

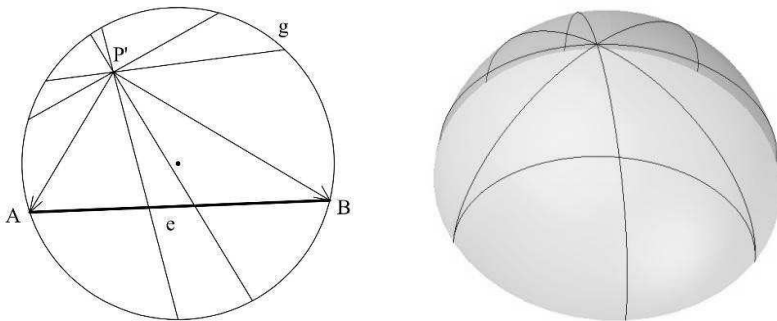
Bizonyítások és szerkesztések a Poincaré-féle félgömbmodellen

H. TEMESVÁRI ÁGOTA, HORVÁTH JENŐ

Egy előző dolgozatunkban [8] definiáltuk a Poincaré-féle félgömbmodellt, bevezettük az egyenesre vonatkozó tükrözést. Megmutattuk, hogy ha adott két különböző pont, akkor létezik egyenesre vonatkozó tükrözés, amely egyik pontot a másikba viszi át. Ebből következik, hogy egy tetszőleges pont a modell pólusába tükrözhető. Tárgyaltuk a háromszög nevezetes vonalait és pontjait. Néhány olyan példát is vettünk, amelyek igazak az euklideszi síkon, de a hiperbolikus síkon nem. Ezeket egy-egy egyszerű ellenpéldával bizonyítottuk. Jelen dolgozatunk négy részre tagozódik: 1. Megjegyzések a [8] dolgozathoz. 2. Újabb bizonyítások. 3. Ellenpélda. 4. Szerkesztések a modellen.

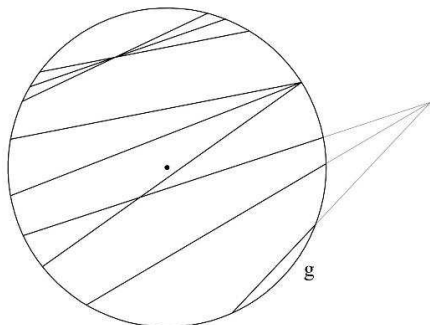
1. Megjegyzések a [8] dolgozathoz

1.1. Az euklideszi szem (főleg, ha nem találkozott az euklideszi geometria axiomatikus felépítésével) nehezen fogadja el, hogy egy síkban egy egyeneshez egy rá nem illeszkedő ponton át legalább két nem metsző egyenes húzható. Az 1. ábra alapján a modellen ez nyilvánvaló.

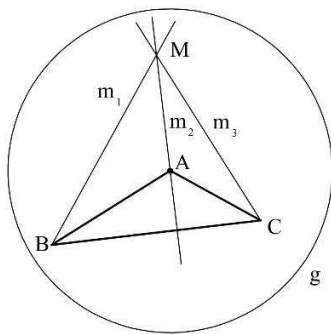


1. ábra

1.2. A hiperbolikus geometriában háromféle sugársor van és nem kettő (2. ábra).



2. ábra



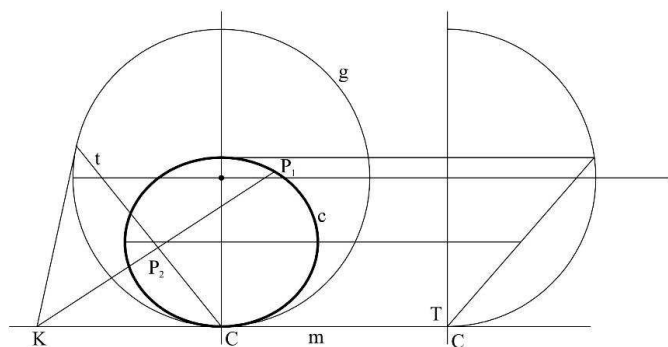
3. ábra

1.3. A háromszög belső szögfelezői egy ponton mennek át. Ez bizonyítható úgy is, hogy vesszük két belső szögfelező metszéspontját, mely egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom oldalától és ez a pont illeszkedik a harmadik belső szögfelezőre is. Két külső és a harmadik csúshoz tartozó belső szögfelezők azonban alkothatnak metsző, párhuzamos, vagy nem metsző sugársort. Az utóbbi esetekben az előző gondolatmenet nyilván nem alkalmazható [8] 1.2.

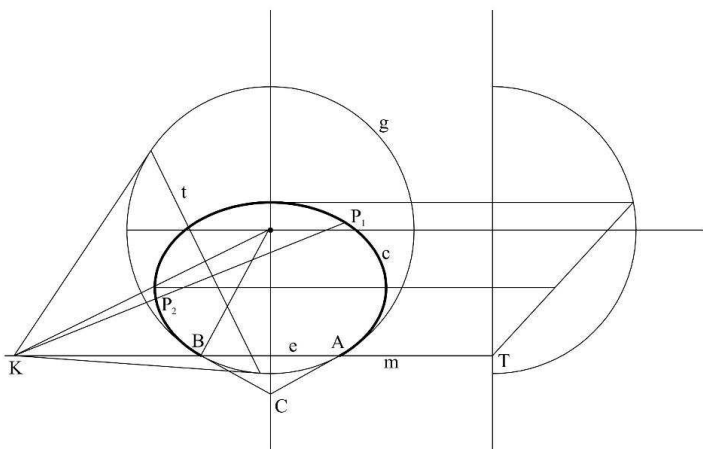
1.4. Hasonló a helyzet a magasságvonalak esetén 3. ábra.

1.5. Euklideszi geometriában megszoktuk, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy ponton mennek át. Ez könnyen bizonyítható, ha $\gamma \geq \max(\alpha, \beta)$ és $\alpha + \beta \geq \gamma$. Ilyenkor a körülírt kör középpontja a háromszög pontja. Ha $\gamma > \alpha + \beta$, akkor a felező merőlegesei külső pontban metszhetik egymást. [8] 1.5.-ben láttuk be (4.a, 4.b ábra), hogy ha a háromszög három csúcsa egy paracikluson, vagy hipercikluson van, akkor a háromszög oldalfelező merőlegesei párhuzamos, illetve nem metsző sugársort alkotnak.

