

Macskajáték

CSÁKÁNY BÉLA, JUHÁSZ ROZÁLIA

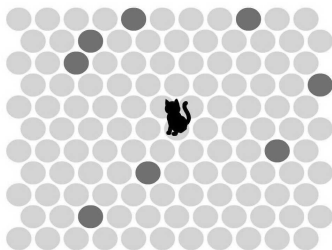
Átnyargaltuk az életet. És megfogtuk a macskát!

Dsida Jenő

Feketemacska. Bár a jelenkor jogászaik között aligha akad Fermat-hoz hasonló zseniális matematikus, a helyzet mégsem teljesen reménytelen. A mi figyelmünket ugyanis Tóth Károly jogtudós barátunk hívta fel arra a diszkrét matematikai játékra, amelyet eredeti nevét megmagyarosítva itt *feketemacskának* nevezünk. A világhálón 2007 óta található a

<http://www.gamedesign.jp/flash/chatnoir/chatnoir.swf>

webcímen. Alkotója Taro Ito neves japán játéktervező.



Az ábrán a számítógépünkön játszható játék egy tipikus kezdőállását látjuk: hatszögrács lapjain tizenegy sorban elhelyezett 121 kör alkotja a pályát. Véletlenszerű módon néhány kör (tapasztalat szerint legalább kettő és legfeljebb 14) sötét, a többi világos. A középső kör, vagyis a hatodik sorban a hatodik kör világos, és rajta egy Macska ül. A játékos („a Gazda”) és a Macska felváltva lépnek, a Gazda kezd. A Gazda lépése abban áll, hogy tetszőleges világos körre – kivéve azt, amelyen a Macska éppen tartózkodik – rákattintva azt elfoglalja, azaz besötétíti. A Macska bármely szomszédos világos körbe léphet, és Taro Ito programja szerint mozog. A

pályát ezután *táblának*, a köröket *mezőknek* fogjuk nevezni. A besötétített mezőt a továbbiakban *G-mezőnek* mondjuk. A Gazda nyer, ha sikerül megfognia, vagyis G-mezőkkal körülvennie a Macskát; a Macska nyer, ha sikerül megszöknie, azaz kijutnia a tábla szélén lévő bármelyik mezőre. (Az ilyen szélső mezők száma 40. Közülük kettőre a Macska sohasem juthat el. Melyekre?) Lépni – amíg lehetséges – kötelező. Ezért a játék nem végződhet döntetlen eredménnyel.

Néhány játszmat lejátssza megfigyelhetjük, hogy ha a kezdőállásban sok G-mező van, a Macska rendszerint megfogható. Taro Ito algoritmusa szerint lépkedve a Macska nem mindig ismeri fel a nyeresé lehetőségét, így gyakran olyankor is megfogható, ha a kezdőállásban kevés sötét kör van. Mielőtt hozzálátnánk a matematikához, megemlítjük, hogy 2010-ben megjelent a feketemacska mozgalmassabb változata – ugyancsak Taro Ito műhelyéből – *Trap the Tiger*, azaz Csapdába a tigrist néven. Ehhez csak akkor kezdjük, ha van legalább félóra szabadidőnk. A *Trap the Tiger* kezdetén véletlenszerűen 30 G-mező van a táblán, s ha a Gazda megfogja a Macskát helyettesítő Kistigrist (vagyis „teljesíti a táblát”), új tábla jelenik meg, amelyen már eggyel kevesebb a G-mezők száma, és így tovább, amíg csak a Kistigris meg nem szökik. A táblák teljesítéséért pontokat kapunk; a játék célja minél több pont szerzése. A pontszám attól függ, hogy az aktuális feladat kezdetén hány G-mező van és a tábla teljesítéséhez hány lépés kellett. (Egy-két játszma lejátssza után az egyszerű kétváltozós függvény meghatározása nem nehéz feladat.)

Hány lépés előny kell a macskafogáshoz? A kezdőállás sötét köreit úgy is felfoghatjuk, hogy a Gazda üres pályán kezdte a játékot, de néhány lépés előnyt kapott. A számítógépes játékokban ezeket a lépéseket is Taro Ito programja adja meg, szabálytalanul, ezzel biztosítva, hogy a játék ne váljék érdektelenné. Ha azonban az előnyt a Gazda használhatná föl, általa megkönnyíthetné a Macska megfogását. Öt lépés előnnyel triviális módon meg is foghatná, másképpen fogalmazva: van olyan öt G-mezőt tartalmazó kezdőállás, amelyből indulva a Gazda megfogja a Macskát. Természetes a következő kérdés: *mi a legkisebb n , amelyre létezik olyan n számú G-mezőt tartalmazó kezdőállás, amelyből indulva a Gazda meg tudja fogni a Macskát?* Ennek vizsgálatához célszerű elkészítenünk papíron a játék tábláját. A Macska mindenkor helyét és a sötét mezőket különböző színű korongokkal (pl. Go játék „köveivel”, de akár a háztartásból kikerülő egyforma kerek apró tárgyakkal is) jelezhetjük. Aki nem akar ezzel bajlódni, használja a

<http://www.math.u-szeged.hu/FMacska/>

webcímen elérhető (feketemacska-játékprogramot nem tartalmazó) gyakorlótáblát, amelyet Makay Géza kollégánk készített. (A tábla mezői itt Taro Ito körei helyett az azokat tartalmazó rácshatszögek. Így a tábla a Hex játék táblájára emlékeztet; lásd [5], 109-113. old.) Ezután a feketemacska játékot papíron vagy képernyőn

tetszőlegesen elhelyezett sötét mezőkkel indíthatjuk, és mind a Macska, mind a Gazda lépéseit mi határozzuk meg. A továbbiakban rövidség kedvéért G és M fogja jelölni a Gazdát, illetve a Macskát.

