l/4$. (Útmutatás: használjuk az 5. feladatot egy, az ívhossz segítségével megadott leképezésre egy l hosszú szakaszra.)
8. Ha K tetszőleges kompakt halmaz és n egy adott természetes szám, akkor K csak véges sok olyan n -ed fokú algebrai számot tartalmaz, amelynek minden algebrai konjugáltja is K -ban van. (Útmutatás: használjuk fel a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket).
9. Ha M tetszőleges adott szám, akkor van olyan 0 transzfinit átmérőjű K halmaz, hogy K tartalmaz legalább M db. olyan algebrai egész számot, amelyek minden konjugáltja is K -ban van. (Útmutatás: álljon K az $N!$ -adik egységgyökökből valamilyen nagy N -re.)
10. Mutassunk olyan 1 transzfinit átmérőjű zárt K halmazt, amelyik végtelen sok olyan algebrai egész tartalmaz, amelyeknek minden algebrai konjugáltja is a halmazban van. (Útmutatás: tekintsük az egységgyököket az egységkörön.)

11. Egy 0 transzfinit átmérőjű halmaz tartalmazhat végtelen sok olyan algebrai számot, amelyek minden konjugáltja is K -ban van (ekkor tehát nincs a nevezőre feltevés mint Fekete tételében.)

12. Ha K az egységkör vagy az egységkörlap, akkor $t_n(K) = 1$ minden K -ra.

13. Ha egy pozitív tagú $\{a_n\}$ sorozatra igaz, hogy $(a_n/a_{n-1})^{1/n} \rightarrow L$, akkor $a_n^{2/n(n-1)} \rightarrow L$, amint $n \rightarrow \infty$.

14. Ha egy $\{a_n\}$ sorozatra $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ igaz, akkor $\{a_n/n\}$ konvergál, és a határértéke az a_n/n számok infimuma.

15. Ha $P_n(z) = z^n + \dots$ egy 1 főegyütthatójú n -ed fokú polinom, akkor $\|P_n\|_K \geq \delta(K)^n$.

16. a. $\cos(\arccos x)$ ($x \in [-1, 1]$) egy n -ed fokú polinom, amelynek főegyütthatója 2^{n-1} (Útmutatás: használjuk a $2 \cos(nu) \cos u = \cos(n+1)u + \cos(n-1)u$ azonosságot, és alkalmazzunk indukciót.)

b. $\cos(\arccos x)/2^{n-1}$ a $[-1, 1]$ intervallumon $(n+1)$ -szer veszi fel a $\pm 1/2^{n-1}$ értékeket váltakozó előjellel.

c. $t_n([-1, 1]) = 1/2^{n-1}$. (Útmutatás: ha lenne olyan $P_n(x) = x^n + \dots$ polinom, amelynek normája $1/2^{n-1}$ -nél kisebb, akkor a b. rész szerint a $\cos(\arccos x)/2^{n-1} - P_n(x)$ különbségnek legalább n zérushelye lenne, ami lehetetlen, hiszen ez legfeljebb $n-1$ -ed fokú nem azonosan 0 polinom.)

Hivatkozások

- [1] D. H. Armitage and S. J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [2] M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Mathematische Zeitschrift*, **17**(1923), 228–249.
- [3] M. Fekete and G. Szegő, On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set, *Math. Z.*, **63**(1955), 158–172.
- [4] M. Pap and F. Schipp, Equilibrium conditions for the Malmquist-Takenaka systems, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **81**(2015), 469–482.
- [5] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [6] R. M. Robinson, Conjugate algebraic integers in real point sets, *Math. Z.*, **84**(1964), 415–427.
- [7] I. Schur, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Mathematische Zeitschrift*, **1**(1918), 377–402.

- [8] T. J. Stieltjes, Sur quelques théorèmes d'algèbre, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **100**(1885), 439–440.
- [9] M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, 1959.

Totik Vilmos, MTA-SZTE Analízis és Sztochasztika Kutatócsoport, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1., totik@math.u-szeged.hu