1.6. Az előzőek ismeretében könnyebben érthetővé válik Bolyai Farkas euklideszi helyettes axiómája. Ha három pont nincs egy egyenesen, akkor egy körön vannak.



4.a. ábra

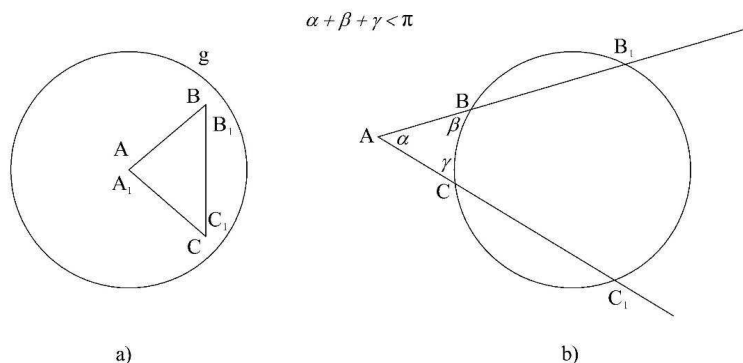


4.b. ábra

2. Újabb bizonyítások a modell segítségével

2.1. *A háromszög szögeinek összege kisebb, mint 180° (π).* Aki ismeri a Legendre-féle szögtételeket, azok számára nyilvánvaló. Most sztereografikus projekció segítségével bizonyítottunk. Tükrözzük a háromszög egyik csúcsát a modell pólusába. Legyenek a tükrözött háromszög csúcsai A , B és C , A pedig a modell pólusa (5.a ábra). A transzformált háromszög A csúcsnál levő α szöge a megfelelő euklideszi szöggel egyenlő. (Az AB és az AC félkörök g -re merőlegesek, szögük α). Egészítsük ki a modell félgömbjét teljes gömbbé. Jelölje A_1 , B_1 , C_1 az A , B , C pontok g határkör síkjára való tükröképeit. A vetületi ábrán ezeknek a pontoknak a vetüle-

tei egybeesnek az A, B, C pontok vetületeivel. Legyen $A_1 = S$ a sztereografikus projekció centruma. Ebből a pontból vetítjük a gömbfelületet az A pontban a gömbhöz húzott érintősíkra. Az AB és az AC oldal sztereografikus vetülete egy-egy szakasz, a B, C, B_1, C_1 pontok egy körön vannak. Tekintettel arra, hogy B_1 és C_1 a kiegészítő félgömbfelületen vannak, A, B, B_1 és A, C, C_1 a 5.b. ábrán látható módon helyezkednek el. Az ABC ívháromszögben a szögek összege kisebb 180° -nál (π -nél).



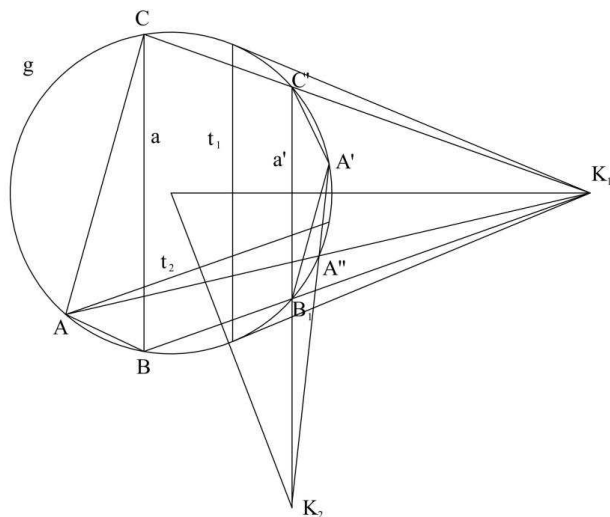
5. ábra

Megjegyezzük, hogy ha a B és a C csúcsokat külön-külön a pólusba tükrözzük, akkor az ezeknél a csúcsoknál levő szögek is valódi nagyságban jelennek meg. A szögeket átmásolva „ellenőrizhetjük”, hogy az ABC háromszög szögösszege kisebb 180° -nál (v.ö. 4.1. pont 12. ábra).

2.2. Aszimptotikus háromszögek, vagy határháromszögnek nevezzük azt a háromszöget, melynek „csúcsai” a g határkörön vannak (g pontjai nem tartoznak a modellhez). Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ezekben a csúcsokban az egyenesek (félkörök) érintője közös. Így azt is mondhatjuk, hogy a határháromszög szögei 0° -osak.

Legyen ABC és $A'B'C'$ két határháromszög (6. ábra). Belátjuk, hogy a határháromszögek egybevágók. A 6. ábra jelöléseit használjuk. A BC egyenes tükrözéssel átvihető az $B'C'$ egyenesbe. Ha A képe nincs A' -vel azonos félsíkban, akkor a $B'C'$ egyenesre vonatkozó tükrözéssel elérhetjük, hogy egy félsíkban helyezkedjenek el (az ábrán ez az eset látható). Jelöljük a tükröképpontot A'' -vel. Ha $A' \neq A''$, akkor legyen K_2 az $A'A''$ és a $B'C'$ egyenesek metszéspontja. A t_2 egyenesre vonatkozó tükrözés után A'' képe A' , a B' és a C' csúcsok felcserélőd-

nek. Tehát maximum 3 tükrözés egymásutánjával az ABC háromszög átvihető az $A'B'C'$ háromszögbe.



6. ábra

Ez alapján Gauss helyettes párhuzamossági axiómája is világos, mely szerint, ha bármely háromszögnél nagyobb területű háromszög létezik, akkor az euklideszi geometria érvényes. (A hiperbolikus geometriában a legnagyobb területű háromszög a határháromszög.)