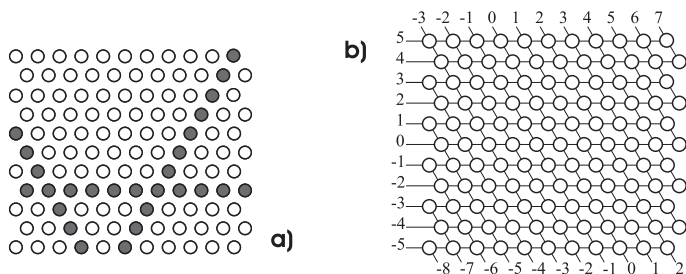
Kérdésünkre a válasz: $n = 3$. Kifejtve:

1. Van három olyan mező, hogy ha ezek a kezdőállásban G-mezők, M nem tud megszökni.

2. Ha a kezdőállásban legfeljebb két G-mező van, M meg tud szökni.

Az „M meg tud szökni” állítás részletesebben azt jelenti, hogy „G bárhogy is próbálja megakadályozni, M meg tud szökni”. A diszkrét játékokra vonatkozó szokásos terminológiát használva ([5], 19-23. old.) a 2. állítás így hangzik: Ha a kezdőállásban legfeljebb két G-mező van, M-nek létezik nyerő stratégiája. Az 1. állítás pedig: Van három olyan mező, hogy ha ezek a kezdőállásban G-mezők, G-nek van nyerő stratégiája.

A bizonyításhoz elnevezéseket vezetünk be a tábla (vagyis a mezők halmaza) egyes részhalmazaira és a játék bizonyos lépés-sorozataira. Beszélni fogunk a tábla *sorairól*: egy vízszintes és két ferde sort látunk az a) ábrán. A vízszintes sort röviden *v-sornak*, a jobbra haladva emelkedő ferde sort *e-sornak*, a jobbra haladva süllyedő ferde sort *s-sornak* mondjuk.



A mezőket egész számpárokkal koordinátázzuk; a tábla középső mezőjét (röviden: a *középpontot*) jelölje a $(0,0)$ számpár. A b) ábra mutatja, hogy az egyes s-sorokban mi az ottani mezőket jelölő számpárok első komponense, és az egyes v-sorokban mi a bennük lévő mezőket jelölő számpárok második komponense. (Úgy gondolhatunk ezekre a koordinátákra, mintha ferdeszögű koordinátarendszert vezetünk volna be, amelyben a középponton átmenő v-sor és s-sor az x ill. y tengelynek felel meg.) Vegyük észre, hogy minden e-sorban az (a, b) mező komponenseinek $a - b$ különbsége ugyanaz a szám, és ott minden mező mindkét koordinátája eggyel-eggyel nagyobb, mint alsó szomszédjáé. Makay Géza gyakorlótábláján a mezők koordinátái is fel vannak tüntetve.

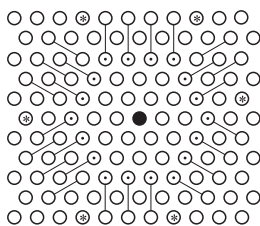
A sorokat a következőképpen jelöljük: $(i, \rightarrow)$ az a v-sor, amelyben a mezők második komponense i ; $(j, \uparrow)$ az az e-sor, amelyben a mezők komponenseinek kü-

lönbsége j ; $(k, \downarrow)$ pedig az az s-sor, amelyben a mezők első komponense k . Példák: a tábla (7,5) jobb felső sarkába befutó e-sort $(2, \uparrow)$, a tábla (-3,5) bal felső sarokmezőjét (mint egyetlen mezőből álló e-sort) $(-8, \uparrow)$ jelöli. Az ezt a mezőt tartalmazó s-sor jele $(-3, \downarrow)$.

Két azonos állású szomszédos sor egyesítését *2-sávnak* nevezzük. Beszélünk *3-sávról* is; ez három azonos állású szomszédos sor egyesítése, amelyek közül a középpontot csak szélső sor tartalmazhatja. Hasonló módon értelmezhető az n -sáv $n < 6$ -ra. Nem szorul magyarázatra a *vízszintes sáv* és a *ferde sáv* fogalma. A középpontot tartalmazó v-sort a tábla *középvonalának* nevezzük. A tábla *alsó* (ill. *felső*) *részén* a középvonal alatti (ill. fölötti) 5-sávot értjük. Természetes módon értelmezhetjük a tábla *bal* és *jobb oldalát*; egyikhez sem tartoznak sem a középpont, sem az alatta és fölötte levő $(-2, -4)$, $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ mezők. Két mező *távolsága* k , ha egyikből a másikba el lehet jutni k számú macskalépéssel, de kevesebbel nem (pl. a szomszédos mezők távolsága 1, a tábla két átellenes sarokmezőjének távolsága 15.) Mező és sor *távolságán* a mező és a sor hozzá legközelebbi mezője távolságát értjük. Sávnak a tábla középső mezőjéhez legközelebbi sorát a *sáv belső*, legtávolabbi sorát a *sáv külső sorának* nevezzük. Ha $n > 2$, beszélhetünk az n -sáv *külső 2-sávjáról* – ez a külső sor és a sávban mellette levő sor egyesítése. Általában, ha $k < n$, ehhez hasonlóan értelmezhetjük az n -sáv *külső k -sávját*, valamint a *belső k -sávokat*. Azt mondjuk, hogy M *áttör* a sávon, ha a sáv belső soráról eljut a külső sorára. Azokat a mezőket, amelyek nem tartoznak valamely sorhoz vagy sávhoz és belőlük macskalépésekkel a középpontba eljutni csak a sorhoz, illetve a sávhoz tartozó mező(kö)n át lehet, a *soron* ill. a *sávon kívüli mezőknek* nevezzük.

Amikor M soron következő lépésével egy 2-sáv belső sorának két szomszédos mezője közül bármelyiket el tudná foglalni, akkor a sáv külső sorában tőle 2 távolságra levő három mező közül a középső *szemben van* vele. Ha ezt G elfoglalja, akkor *szembeáll* M -mel azon a mezőn. Ha ekkor M a sáv belső sorában lévő valamelyik mezőre lép, G a sáv külső sora alkalmas mezőjének elfoglalásával megakadályozhatja, hogy M áttörjön. Ilyenkor azonban M a sáv belső sorában valamelyik irányban megindulhat a tábla széle felé. Tegyük föl, hogy abban az irányban a sávban nincs G -mező. Ha G továbbra sem engedi, hogy M áttörjön, akkor M a sáv belső sorában haladhat – *oldaloghat* – a tábla széle felé. Ha azt el is éri és ilyen módon megszökik, azt mondjuk: *eloldalog*. Ha azonban M haladási irányában van legalább egy G -mező a sávban, akkor M haladási irányának 60° -os megváltoztatására kényszerül. Ezután M egy másik 2-sáv belső sorában oldalog tovább, s ha G nem engedi, hogy ezen a sávon áttörjön, akkor ezen a sávon fog eloldalogni (hacsak ebben a sávban nincs G -mező; és így tovább).

Az 1. állítás igazolásában segít az alábbi ábra. Ezen pontokkal jelöltük meg azokat a mezőket, amelyek távolsága a centrumtól 3.



Ha a játék kezdetén 3 G-mező van, mire a tábla széle felé tartó Macska harmadik lépésével valamelyik ponttal megjelölt mezőre lép, már 6 G-mező van a táblán, és ebben az állásban ismét G lép. Legyen kezdéskor az ábrán csillaggal megjelölt 6 mező közül 3 G-mező. Első három lépésével G a többi csillagos mezőt foglalja el, majd következő lépésével szembeáll M-mel azon a mezőn, amelyet az ábrán az M által éppen elfoglalt pontozott mezővel vonal köt össze. Ezután M bármerre is próbál eloldalogni, mindig csillagos mezőhöz jut el, amelynél kénytelen irányt változtatni, és a táblát végül körüljárva sehol sem jut ki a szélére. Ha M nem próbálkozik azonnal az eloldalgással (vagyis nem lép azonnal a vele szemben levő G-mező mellé), hanem egy másik szomszédos mezőt foglal el, akkor G ismét szembeáll vele azon a mezőn, amelyet M új helyével vonal köt össze, és így tovább. Ha M háromnál több lépéssel jut először a pontozott mezők valamelyikére, akkor ezalatt G az összes csillagos mezők mellett további mező(ke)t is elfoglal, amivel a macskafogás feladatát nem nehezíti. (Két csillagos mező áthelyezésével a csillagos mezők szabályos hatszöget alkotnának. Miért nem ezt a „szebb megoldást” választottuk?)

Az 1. állítás bizonyításában G mindig megakadályozta, hogy a tábla szélén levő vagy sarkához közeli sávon M áttörjön. A 2. állítás bizonyításához meg kell majd vizsgálnunk, mi történhet, ha G nem akadályozza meg, hogy egy 2-sáv belső sorában haladó M áttörjön, abban bízva, hogy a sávon kívül még meg tudja gátolni, hogy M megszökjék. Azt sejtjük, hogy ha a sávon kívül kevés sötét mező van, továbbá a sáv vízszintes és elég közel van a tábla (alsó vagy felső) széléhez, vagy a sáv ferde és elég közel van a tábla valamelyik sarkához, akkor M meg tud szökni. Használni fogjuk a következő észrevételeket.

1. észrevétel. Legyen $2 \leq n \leq 5$. Ha M valamely n -sáv belső sorában van, M lép, és a sávban legfeljebb $5-n$ G-mező van, akkor G akárhogyan is próbálja akadályozni, M vagy áttör, vagy eloldalog a sávban.

Az $n = 2$ esetben ezt közvetlenül ellenőrizhetjük, $n \geq 3$ -ra pedig indukcióval láthatjuk be. Ha $n = 3$, a két G-mező lehet a sáv középső sorában M szomszédja; ekkor M nem léphet a sáv kívülről második sorába, de bármelyik irányban eloldaloghat. Ettől az esettől eltekintve, ha $n \geq 3$, M első lépésével a sáv kívülről $n - 1$ -edik sorába léphet, és az indukció-feltevés alkalmazható.

Ezt az észrevételt kiegészíthetjük:

1*. észrevétel. *Ha M valamely n -sáv belső sorában van, M lép, és a sávban pontosan $6 - n$ G -mező van, G csak akkor tudja megakadályozni, hogy M áttörjön, vagy eloldalogjon a sávban, ha*

($n = 2$) a külső sorban van két M -mel szomszédos G -mező, és M -től jobbra is, balra is van legalább egy-egy további G -mező a sávban;

($n = 3$) a külső sorban M -mel szemben G -mező van, és a sáv külső 2-sávjában M -től jobbra is, balra is van G -mező M -től legalább 2 távolságra;

($n = 4$) a sáv külső 2-sávjában M -től jobbra is, balra is van G -mező M -től legalább 3 távolságra;

($n = 5$) a sáv külső 2-sávjában van G -mező M -től legalább 4 távolságra.

Az 1*. észrevétel hosszadalmas, de egyszerű végiggondolását elhagyjuk.

2. észrevétel. *Ha M a középpontban van, M lép, és a tábla alsó részén nincs G -mező, akkor G bármilyen lépésekkel is próbálja akadályozni, M vagy megszökhet a tábla alsó részén, vagy oldaloghat a $(-4, \downarrow)$, $(-5, \downarrow)$ s-sorok valamelyikén.*

A megadott soron való oldalgás lehetősége itt és a következő észrevételekben természetesen csak a tábla alsó részén biztosított, hiszen a középvonalon és a tábla felső részén lévő G -mezők az oldalgás irányát megváltoztathatják. A bizonyítást kimerítő részletezés helyett (amely cikkünket valamely sakk-könyv fejezetéhez tenné hasonlóvá) egy tipikus lépéssorozattal szemléltetjük. A lépéspárok első tagja mindig M lépése, a második a G által elfoglalt mező. Zárójelben indokoljuk G lépését.

1. $(-1, -1) - (-5, -4)$ (az 1*. észrevételnek a tábla alsó részére alkalmazott ($n = 5$) esete miatt)
2. $(-2, -2) - (-3, -5)$ (1*, ($n = 4$))
3. $(-3, -3) - (-4, -5)$ (1*, ($n = 3$))
4. $(-4, -3) - (-5, -3)$ (különben M lép $(-5, -3)$ -ra)
5. $(-4, -2)$ (az oldalgás kezdete).

A 2. állítás bizonyításához fel fogjuk használni, hogy ugyanilyen feltevések mellett M a tábla jobboldalán is oldaloghat (ami hasonlóan látható be):

2*. észrevétel. *Ha M a középpontban van, M lép, és a tábla alsó részén nincs G -mező, akkor G bármilyen lépésekkel is próbálja akadályozni, M vagy megszökhet a tábla alsó részén, vagy oldaloghat a $(4, \uparrow)$ e-soron.*

M akkor is oldaloghat a tábla bal vagy jobb szélén (szükség szerint), ha a tábla alsó szélén van ugyan egy G -mező, de az nem a legalsó sorban van:

3. észrevétel. Ha M a középpontban van, M lép, és a tábla alsó részén egyetlen G -mező van, mégpedig az alsó rész belső 4-sávjában, akkor G bármilyen lépésekkel is próbálja akadályozni, M vagy megszökhet a tábla alsó részén, vagy oldalalghat a $(-3, \downarrow)$, $(-4, \downarrow)$, $(-5, \downarrow)$ s-sorok valamelyikén.