2.3. Bebizonyítjuk az euklideszi geometriában jól ismert tételt.

Tétel. *Hegyeszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb.*

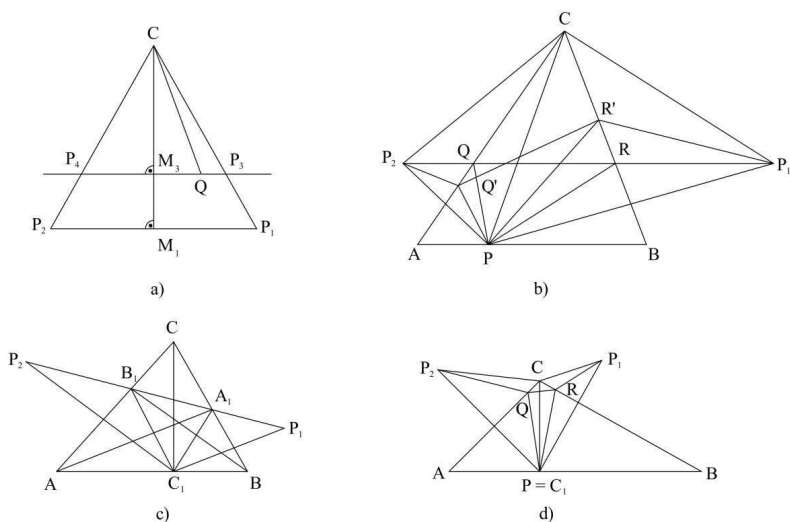
A tétel bizonyításához felhasználjuk a következő segédételt.

Segédétel. *Legyenek P_1P_2C és P_3P_4C egyenlő szárú háromszögek, szárszögük egyenlő, továbbá $CP_3 = CP_4 < CP_1 = CP_2$. Ekkor $P_3P_4 < P_1P_2$.*

Bizonyítás. Tükrözzük a C pontot a modell pólusába, vele együtt a háromszögeket is. Az így kapott háromszögek vetületei is hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az eredeti háromszögek. Nyilván elérhető, hogy a tükrözés után a háromszögek a 7.a ábra szerinti helyzetbe kerüljenek. Legyenek M_1 és M_3 olyan pontok, melyekre

$CM_1 \perp P_1P_2$ és $CM_3 \perp P_3P_4$. Elég bebizonyítani, hogy $M_1P_1 > M_3P_3$. Toljuk el CM_1 mentén M_1P_1 -t úgy, hogy az M_1 pont M_3 -ba kerüljön át.

Megmutatjuk, hogy P_1 eltoltja nem kerülhet az M_3P_3 szakaszra. Teljesül, hogy $M_3P_3C_{\triangleleft} > M_1P_1C_{\triangleleft}$. Ellenkező esetben az $M_1P_1P_3M_3$ négyszögben a szögek összege legalább 360° lenne. Legyen $Q \in M_3P_3$. Az M_3QC szög a QP_3C háromszög külső szöge, így $M_3QC_{\triangleleft} > M_3P_3C_{\triangleleft} > M_1P_1C_{\triangleleft}$. Ezért P_1 eltoltja az M_3P_3 szakasz P_3 -n túli meghosszabbításán van, azaz $M_1P_1 > M_3P_3$. Így $P_3P_4 < P_1P_2$.



7. ábra

A tétel bizonyítása. Legyen ABC tetszőleges hegyesszögű háromszög. Tükrözzük a háromszöget úgy, hogy C a modell pólusába kerüljön (7.b ábra). Legyen $PQ'R'$ egy beírt háromszög, ahol $P \in AB$, $Q' \in AC$, $R' \in BC$. Tükrözzük P -t a BC és az AC oldalra, a tükrökép pontok P_1 és P_2 . (Az AC és a BC egyenesek a pólusra illeszkednek, vetületeik a g határkör átmérői, így a tükrözés euklideszi értelemben is tükrözés.) A $PQ'R'$ háromszög kerületére $PQ' + Q'R' + R'P = P_2Q' + Q'R' + R'P_1$ teljesül. Ez utóbbi akkor a legkisebb, ha P_2 , Q' , R' , P_1 egy egyenesen vannak. Legyenek $Q = P_1P_2 \cap AC$, $R = P_1P_2 \cap BC$. Ezek a pontok léteznek, hiszen a háromszög hegyesszögű. A P ponthoz tartozó egyetlen legkisebb kerületű beírt háromszög van, ez a PQR háromszög.

A tükrözések miatt $P_1C = PC = P_2C$, így a P_1P_2C háromszög egyenlő szárú, szárszöge 2γ , alapja pedig a P -hez tartozó legkisebb kerületű beírt háromszög kerülete. A P pontot változtatva, az előző gondolatmenet alapján a keletkező P_1P_2C

háromszögek egyenlő szárúak, szárszögük 2γ , alapjuk a szóban forgó P ponthoz tartozó minimális kerületű beírt háromszög kerülete. A segédétel értelmében az alap akkor a legkisebb, ha a szár minimális, azaz CP az ABC háromszög magasságvonala (7.c ábra). Jelöljük C_1 -gyel a C -ből induló magasság talppontját. Szerkesszük meg ehhez a ponthoz tartozó minimális kerületű beírt háromszöget, $C_1B_1A_1$ -t.

Belátjuk, hogy B_1 , C_1 is magasságtalppontok. Ha pl. B_1 nem lenne magasságtalppont, akkor az előzőek alapján létezne $C_1B_1A_1$ -nél kisebb kerületű beírt háromszög, amelynek lenne C_1 -től különböző csúcsa az AB oldalon, ami nem lehetséges.

A tükrözésekből adódik az is, hogy $C_1A_1B_{\triangleleft} = B_1A_1C_{\triangleleft}$, $A_1B_1C_{\triangleleft} = C_1B_1A_{\triangleleft}$, $B_1C_1A_{\triangleleft} = A_1C_1C_{\triangleleft}$. A fentiekből következik, hogy a hegyesszögű ABC háromszög magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői.

Megjegyzések. 1. Ha $\gamma \geq 90^\circ$ (7.d ábra), akkor a beírt háromszögek kerülete nagyobb $2CC_1$ -nél és ez nem javítható.