Ezt két tipikus lépéssorozattal világítjuk meg. Először legyen az egyetlen G -mező $(-1, -2)$.

1. $(-1, -1) - (-5, -4)$ ($(-2, -2)$ után M lefelé eloldalogna)
2. $(-2, -2) - (-3, -5)$ (1^* , $(n = 4)$)
3. $(-3, -3)$ és így tovább.

Ha az egyetlen G -mező $(-4, -4)$,

1. $(-1, -1) - (-2, -4)$ (1^* , $(n = 4)$)
2. $(-2, -2) - (-3, -4)$ (1^* , $(n = 3)$)
3. $(-3, -2) - (-5, -3)$ (1^* , $(n = 3)$)
4. $(-4, -2)$ (és oldalalghat a $(-4, \downarrow)$ soron).

Hasonlóan látható be a

3* észrevétel. Ha M a középpontban van, M lép, és a tábla alsó részén egyetlen G -mező van, mégpedig az alsó rész belső 4-sávjában, akkor G bármilyen lépésekkel is próbálja akadályozni, M vagy meg tud szökni a tábla alsó részén, vagy oldalalghat a $(3, \uparrow)$, $(4, \uparrow)$ e-sorok valamelyikén.

Abban az esetben, amikor az egyetlen G -mező a tábla legalsó sorában van, csak a következő tényre lesz szükségünk:

4. észrevétel. Ha M a középpontban van, M lép, és a tábla alsó részén egyetlen G -mező van, mégpedig a $(-1, -5)$, $(-2, -5)$, $(-3, -5)$, $(-4, -5)$ mezők egyike, akkor G bármilyen lépésekkel is próbálja akadályozni, M vagy meg tud szökni a tábla alsó részén, vagy oldalalghat a $(-3, \downarrow)$, $(-4, \downarrow)$, $(-5, \downarrow)$ $(3, \uparrow)$, $(4, \uparrow)$ sorok valamelyikén.

Egy példa, amelyben $(-3, -5)$ az egyetlen G -mező:

1. $(-1, -1) - (-5, -4)$ (valamelyik oldalra lépni kell)
2. $(-1, -2) - (0, -4)$ (1^* , $(n = 4)$)
3. $(-1, -3) - (-2, -5)$ (1^* , $(n = 3)$)
4. $(0, -3)$ (és oldalalghat a $(3, \uparrow)$ soron).

Az 1. állítás bizonyítását követően megfogalmazott sejtést pontosítja az

5. észrevétel. Ha M a $(-3, \rightarrow)$, $(-4, \downarrow)$, $(-4, \uparrow)$, $(3, \rightarrow)$, $(4, \downarrow)$ vagy $(4, \uparrow)$ sor egyik mezőjére lép, abban a sorban M -től valamelyik irányban nincsenek G -mezők, és azon a soron kívül legfeljebb egy G -mező van, akkor M meg tud szökni.

Ez könnyen végiggondolható, azokra a sávokra alkalmazva az 1. észrevételt, amelyek belső során M áll; továbbá nyilvánvalóan érvényes a tábla megfelelő sarkához ill. széléhez még közelebb levő sorokra is.

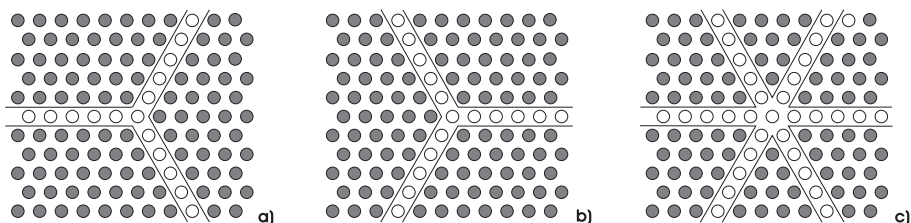
Rátérünk a 2. állítás bizonyítására. Jelölje k, a, f a Gazda első lépése utáni állásban a tábla középvonalán, alsó részén, ill. felső részén levő G-mezők számát.

Először legyen $k = 3$. Akkor $a = 0$. Tegyük fel, hogy a tábla bal oldalán legfeljebb egy G-mező van. A 2. észrevétel szerint M vagy megszökik a tábla alsó felén, vagy eloldalog a $(-4, \downarrow)$, $(-5, \downarrow)$ s-sorok valamelyikén, kivéve, ha ott G-mezőhöz ér. Akkor irányát 60° -kal megváltoztatja, de ezután már bizonyosan eloldalog, mert oldalgás közben a tábla bal oldalán marad, tehát további G-mezőhöz már nem érhet. Ugyanígy látjuk be a 2^* . észrevétel alapján, hogy M akkor is meg tud szökni, ha azt tesszük fel, hogy a középponttól jobbra van legfeljebb egy G-mező.

Legyen $k = 2$. Akkor vagy $a = 0$ és $f = 1$, vagy $a = 1$ és $f = 0$. A tábla szimmetriája miatt feltehető $a = 0$. Az összesen 3 G-mező közül a tábla valamelyik oldalán – mondjuk, a bal oldalán – legfeljebb egy van. Ekkor most is alkalmazhatjuk a 2. észrevételt; a hátralevő esetben pedig a 2^* . észrevételt.

Legyen $k = 1$. Ha $a = 0, f = 2$, vagy $a = 2, f = 0$, a 2. és 2^* . észrevétel egyaránt használható. Ezután tegyük fel, hogy $a = f = 1$. Ha a tábla alsó részén levő G-mező – jelölje g – nem a tábla alsó szélén van, akkor alkalmazzuk a 3. vagy 3^* . észrevételt aszerint, hogy a középvonalon levő G-mező a tábla jobb vagy bal oldalán van. Szimmetria miatt a 3. vagy 3^* . észrevételt akkor is használhatjuk, ha g a tábla alsó szélén van, de a tábla felső részén levő G-mező nem a tábla felső szélén van. Így már csak az az eset maradt hátra, amikor M első lépése előtt a $(-5, \rightarrow)$, $(0, \rightarrow)$ és $(5, \rightarrow)$ sorokban egy-egy G-mező van.

Ennek az esetnek a meggondolásához nevezzük a tábla *szögleteinek* az alábbi a) és b) ábrán látható, vonalakkal kijelölt hat mezőhalmaz mindegyikét, a szöglet *tengelyének* pedig a középpontot tartalmazó sorban lévő mezőinek halmazát. A c) ábra a szögletek közös részeit, a *szögletmetszeteket* mutatja.



Mivel a tengelyeket alkotó mezők csak egy szöglethez tartoznak, a vizsgált esetben szükségképpen van *üres szöglet*, vagyis olyan szöglet, amelyben nincs G-mező. M

meg tud szökni, ha ennek a szögletnek a tengelyén indul el. Ezt is néhány példával mutatjuk be. Legyen először a tábla baloldalán lévő szöglet üres, és legyenek $(0, 5)$, $(3, 0)$, $(-5, -5)$ G-mezők.

1. $(-1, 0) - (-5, 0)$ (hogyan M $(-2, 0)$ lépésére 1^* , $(n = 4)$ feltétele teljesüljön mindkét ferde sávra, amelyeknek $(-5, 0)$ a külső sorában van)
2. $(-2, 0) - (3, 5)$ (a bal oldalon M-nek nincs lehetősége a szökésre)
3. $(-3, 0) - (-5, -1)$ (1^* , $(n = 3)$)
4. $(-4, -1)$ (és a $(-4, -4)$ mezőn irányt változtatva eloldalog a $(-4, \rightarrow)$ soron).

Másik változat:

1. $(-1, 0) - (-2, 0)$ (próbálkozás, hogy M ne haladhasson a tengelyen)
2. $(-2, -1) - (-5, 0)$ (1^* , $(n = 4)$)
3. $(-3, -2) - (-2, -5)$ (1^* , $(n = 4)$)
4. $(-4, -2) - (-6, -3)$ (1^* , $(n = 3)$)
5. $(-5, -2)$ (és eloldalog a $(4, \downarrow)$, majd a $(4, \rightarrow)$ soron).

Most legyen a jobb oldali alsó szöglet üres, és $(4, 5)$, $(4, 0)$, $(-6, -5)$ a G-mezők.

1. $(0, -1) - (-1, -5)$ (hogyan M $(0, -2)$ lépésére 1^* , $(n = 4)$ feltétele teljesülhessen az $(5, \uparrow)$ külső sorú 4-sávra is)
2. $(0, -2) - (-2, -5)$ (hogyan M ne oldaloghasson a $(-4, \rightarrow)$ és $(-5, \downarrow)$ sorokon)
3. $(1, -2) - (2, -3)$ (1^* , $(n = 3)$)
4. $(2, -2)$ (és eloldalog – kétszer irányt változtatva, végül – a $(4, \rightarrow)$ soron).

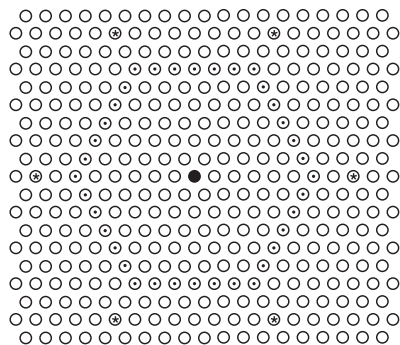
Legyen $k = 0$. A tábla szimmetriája miatt feltehető $a = 1$, $f = 2$. Ha a táblán van üres szöglet, akkor a $k = 1$ esetben látott stratégiát alkalmazhatjuk. Ha nincs, akkor a három G-mező szükségképpen a felső rész bal oldali és jobb oldali, valamint az alsó rész középső szögletmetszetében van (lásd az előbbi c) ábrát). A 3. és 3^* . észrevétel alapján feltehetjük, hogy az alsó részben lévő G-mező a $(-1, -5)$, $(-2, -5)$, $(-3, -5)$, $(-4, -5)$ mezők egyike. Ekkor a 4. észrevétel szerint M átoldaloghat a tábla felső részére, és ott – legfeljebb egyszer változtatva irányt – eloldaloghat, bárhol is van a felső részben lévő szögletmetszetekben az egy-egy G-mező.

Ez a gondolatmenet két kiegészítésre szorul. Egyrészt, miközben M a tábla alsó részén lépked, G elhelyezhet egy G-mezőt a tábla felső részén azzal a céllal, hogy amikor M majd azon a részen halad, megszökését ezen G-mező segítségével akadályozza meg. G-nek ez a próbálkozása egyenértékű azzal, hogy G egy alkalommal „az alsó részre vonatkozóan passzol”, vagyis két egymás utáni lépést engedélyez a tábla alsó részén haladó M számára. M szökését azonban így sem akadályozhatja meg. Ehhez be kell látnunk, hogy ilyenkor M vagy megszökhet már a tábla alsó részén, vagy a 2. és 2^* . észrevételekben leírt módon oldaloghat (és ezen észrevételek előző alkalmazásaihoz hasonló módon szökhet meg a tábla felső részén). Ha $a = 0$, vagy

pedig $a = 1$ és az alsó részen lévő G -mező nem a legalsó sorban van, akkor az 1. észrevételt a tábla legalsó n számú sorából álló sávokra alkalmazva látjuk, hogy M már a tábla alsó részén meg tud szökni. Ha pedig az alsó részen lévő G -mező a legalsó sorban van, akkor az 1*. észrevétel (többszöri) felhasználásával igazolhatjuk, hogy M a jelzett módon tud megszökni a felső részen.

Másrészt, a fentiekben leírt oldalgások közben G megpróbálhatja úgy megakadályozni M megszökését, hogy megengedi M áttörését azon a 2-sávon, amelyen éppen halad. Az 5. észrevétel azonban mutatja, hogy M ekkor is mindig megszökhet. Ezzel a 2. állítást beláttuk.

Feketemacska végtelen táblán. Tekintsünk egy egymáshoz oldalukkal illeszkedő egybevágó szabályos hatszögekből álló, az egész síkot lefedő rácsot. Ha minden hatszögben vele koncentrikusan egy, a hatszög átellenes oldalai távolságánál kisebb rögzített átmérőjű körlapot helyezünk el, akkor ezeket a körlapokat mezőknek tekintve egy minden irányban végtelen feketemacska-táblát kapunk. Jelöljük meg a tábla tetszőleges mezőjét, és nevezzük középpontnak. Felmerül a kérdés: ha a középpontban ül egy Macska, van egy Gazda, mindketten ugyanúgy léphetnek, ahogyan az előzőekben vizsgált feketemacska játékbán, és a játék kezdetén nincs G -mező a táblán, akkor meg tudja-e fogni – vagyis G -mezőkkel körül tudja-e keríteni – a Gazda a Macskát? Az előző fejezet 1. állítása bizonyításának ötletét használva megmutatjuk, hogy *végtelen táblán G meg tudja fogni M -et*. Most is beszélhetünk sorokról; minden mező három sornak eleme. Tekintsük a középpontot tartalmazó három sorban a középponttól 8 távolságra levő összesen 6 mezőt, továbbá a középponttól 6 távolságra levő mezőket. Ezeket nevezzük csillagos ill. pontozott mezőknek; lásd az ábrát:



Tegyük fel, hogy G nem tudja megfogni M -et. Akkor M a középponttól bármely n távolságra el tud jutni, ezért, akármelyik lehetséges stratégiáját is alkalmazza M , szemmel láthatóan (bár fogalmazhatnánk úgy is, hogy a Jordan-féle görbetétel

következményeként) szükségképpen eljut egy pontozott mezőre. Ehhez legalább 6 lépésre van szüksége. A játékot kezdő G eközben elfoglalja mind a 6 csillagos mezőt, és amikor M egy m pontozott mezőre lép, szembeáll vele a legközelebbi, két csillagos mezőt tartalmazó sorban. Ha M távolsága a legközelebbi csillagos mezőtől 2, akkor két ilyen sor is van. G ezek bármelyikét választhatja. Ha M a G által elfoglalt G-mező mellé lépve – tehát a középponttól 7 és 8 távolságra levő sorok alkotta valamelyik 2-sávban – próbál eloldalogni, akkor abban a sávban eljut egy csillagos mezőig, ott irányát 60° -kal megváltoztatva s tovább oldalogva újból eljut egy csillagos mezőig, majd – mint az 1. állítás bizonyításában – végül mind a hat csillagos mezőnél irányt változtatva körbejár, és eközben G bekeríti. M azonban, miután G szembeállt vele, léphet egy olyan mezőre is, amely a középponttól 7, a legközelebbi csillagos mezőtől 2 távolságra van, és nincs G-mező szomszédja. Ekkor G a középponttól 9 távolságú mezőn áll szembe M-mel, aki most a középponttól 8 és 9 távolságra levő sorok alkotta 2-sáv belső során próbálhat eloldalogni, ám ekkor is egy csillagos mező állja útját, és ezután épp úgy, mint az előző esetben, ismét csak körbejárni kényszerül. Ez a gondolatmenet akkor is használható, ha M pontozott mezőre érve nem próbál eloldalogni, hanem szomszédos pontozott mezőre lép.

Mivel ehhez a bizonyításhoz a végtelen táblának csak véges részét használtuk, természetes gondolat, hogy elég nagy páratlan n -re egy olyan üres (azaz G-mező nélküli) táblán indulva, amely 11^2 számú mező helyett n^2 számú, az eredeti játékhoz hasonló elrendezésű mezőből áll, G mindig meg tudja fogni a tábla közepéről induló M-et. Ez, az előző fejezet 1. állításának bizonyítását lemásolva – a csillagos mezőket most is aszimmetrikusan elhelyezve – a következő alakban igazolható:

A 17 sorban 17-17 mezőt tartalmazó üres feketemacska-táblán a Gazda mindig meg tudja fogni a Macskát.

Az eddigiek alapján a Macska kissé lomhának tűnik, pedig az igazi macskák szükség esetén fölöttébb fürgék. Megvizsgáljuk, megfogható-e végtelen üres táblán az olyan Macska, amely ugrani is tud, vagyis nem csak a szomszédos mezőkre léphet. Két speciális esettel foglalkozunk: 1. M akármilyen távoli mezőre ugorhat.

2. Van olyan $n > 1$ természetes szám, hogy M azokra és csak azokra a mezőkre ugorhat, amelyek távolsága az M által elfoglalt mezőtől legfeljebb n .

Itt az ugrás nem két vagy több egymás utáni lépést jelent, hanem M áthelyezését egy másik nem-G-mezőre. Pl. ha a táblán van 6 G-mező, amelyek M-et körülveszik, M ugorhat az ezeken kívüli mezőkre, persze a 2. esetben csak a tőle legfeljebb n távolságra levőkre. Nevezzük az n számot a Macska *erősségének*.

1. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben G nem tudja megfogni M-et. Ekkor azonban felvethető egy rokon kérdés: be tudja-e keríteni G a „macskaházat”, vagyis a tábla középpontját? Erre még mindig egyszerű a válasz. (Mi a válasz?) A kérdést Bram Cohen, a BitTorrent fájlcsere rendszer feltalálója és bizonyos matematikai

játékoknak is szakértője továbbfejlesztette, és az itt következőtől különböző, de vele ekvivalens alakban (lásd: [4]) tette közzé 2008-ban a LiveJournal internetes blogújságban: be tudja-e keríteni G a macskaházat akkor, ha azokat a mezőket, amelyeket M a játék során elfoglal (röviden: az M -mezőket), G a továbbiakban már nem változtathatja G -mezővé? Cohen azt sejtette, hogy a válasz igen. Ezt azonban megcáfolta a rhetoricity becenevű hozzászóló ugyanabban az újságban a következő gondolattal (amelyet itt ugyancsak átfogalmazva ismertetünk):

G minden lépése után ugorjon M a G lépésével elfoglalt mezővel átellenes (azaz a tábla középpontjára vonatkozóan szimmetrikus) mezőre. Az, hogy G bekeríti a macskaházat, a következőt jelenti: ha a G -mezőkből egy gráfot készítünk, amelynek csúcsai ezek középpontjai, élei pedig a szomszédos G -mezők középpontjait összekötő egyenes szakaszok, az így előálló gráf tartalmaz olyan önmagába visszatérő γ zárt törtvonalat, amelynek a tábla középpontja a belsejében van. Ekkor G utolsó lépése után az azzal elfoglalt mezővel átellenes mező nem lehet G -mező. Ha M -mezőnek tekintjük, akkor a szomszédos M -mezőkből az előbbi módon készített gráfban van olyan önmagába visszatérő μ zárt törtvonal, amely a tábla középpontjára való tükrözéssel keletkezik γ -ból, ezért egybevágó vele. A γ és μ törtvonalakban nem lehet közös csúcs, továbbá, mivel γ és μ a tábla középpontjától legtávolabbi pontjai ugyanakkora távolságra vannak attól, γ és μ egyike sem lehet a másik belsejében. Ezért γ -nak μ -n belül is, kívül is van csúcsa. Léteznie kell tehát γ -ban két A, B szomszédos csúcsnak is, amelyek egyike μ -n belül, másika μ -n kívül van. Jelölje C és D az A -val is, B -vel is szomszédos két csúcsot μ -ben. Az ezeket összekötő élen az A -t és B -t összekötő élnek át kell haladnia. Ez azonban lehetetlen, mivel μ is, γ is részgráfja a végtelen macskatábla összes mezői középpontjaiból mint csúcsokból és a szomszédos mezők középpontjait összekötő szakaszokból mint élekből álló végtelen szabályos háromszögrács-gráfnak, abban pedig élek nem keresztezik egymást. A kapott ellentmondás mutatja, hogy G nem tudja bekeríteni a macskaházat.