2. Euklideszi esetben könnyen adódik, hogy az A_1B_1C , B_1C_1B , C_1B_1A háromszögek az ABC háromszöghöz hasonlóak.

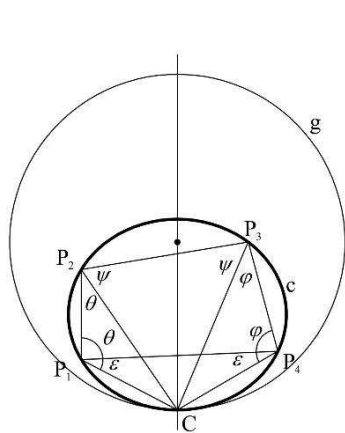
3. Euklideszi geometriában a P_1P_2C egyenlő szárú háromszögek hasonlóak, így a segédétel állítása nyilvánvaló.

4. Euklideszi síkon H. Schwarztól származik egy megoldás, hat tükrözéssel. Fejér Lipót III. éves egyetemi hallgatóként Berlinben volt Schwarznál, ahol megismerte az ő megoldását. Fejér Lipót még Berlinben megtalálta és bemutatta euklideszi esetben a fenti bizonyítást, ami Schwarznak is nagyon tetszett.

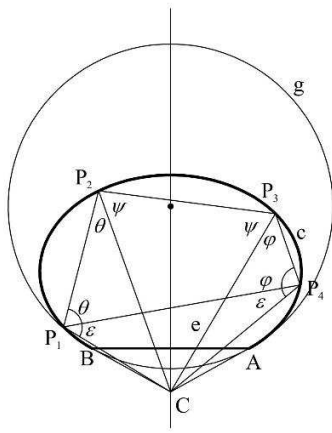
2.4. Ciklusokba írt négyszögek. Az irodalomjegyzékben felsorolt [4], [6] dolgozatokban foglalkoztunk húrnégyszögekkel. Megmutattuk, hogy húrnégyszögekben két szemközti szög összege megegyezik a másik két szemközti szög összegével. A bizonyításban a húrnégyszöghöz tartozó kör középpontja szerepet játszott. A húrnégyszögekre vonatkozó tétel megfordításánál még fel kell tenni, hogy a négyszög három csúcsa által meghatározott háromszögnek létezik körülírt köre. Ekkor már a negyedik csúcs is rajta lesz ezen a körön. A [8] dolgozatban foglalkoztunk a paraciklussal és a hiperciklussal. Ezeket a modellen jól tudjuk szemléltetni. Végtelen sok szimmetria tengelyük van. Körbe írt háromszög oldalfelező merőlegesei metsző, paraciklusba írt háromszög esetén párhuzamos, hiperciklusba írt háromszög esetén nem metsző sugársort alkotnak.

A következőkben csak paraciklusba és hiperciklusba írt négyszögekkel foglalkozunk. Felhasználjuk azt, hogy ha a cikluson felvesszünk két pontot, akkor ezek t

szimmetria tengelye a ciklusnak is szimmetria tengelye. Paraciklus esetén a pontokon átmenő t -vel párhuzamos egyeneseknek is szimmetria tengelye t , hiperciklusnál pedig a megfelelő nem metsző egyenesekre teljesül ugyanez. Így a 8.a és 8.b ábrákon az azonosan jelölt szögek egyenlők.



8.a ábra



8.b ábra

Legyenek a ciklusba írt négyszög csúcsai P_1, P_2, P_3, P_4 , C pedig a tartópont. Ekkor

$$P_1P_4C_{\triangleleft} = P_4P_1C_{\triangleleft} = \varepsilon,$$

$$P_3P_4C_{\triangleleft} = P_4P_3C_{\triangleleft} = \varphi,$$

$$P_2P_1C_{\triangleleft} = P_1P_2C_{\triangleleft} = \theta,$$

$$P_3P_2C_{\triangleleft} = P_2P_3C_{\triangleleft} = \psi,$$

azaz a ciklusba írt négyszög két szemközti szögének összege a másik két szemközti szög összegével egyenlő.

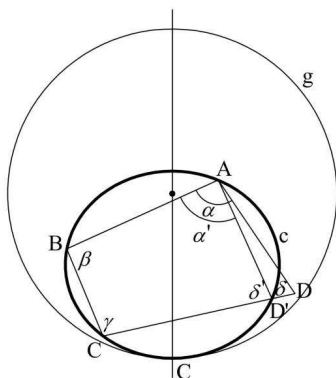
A tétel megfordítása is igaz.

Tétel. Ha egy négyszög két szemközti szögének összege egyenlő a másik két szemközti szög összegével, akkor a négy pont vagy egy körön, vagy egy paracikluson, vagy egy hipercikluson van.

Bizonyítás. *Bizonyítás.* Legyenek az $ABCD$ négyszög szögei rendre $\alpha, \gamma, \beta, \delta$. Tegyük fel indirekt, hogy

$$(1) \quad \alpha + \gamma = \beta + \delta$$

teljesül és a négyszög csúcsai nincsenek egy cikluson. Tekintsük az A, B, C pontokon átmenő ciklust. Ez lehet kör, paraciklus, vagy hiperciklus. Tegyük fel, hogy D nincs ezen a cikluson. Legyen D' az AD egyenes és a ciklus A -tól különböző metszéspontja (9. ábra). Az $ABCD'$ négyszög ciklusba írt négyszög, ezért



9. ábra

$$(2) \quad \alpha + \gamma' = \beta + \delta',$$

ahol γ' -vel és δ' -vel az $ABCD'$ négyszög C -nél és D' -nél levő szögét jelöljük. (1) és (2) alapján $\gamma' - \gamma = \delta' - \delta$, azaz

$$(3) \quad \delta' = (\gamma' - \gamma) + \delta.$$

A DCD' háromszögben δ' belső szög, δ külső szög, ezért $\delta > \delta'$. A (3) egyenlőség nem állhat fenn, hiszen $\gamma' - \gamma > 0$. Ebből következik, hogy D a cikluson van. Ha D a cikluson belül van, akkor is hasonlóan bizonyítható az állítás.

2.5. *Kerületi szögek tételének általánosítása paraciklusra és hiperciklusra.* [4],[6]
dolgozatokból tudjuk, hogy hiperbolikus geometriában nem teljesül az euklideszi geometriában szokott módon megfogalmazott kerületi szögek tétele. A következő megfogalmazásban már abszolút tétel.