2. Tekintsük mindazon n természetes számok S halmazát, amelyekre az n erősségű Macskát a Gazda végtelen táblán nem tudja megfogni. Ha S nem üres, akkor S -nek van legkisebb eleme, és az annál nagyobb természetes számok mind S -hez tartoznak.

Legyen most a Macska erőssége egy rögzített szám. Ha van olyan k , hogy a Gazda k sorban soronként k mezőt tartalmazó (röviden: $k \times k$ méretű) táblán meg tudja fogni a tábla közepén levő Macskát, akkor nyilvánvalóan minden $l > k$ -ra meg tudja fogni az $l \times l$ méretű táblán, és a végtelen táblán is. Ennek a megfordítása is igaz: ha a Gazda végtelen táblán meg tudja fogni a közepén ülő Macskát, akkor létezik olyan k , hogy már a $k \times k$ méretű táblán is meg tudja fogni. Ennek igazolására a közönséges (1 erősségű) Macskára alkalmazott módszer most nem használható, mert 1-nél nagyobb erősségű Macska esetén nem látunk olyan

állásokat, amelyek valamelyike mindig előfordulna, ha a Macska megszökne. Ezért nem nyilvánvaló a Gazda olyan stratégiájának létezése, amely a Macska bármely stratégiájával szemben ugyanolyan méretű táblán biztosítaná a Macska megfogását. Az állítást indirekt módon bizonyítjuk: azt látjuk be, hogy ha a Gazda semmilyen k -ra nem tudja megfogni a Macskát a k méretű táblán, akkor a végtelen táblán sem tudja megfogni. Mivel a Macska mindig csak véges számú lépés közül választhat, van olyan kezdő lépése, amely után a Gazda végtelen sok k -ra nem tudja megfogni a k -szor k méretű táblán. (Ha ilyen kezdő lépése nem lenne, akkor összesen is csak véges számú k -re nem tudná megfogni a Gazda a Macskát $k \times k$ méretű táblán, aminek az ellenkezőjét tettük föl.) Jelölje K_0 az ilyen k számok halmazát. Ezután bármit is lép a Gazda, újból ez az okoskodás mutatja, hogy a Macskának megint lesz olyan lépése, amely után a Gazda végtelen sok K_0 -ba tartozó k -ra nem tudja megfogni; jelölje ezek halmazát K_1 . Ugyanígy folytatva a Macska mindig tud lépni, azaz a Gazda a végtelen táblán nem tudja megfogni; ellentmondást kaptunk. (Ez a gondolatmenet a gráfelméleti König-lemma egy alkalmazása; lásd [5], 36. o.)

Dolgozatunk befejező részében megmutatjuk, hogy *minden 2-nél nagyobb n -re a végtelen üres táblán az n erősségű Macska meg tud szökni.*

Angyal és Ördög – egy másik történet? Akinek az eddigieket olvasva eszébe jutott, hogy a feketemacskát (véges vagy végtelen) *négyzetrács*on is játszhatnánk, kiváló elődök nyomdokaiba lépett. A gondolat megtalálható Richard Epstein és David Silverman játékokról szóló összefoglaló könyveiben ([6], ill. [12]). Valamivel később, Elvyn Berlekamp, John Conway és Richard Guy diszkrét matematikai játékokról szóló nagy monográfiájuk ([1]) teljes 19. fejezetét a négyzetrácsra játszható, feketemacskához hasonló játékok elemzésének szentelték. Ebben megmutatják, hogy a Sakk-királyt (vagyis az olyan bábót, amely mind a nyolc szomszédos mezőre léphet) a Négyzetevő (amely minden lépésében felfal egy négyzetet, így arra a négyzetre a Sakk-király már nem léphet) meg tudja fosztani a lépés lehetőségétől (röviden: meg tudja fogni) a legalább 33 -szor 33 méretű négyzetrácsra. Bármely n természetes számra n erősségű Angyalnak nevezik az olyan bábót, amely minden lépésében akármelyik legfeljebb n királylépésnyi távolságra levő négyzetre át tud repülni; ellenfele a négyzetevő Ördög. Az általa felfalt négyzet fölött az Angyal átrepülhet. Felvetik a kérdést: megfogható-e az 1000 erősségű Angyal a végtelen négyzetrácsra, és rámutatnak a bizonyosnak látszó negatív válasz bizonyításának nehézségére. Egy későbbi cikkében ([4]) Conway felteszi a kérdést: van-e olyan n , hogy az n erősségű Angyalt a végtelen négyzetrácsra az Ördög nem tudja megfogni? Cikke végén 100 dollárt ajánl fel annak, aki bebizonyítja, hogy ilyen n létezik, és 1000 dollárt annak, aki azt bizonyítja be, hogy nem létezik.

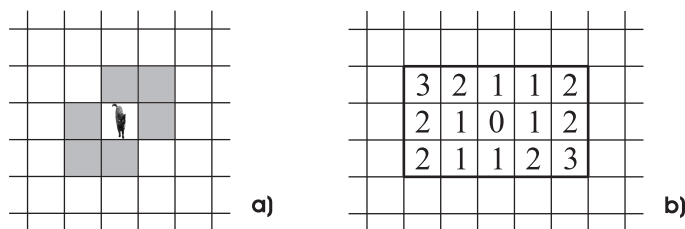
A probléma 11 évig megoldatlan maradt, de akkor egyszerre négy egymástól

független, különböző megoldás született! 2007-ben Gács Péter megmutatta, hogy a kívánt n létezik ([7]); Brian Bowditch azt mutatta meg, hogy $n = 4$ megfelelő ([2]); Máthé András és Oddvar Kloster pedig bebizonyították, hogy már $n = 2$ is jó ([9], ill. [8]). Mindegyik bizonyítás hosszú és nehéz. A legegyszerűbb alapon-dolat – szerintünk – Klosteré: induljon az Angyal egyenesen északnak, a végtelen rács nyugati felére sohasem menjen át, a keleti felén levő felfalt négyzetek közül pedig csak azokkal törődjön, amelyeket a megszökés érdekében ki kell kerülnie, de ilyenkor (felhasználva, hogy az Angyal kétszerannyi négyzet fölött repül át, mint amennyit az Ördög közben felfal) ki is tudja kerülni azokat. (Az ördög persze itt is a részletekben van...)