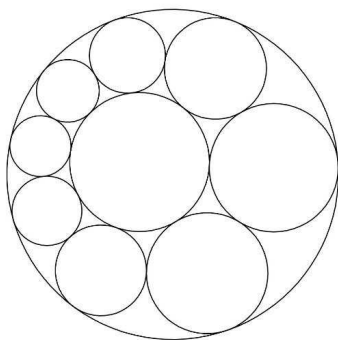
Tétel. Legyenek A és B a c ciklus rögzített pontjai, C pedig az A és a B pontok által meghatározott egyik ciklusív pontja. Ha C mozog ezen az íven, akkor az ABC háromszög α , β , γ szögeire teljesül, hogy $\alpha + \beta - \gamma$ állandó. Ha C a kisebbik íven van, akkor ez az állandó negatív, ha a nagyobbikon, akkor pozitív.

A bizonyítást az Olvasóra bízuk.

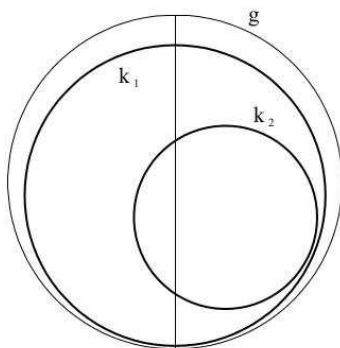
Megjegyzések. 1. Amennyiben a ciklus kör és AB a kör átmérője, akkor $\alpha + \beta - \gamma = 0$, azaz $\gamma = \alpha + \beta$ (Thalesz tétel).

2. Euklideszi esetben $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, tehát $\alpha + \beta - \gamma$, tehát $180^\circ - 2\gamma$ állandó, azaz γ állandó. Ekkor a $\gamma = \alpha + \beta$ egyenlőségből $\gamma = 90^\circ$ adódik.

2.6. Két kör egyike tartalmazza a másikat. Rajzoljunk közéjük a két kört és egymást sorban érintő köröket, egy körláncot képezve (10.a ábra). Előfordulhat, hogy az első és az utolsó kör érintkezik, a körlánc zárt. Steiner azt állította, hogy ha ez egyszer megtörtént, akkor bárhol rajzoljuk meg az első kört, mindig zárt körláncot kapunk a fenti módon. A körök száma véges. Az euklideszi síkon úgy bizonyíthatunk, hogy a két kört inverzióval koncentrikus körökbe visszük át, amely esetben az állítás nyilvánvaló.



10.a ábra



10.b ábra

Bizonyíthatunk úgy is, hogy sztereografikusan felvetítjük a köröket egy gömbfelületre, majd alkalmas sztereografikus vetítéssel a határoló két kört koncentrikus körökbe vetítjük. Az érintő körök képei továbbra is érintő körök lesznek. Ebből az is következik, hogy hasonló állítás igaz gömbfelületen is.

Belátjuk, hogy a fenti állítás igaz hiperbolikus síkon is. Egészítsük ki a modell félgömbjét teljes gömbbő (10.b ábra). Vegyük a két körhöz tartozó érintőkúpokat. A kúpok csúcsait összekötő egyenes metszi a gömbfelületet. Ezen metszéspontok egyikéből vetítsük sztereografikusan a gömbfelületet a ponttal átellenes érintősíkra. A két kör képe két koncentrikus kör lesz. Ebből már következik állításunk helyessége.

2.7. Végül három feladat középiskolai példatárakból.

a) Négy kör ciklikusan érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy az érintési pontok egy körön vannak.

b) Négy kör ciklikusan metszi egymást. A metszéspontok rendre A_1 és A_2 , B_1 és B_2 , C_1 és C_2 , D_1 és D_2 . Ha az A_1 , B_1 , C_1 , D_1 metszéspontok egy körön vannak, akkor az A_2 , B_2 , C_2 , D_2 metszéspontok is egy körön helyezkednek el.

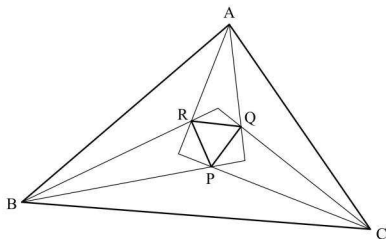
c) Adott hat pont A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 . Ha az A_1 , B_1 , C_2 , a B_1 , C_1 , A_2 , valamint a C_1 , A_1 , B_2 pontokon átmenő körök egy ponton mennek át, akkor az A_2 , B_2 , C_1 , a B_2 , C_2 , A_1 , valamint a C_2 , A_2 , B_1 pontokon átmenő körök is egy pontra illeszkednek.

Ezek az állítások igazak a modellen. (Bizonyítani lehet sztereografikus projekció alkalmazásával, vagy a hűrnégyszögekre vonatkozó tételekre hivatkozással.) A feladatok érdekessége, hogy egyes körök helyett lehet ciklusokat választani és a körökre vonatkozó állítások is módosulhatnak ciklusokra.

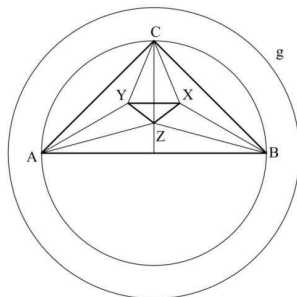
3. Még egy ellenpélda

3.1. Morley tétel. A Morley tétel az euklideszi geometria egyik legszebb tétele. Legyen ABC tetszőleges háromszög az euklideszi síkon. A 11.a ábra szerint rajzoljuk be a háromszög szögharmadoló egyenesait és jelöljük P -vel, Q -val és R -rel a szögharmadoló egyenesek metszéspontjait. A PQR háromszög mindig szabályos (független az ABC háromszög „alakjától”).

Mit mondhatunk a Bolyai-Lobacsevszkij síkon? Találunk-e olyan háromszöget, melyekre teljesül a Morley tétel? Tekintsünk egy szabályos háromszöget. A háromszög középpontját tükrözzük a pólusba. A középpont körül a háromszöget 120° -kal elforgatva a háromszög önmagába megy át. Igaz ez a szögharmadolókra is. Így a PQR háromszög is szabályos lesz. Igaz a Morley tétel a határháromszögekre is. Kérdés, hogyan lehet értelmezni a szögharmadolást, hiszen a háromszög mindegyik szöge 0° . Két párhuzamos egyenes szögét felezni tudjuk.