Az, hogy az Angyal 2 erősségű, azt jelenti, hogy minden 5-ször 5 méretű négyzetrács középső négyzetéből annak bármely másik négyzetét eléri egy röppenéssel. Johan Wästlund 2008-ban tette közzé azt a megállapítását ([13]), hogy az Ördög a végtelen négyzetrácson még az olyan, gyöngébb Angyalt sem tudja megfogni, aki minden 5×5 méretű négyzetrács középső négyzetéből indulva annak csak a három középső vízszintes sorában levő négyzetekbe repülhet (nevezzük az ilyen Angyalt Kisangyalnak). Ezt a tényt felhasználva most belátjuk, hogy *végtelen táblán a 3 erősségű Macskát a Gazda nem tudja megfogni*.

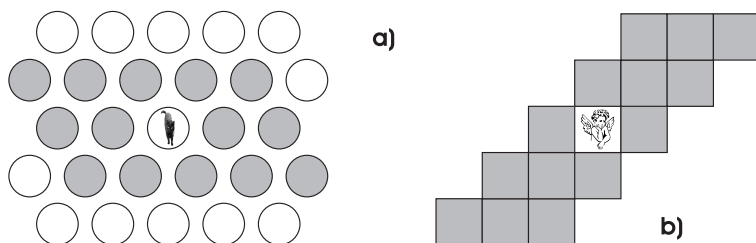
Ehhez fel kell elevenítenünk egy ismert kapcsolatot a végtelen négyzetrács és a végtelen hatszögrács között, amely – kissé eltérő formában – [5] 109-111. oldalán is megtalálható. Egyrészt, természetes módon rendelkezünk egész számpárokat a végtelen négyzetrács négyzeteihez. Legyen ezek oldalhossza 1, és helyezzük a középpontnak tekintett rácsnégyzetet egy Descartes-féle koordináta-rendszer első síknegyedének a csúcsába. Minden rácsnégyzethez bal alsó csúcsa koordinátapárját rendeljük. Másrészt, a feketemacska-tábla mezőire bevezetett koordinátázás nyilvánvalóan kiterjeszthető a végtelen feketemacska-táblára is. Egymásnak megfelelően az azonos koordinátákkal bíró rácsnégyzetet és feketemacska-mezőt, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk a végtelen négyzetrács négyzetei és a végtelen feketemacska-tábla mezői között. Ezért ha tudjuk, adott mező esetén a neki megfelelő négyzethez képest hogyan helyezkednek el azok a négyzetek, amelyek az adott mezővel a feketemacska-táblán szomszédos mezőknek felelnek meg, akkor négyzetrácson is játszhatjuk a feketemacska-játékot.* Figyeljük meg, hogy a Macska lépésekor helyének koordinátái legfeljebb 1-gyel változnak, és ha az egyik koordináta csökken, a másik nem növekedhet. Ennek megfelelően, ha négyzetrácson játsszuk a feketemacskát, a Macska az a) ábrán látható módon léphet.

*A legenda szerint diákkorában így játszotta a Hex játékot hatszögrács helyett kollégiumi földszobája kövezetének négyzetlapjain egyik feltalálója, John F. Nash, később közgazdasági Nobel-díjas matematikus. Erről és Nash érdekes pályájáról többet mond el a [10] regényes életrajz, amelyből Oscar-díjas film is készült.



A b) ábrán a vastag keret mutatja, mely négyzetekre repülhet a 0-val jelölt négyzeten álló Kisangyal, a négyzetekbe írt számok pedig azt mutatják, hány lépésben juthat el a Macska a Kisangyal helyéről arra a mezőre. A legnagyobb ilyen szám 3, tehát a 3 erősségű, azaz 3 macskalépésnyi ugrásra képes Macska bárhova ugorhat, ahová a Kisangyal repülhet. Így Wästlund eredménye biztosítja, hogy a 3 erősségű Macskát a végtelen táblán a Gazda nem tudja megfogni.

Végül, ugyancsak Wästlund eredményét felhasználva rámutatunk, hogy a Gazda a végtelen macskatáblán még az olyan gyengébb macskát sem tudja megfogni, amely csak a következő a) ábrán látható szürke mezőkre ugorhat,



(így tehát „alig több mint 2” erősségű). Magyarázat: ezeknek a mezőknek a koordinátái ugyanazok, mint Wästlund 5×3 méretű négyzetrácsában a négyzetek koordinátái. Megfigyelve az a) ábrát, válaszolhatunk a következő kérdésre is: ki tudja-e cselezni az Ördögöt a végtelen négyzetrácson az olyan Angyalka, aki csak a b) ábrán feltüntetett négyzetekre repülhet?

Irodalom

- [1] Berlekamp, Elvyn R., Conway, John H., Guy, Richard K., *Winning Ways*, Academic Press, London, New York, 1982.
- [2] Bowditch, Brian H., The angel game in the plane. *Combin. Probab. Comput.* 16 (2007), no. 3, 345-362.
- [3] Cohen, Bram, <http://bramcohen.livejournal.com/53358.html>, 2008.
- [4] Conway, John H., The angel problem, *Games of No Chance*, MSRI Publications, Vol. 29, 1996, 3-12.

- [5] Csákány Béla, *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon, 1998, 2005.
- [6] Epstein, Richard A., *Theory of Gambling and Statistical Logic*, Academic Press, London, New York, 1967.
- [7] Gács Péter, <http://www.cs.bu.edu/~gacs/papers/angel.pdf>, 2007.
- [8] Kloster, Oddvar, A solution to the angel problem. Theoret. Comput. Sci. 389 (2007), no. 1-2, 152-161.
- [9] Máthé András, The angel of power 2 wins. Combin. Probab. Comput. 16 (2007), no. 3, 363-374.
- [10] Nasar, Sylvia, *Egy csodálatos elme*, Gabo, 2002.
- [11] Örkény István, *Macskajáték*, 1963.
- [12] Silverman, David L., *Your Move*, McGraw Hill, 1971.
- [13] Wästlund, Johan,
<http://www.math.chalmers.se/~wastlund/weakerAngel.pdf>, 2008.

Csákány Béla, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.,
csakany@math.u-szeged.hu

Juhász Rozália, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.,
jgombi@freemail.hu