11.a ábra



11.b ábra

Tekintsük az

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \dots$$

végtelen mértani sort. A sor összege $\frac{1}{3}$. Ez alapján a 0° -os szögnek is közelítően megszerkeszthetjük a harmadát. Vegyük a szögfelezőt, majd ettől „balra” elhelyezkedő szöget felezzük, az új szögszártól „jobbra” levő szöget felezzük, ezután az új szögszártól „balra” felezzük, és így tovább. Így közelítően megkapjuk a szögharmadoló egyenest. Megjegyezzük, hogy ezt a módszert tetszőleges szög harmadának közelítő szerkesztésére is használhatjuk.

Most megadunk egy háromszöget. Legyen ABC a 11.b ábrán levő háromszög ($\gamma = \alpha + \beta$, $AC = BC$). Legyen továbbá $\alpha = \beta = 3\varphi$, $\gamma = 6\varphi$, ahol $0^\circ < \varphi < 15^\circ$. A 7.b ábra jelöléseit és a Bolyai-Lobacsevszki geometriában ismert formulákat alkalmazva kiszámolhatók az XY , $XZ = YZ$ szakaszok hiperbolikus koszinuszait:

$$\varphi = 5^\circ \quad \cosh XY = 8,154682\dots \quad \cosh XZ = 29,712112\dots$$

$$\varphi = 10^\circ \quad \cosh XY = 2,059516\dots \quad \cosh XZ = 5,284542\dots$$

$$\varphi = 12^\circ \quad \cosh XY = 1,214143\dots \quad \cosh XZ = 2,351029\dots$$

Felhasználtuk a szögekre és oldalakra vonatkozó koszinusz tételket, a szinusztételt és a derékszögű háromszögre vonatkozó $\cosh c = \cot \alpha \cdot \cot \beta$ összefüggést.

Először kiszámoljuk a $\delta = CXB_{\triangleleft}$ -t a szögekre vonatkozó koszinusz tételből, majd a szinusz tételből a CX és XB szakaszokat. Egy derékszögű háromszögből a ZB szakaszt, végül koszinusz tétellel a $\cosh XY$ és a $\cosh XZ$ értékeket. Ezekben a konkrét esetekben az XYZ háromszög nem szabályos.

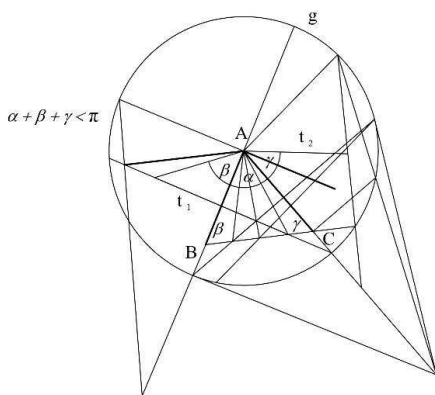
4. Szerkesztések a modellen

Ebben a részben konkrét szerkesztéseket végzünk el a félgömb modellen. Felhasználjuk azt, hogy a modell az euklideszi térben van. Felhasználunk továbbá néhány ábrázoló geometriában alapvető szerkesztése, mint két sík metszésvonalának meghatározása, dőféspont szerkesztése, stb.

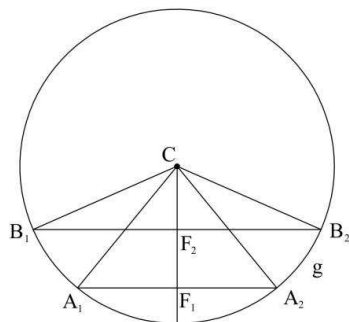
4.1. Adott egy háromszög. Határozzuk meg a háromszög szögeinek összegét!

Megoldás. A szerkesztés didaktikailag is fontos. 2.1.-ben bizonyítottuk, hogy a háromszög szögeinek összege kisebb 180° -nál. Most a konkrét feladat kapcsán erről meg is győződhetünk.

A szögek nagyságát akkor tudjuk merőleges vetületben megállapítani, ha a szög csúcsa a modell pólusában van. Ezért mindhárom szöget külön-külön a pólusba tükrözzük. Szerkesztéssel a szögeket egymás mellé felmérjük. Ekkor már le is mérhetjük a szögek összegét. (Az ábrán a szögek összege közelítőleg 163° .)



12. ábra



13. ábra

Szerkesztéssel arról is meggyőződhetünk, hogyha egy háromszöget tartalmaz egy másik háromszög, akkor tartalmazott háromszög szögeinek összege nagyobb a tartalmazó háromszög szögeinek összegénél.

4.2. Adott az e egyenes és a P rá nem illeszkedő pont. Szerkesszük meg a ponton áthaladó, egyenessel párhuzamos egyeneseket! Határozzuk meg a párhuzamossági szöget!

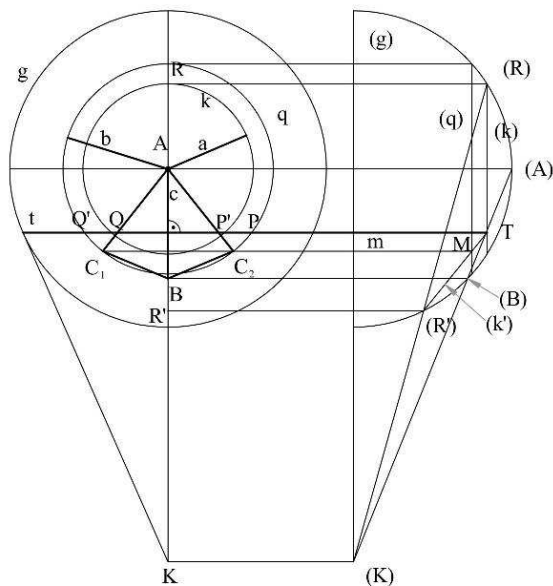
Szerkesztés. Tükrözzük P -t és vele együtt e -t a modell pólusába. Legyenek e végei A_1 és A_2 . Kössük össze P -t A_1 -gyel és A_2 -vel. Ekkor a párhuzamossági szög (13. ábra) nagyságát is meg tudjuk állapítani.

A szerkesztésből az is leolvasható, hogy mekkora a párhuzamossági szöghöz tartozó párhuzamossági távolság. Ezen kívül az is jól látható, hogy a párhuzamossági szög növelésével a párhuzamossági távolság csökken és megfordítva.

4.3. Adott egy háromszög két oldala és az oldalak által bezárt szög. Szerkesszük meg a háromszöget!

Szerkesztés. Felveszünk a modellen egy γ szöget és a közrefogó a, b oldalakat (14. ábra, C_1 csúcsú szög). A γ szög csúcsát a modell pólusába tükrözzük. Az oldalak szakaszainak egyik végpontját szintén a pólusba tükrözzük. Majd mindkét szakaszt a pólus körül a γ szög száraira forgatjuk. Egyiket az egyikre, a másikat a másik szárra. Mindig van megoldás, ha γ kisebb 180° -nál.

esetben $t = PQ$. (Ha k és k' nem metszik egymást, akkor a P és a Q pontok helyett vesszük az R pont átellenes pontját a k körön. És ezzel a ponttal dolgozunk.)



15. ábra

Rajzoljunk a pólus körül b sugarú q kört. Ennek síkja is párhuzamos a határkör síkjával és tőle n távolságban van. A q kör oldalnézetének leforgatottja (q) . Legyen $(q) \cap (k') = M$. A q és a k' körök síkjainak metszésvonala m . Ekkor $C = m \cap q$. Az ábrán az m metszésvonal a C_1 és a C_2 pontokban metszi a q kört, két háromszög adódik, de ezek egybevágók. Ezeket nem tekintjük különböző megoldásnak.

Megoldás akkor van, ha m metszi a q kört. Nyilván a három adott szakaszra teljesülni kell a háromszög egyenlőtlenségnek.

4.6. Adott az ABC háromszög két oldala és a nagyobbikkal szemközti szög. Szerkesszük meg a háromszöget!

Szerkesztés. Legyen $a > b$. Tükrözzük az A pontot a pólusba. Az AC szakasz tükörképénél mérjük fel AC -re A -ból az α szöget, így megkapjuk AB egyenesét. Rajzoljunk A (A a modell pólusa) középpontú „ a ” sugarú k kört. Ezután tükrözzük A -t C -be a k körrel együtt. Legyen k tükörképe k' . A háromszög harmadik, B csúcsát az α szög szárai által meghatározott sík és k' síkjának metszészvonala dőfi ki a modell félgömbjéből. Az $a > b$ feltétel miatt mindig van egy megoldás.

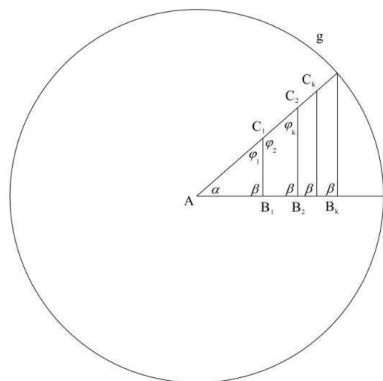
4.7. Adottak az ABC háromszög α és γ szögei, valamint a $c = AB$ oldal. Szerkesszük meg a háromszöget! (Euklideszi geometriában a szögek összege 180° , ezért ez azonos az 5. szerkesztéssel.)

Szerkesztés. Tükrözzük a C pontot a p ólusba. Mérjük fel a γ szöget. Ennek két szára a CA és a CB félegyenes. Az α szög és c oldal ismeretében megszerkeszthetjük a B csúcs távolságát az AC egyenestől, ez legyen d . Ezután meg tudjuk adni az AC egyenestől d távolságra levő h távolságvonalat (hiperciklust). Nyilván a B csúcsot h és a BC egyenes metszéspontja adja. Ennek megszerkesztése úgy történik, hogy a BC egyenes és h síkjának metszéspontját adjuk meg és ez metszi ki a félgömbből a keresett pontot. Ezután már két oldal és a velük szemközti szögek ismeretében a 4.7. esetre vezettük vissza a feladatot.

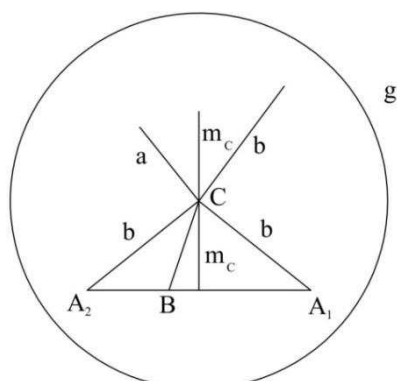
4.8. Adott a háromszög három szöge (α , β , γ). Szerkesszük meg a háromszöget! (Csak közelítő szerkesztéssel sikerült megoldani.)

Először bebizonyítunk egy segédételt.

Segédétel. A $CAB_{\triangleleft} = \alpha$ szög AB szárán felvesszük a $B_1, B_2, B_3, \dots$ pontokat a 16. ábra szerint és felmérjük a β szöget a $B_1A, B_2A, B_3A, \dots$ félegyenesekre a kezdőpontokból kiindulva. A β nagyságú szögek másik szára AC -t a $C_1, C_2, C_3, \dots$ pontokban metszik. A keletkező háromszögek α -tól és β -tól különböző szögeit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ jelöli. Állítjuk, hogy a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ szögek sorozata szigorúan monoton csökken.



16. ábra



17. ábra

Segédétel bizonyítása. Ellenkező esetben található lenne $B_iB_{i+1}C_{i+1}C_i$ négyszög, melyben a szögek összege nem kisebb 360° -nál (2π -nél). Feltéhetjük, hogy

$\gamma \leq \alpha \leq \beta$. Ekkor $AC_1 \geq AB_1$, $AC_2 \geq AB_2$, $AC_3 \geq AB_3$, ... Ebből következik, hogy $\gamma_n \rightarrow 0$.

Szerkesztés (közelítő). Vegyük fel az α szög csúcsát a pólusban. Az AB_1C_1 háromszöget „kicsinek” választjuk. A háromszög területe $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ függvénye, elérhető, hogy $\gamma_1 > \gamma$. A Segédétel felhasználásával könnyű belátni, hogy az AB_1 félegyenesen kiválasztható olyan B' pont, melyben felmérve a β szöget, az így kapott $AB'C'$ háromszögben $\gamma' < \gamma$. Legyen $B' = B_2$. A B_1B_2 szakasz felezőpontját jelöljük B_3 -mal. Az előzőekhez hasonlóan megszerkesztjük az AB_3C_3 háromszöget. Ennek szögei α , β , γ_3 . Három eset lehetséges: $\gamma_3 = \gamma$, ekkor készen vagyunk; $\gamma_3 > \gamma$; $\gamma_3 < \gamma$. Az előbbi esetben B_4 legyen a B_3B_2 szakasz felezőpontja, az utóbbi esetben B_4 legyen a B_1B_3 szakasz felezőpontja. Megszerkesztjük az AB_4C_4 háromszöget, ennek szögei α , β , γ_4 . A γ_4 szögére fennállhat: $\gamma_4 = \gamma$; $\gamma_4 > \gamma$; $\gamma_4 < \gamma$. Egyenlőség esetén készen vagyunk, egyenlőtlenség esetén az előzőek szerint kiválasztjuk a B_5 pontot, megszerkesztjük az AB_5C_5 háromszöget. A háromszög γ_5 szögére megismételjük az előzőeket, stb.

A jól ismert Bolzano tétel alapján a szerkesztendő háromszöget meg tudjuk közelíteni, mert a szakaszok felezésével a szakaszok hossza tart 0-hoz.

4.9. *Adott a háromszög m_c magasságvonala, továbbá az „a” és a b oldalak. Szerkesszük meg a háromszöget!*

Szerkesztés. Vegyük fel a C csúcsot a pólusban. A C pontból kiinduló félegyenesre felmérjük m_c -t (17. ábra). Az m_c szakasz C -től különböző végpontjában merőlegest szerkesztünk. Az „a” és b szakaszok egyik végpontját a pólusba tükrözzük. Megrajzoljuk a C középpontú, „a”, illetve b sugarú köröket. Ezek a merőleges egyenesből kimetszik az A és B csúcsokat.

Diszkusszió.

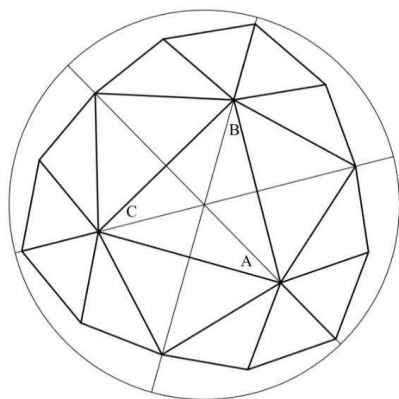
$a, b < m_c$ esetén nincs megoldás.

$a = m_c < b$ esetben 1 megoldás van (derékszögű háromszög).

$m_c < a = b$ esetben 1 megoldás van (egyenlő szárú háromszög).

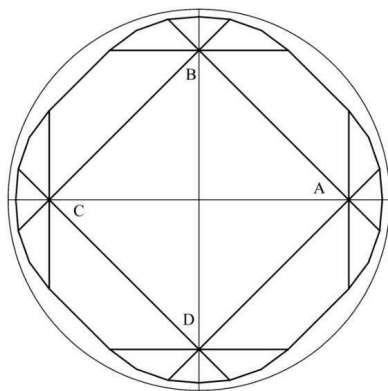
$m_c < a < b$ esetben két megoldás van.

4.10. *A $2\pi/7$ szögű szabályos háromszögből mozaik képezhető [9]. A 18. ábrán a mozaik egy lapja az ABC háromszög, melynek középpontja a pólusban van. Megszerkesztettük a mozaik azon háromszögeit, melyeknek van közös oldala, vagy közös csúcsa az ABC háromszöggel.*



18. ábra

4.11. A $\pi/3$ (60°) szögű szabályos négyszögekből mozaik képezhető [5]. Az ábrán a mozaik egy lapja az $ABCD$ négyszög (19. ábra), melynek középpontja a pólusban van. Megszerkesztettük a mozaik azon négyszögeit, melyeknek van közös oldala, vagy közös csúcsa az $ABCD$ négyszöggel.



19. ábra

A 18. és 19. ábrák jól illusztrálják Kártesi F. [9] és Horváth J. [5] dolgozatokban található néhány eredményét a hiperbolikus síkon.

Irodalomjegyzék

- [1] Bolyai J., Appendix. *A tér tudománya*, (szerk. Kártesi Ferenc), Akadémiai Kiadó, Bp. 1977.

- [2] Drozdyné Schwenner K., A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában (Beszámoló egy tanítási kísérletről), *A Matematika Tanítása*, XXXIV./1., 1987, 12-21.
- [3] Horváth J., Beweise von Satzen mit Hilfe der Modelle der Hyperbolischen Geometrie, *Teaching Mathematics and Computer Science*, 1-2(2003), 159-167.
- [4] Horváth J., A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában I., *A Matematika Tanítása*, XXVII/6. (1980), 161-168.
- [5] Horváth J., Über die regulären Mosaiken der hyperbolischen Ebene, *Ann. Univ. Sci. Bp. Sect. Math.*, VII (1964), 49-53.
- [6] Horváth J., H. Temesvári Á., Papp, Gy., *Bolyai János (1802-1860)*, Nyugat-magyarországi Egyetem Kiadó, Sopron, 2010.
- [7] Horváth J., H. Temesvári Á., Proofs of elementary theorems using models of hyperbolic geometry, *Math. Pannonica*, 23/2(2012), 223-234.
- [8] Horváth J., H. Temesvári Á., Bizonyítások a Poincaré-féle félgömbmodelleken, *Polygon*, XXII/1.2. (2014), 111-122.
- [9] Kárteszi F., Eine Bemerkung über das Dreiecknetz der hyperbolischen Ebene, *Publ. Math. Debrecen*, 5(1957), 142-146.
- [10] Szász P., *Bevezetés a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriába*, Akadémiai Kiadó, Bp., 1973.

*H. Temesvári Ágota, PTE TTK Matematikai és Informatikai Intézet,
7624 Pécs, Ifjúság útja 6.*

Horváth Jenő, 1191 Budapest, Arany J. u. 26.

