

Számtani sorozatok és a poliplettek

RINGLER ANDRÁS

A d növekményű

$$z, z + d, z + 2d, z + 3d, \dots, z + nd$$

számtani sorozattól indulva keresem azokat a $z, d, n, y \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$ és $n \geq 2$ számokat, amelyekkel a

$$z^2 + (z + d)^2 + (z + 2d)^2 + (z + 3d)^2 + \dots + (z + nd)^2 = y^2$$

egyenlőség teljesül. A kijelölt műveletek elvégzésével:

$$z^2(n + 1) + 2zd(1 + 2 + 3 + \dots + n) + d^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = y^2,$$

majd az

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n + 1)n}{2},$$

és az

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

összegző formulák használatával

$$\begin{aligned} (*) \quad & z^2(n + 1) + 2zd \frac{(n + 1)n}{2} + d^2 \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} = \\ & = (n + 1) \left(z^2 + 2zd \frac{n}{2} + d^2 \frac{n(2n + 1)}{6} \right) = y^2 \end{aligned}$$

adódik. Ezen egyenlőség teljesüléséhez olyan n számokat keresek, amelyekkel az $n + 1$ szám négyzetszám; és csak olyanokat, amelyekkel az y^2 szám $y^2 = r^2 u^2 = (n + 1)u^2$ alakba írható ($u \in \mathbb{N}$); ekkor az $n + 1$ -gyel történő egyszerűsítéssel

$$z^2 + 2z \frac{dn}{2} + \frac{d^2 n(2n + 1)}{6} = u^2$$

adódik. E kifejezés bal oldalán, egy hozzáadási-levonási trükkel, teljes négyzetet alakított ki:

$$\begin{aligned} u^2 &= z^2 + 2z\frac{dn}{2} + \left(\frac{dn}{2}\right)^2 + \frac{d^2n(2n+1)}{6} - \left(\frac{dn}{2}\right)^2 \\ &= \left(z + \frac{dn}{2}\right)^2 + \frac{2d^2n^2 + d^2n}{6} - \frac{d^2n^2}{4} = \left(z + \frac{dn}{2}\right)^2 + \frac{4d^2n^2 + 2d^2n - 3d^2n^2}{12} \\ &= \left(z + \frac{dn}{2}\right)^2 + \frac{d^2n^2 + 2d^2n}{12} = \left(z + \frac{dn}{2}\right)^2 + \frac{d^2n(n+2)}{12}, \end{aligned}$$

amelyből átrendezéssel, majd szorzatra bontással a

$$(**) \quad \frac{d^2n(n+2)}{12} = u^2 - \left(z + \frac{dn}{2}\right)^2 = \left(u - z - \frac{dn}{2}\right) \left(u + z + \frac{dn}{2}\right)$$

egyenlőséghez jutok. Mivel e kifejezés *négy* paramétere közül *kettő* értékének, a d és az n változók értékének előre történő megválasztásával elérhető, hogy $(**)$ egyenlőség egész számokkal teljesüljön, ezért a hiányzó u és z paraméterek értékét a $d^2n(n+2)/12$ hányados szorzatokra történő felbontásából, további egyenletek felírásából meghatározhatjuk. A dolog érdekessége abban áll, hogy a d és az n változók értékének előre történő „ügyes” megválasztásával elérhető, hogy a hiányzó z és u paraméterek értéke is, és ezzel az y szám is egész szám legyen. Ezen a tényen Pitagorász bizonyára csodálkozna és abban is biztos vagyok, hogy a kapott paraméterekkel előállított poliplettek létezésének kifejezetten örülne.

A poliplettek előállításához a $d^2n(n+2)/12 = d^2(r^2-1)(r^2+1)/12$ hányados tulajdonságait kell megismerni. Ehhez viszont azt kell megvizsgálni, hogy ez a hányados milyen d és milyen $n = r^2 - 1$ számok esetén lesz egész szám, vagyis hogyan valósulhat meg a 12-vel való oszthatóság.

A. esetként a d szám legyen páratlan egész szám, és ehhez, 3-mal való oszthatóságától függően, további két alesetet rendelhetünk:

A/1. eset: a páratlan d szám legyen 3-mal nem osztható egész szám;

A/2. eset: a páratlan d szám legyen 3-mal osztható egész szám.

Az A/1. esetben a 12-vel való oszthatóságot csak a 3-mal nem osztható, páratlan $r^2 > 1$ négyzetszámok; vagyis csak a 3-mal nem osztható, páratlan $r > 1$ számok biztosíthatják. Ebben az esetben az egymást követő $r^2 - 1$ és az $r^2 + 1$ páros tényezők közül az $r^2 - 1$ tényező biztosan osztható 3-mal, hiszen $r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1)$, és az $(r^2 - 1)(r^2 + 1)$ páros szorzat biztosan osztható 16-tal, ezért 4-gyel történő egyszerűsítés után a $\frac{d^2n(n+2)}{12} = \frac{d^2(r^2-1)(r^2+1)}{12}$ hányados értéke 4-gyel biztosan osztható páros szám lesz.

A mostani esethez tartozó poliplettek előállításához, legegyszerűbb esetként, a $d = 1$ és az $r^2 = 25$ értékeket választom, amelyekkel a

$$\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2(r^2-1)(r^2+1)}{12} = \frac{1^2 \cdot 24 \cdot 26}{12} = 52 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$$

és a

$$\frac{dn}{2} = \frac{1 \cdot 24}{2} = 12$$

értékekhez jutok. Az $52 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ prímtényezőkre bontásból, (**) alapján, az alábbi eseteket írhatjuk fel.

a. eset: Ha $u - z - 12 = 2$ és $u + z + 12 = 26$, akkor $u = 14$ és $z = 0$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 25 \cdot 196 = 4900 = 70^2$; ezért a keresett 25 tagból álló sorozat tagjai:

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, 22, 23, 24; \text{ amelyekkel teljesül a } \\ 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 70^2$$

egyenlőség. Vegyük észre, hogy így (a nullával együtt) az első 25 egész szám négyzeteinek az összegét kaptuk meg.

b. eset: Ha $u - z - 12 = 26$ és $u + z + 12 = 2$, akkor $u = 14$ és $z = -24$, így $y^2 = (n+1) \cdot u^2 = 25 \cdot 196 = 4900 = 70^2$; ezért a keresett 25 tagból álló sorozat tagjai:

$$-24, -23, -22, -21, -20, \dots, -2, -1, 0.$$

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai az *a. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnak.

Könnyű belátni, hogy további esetek nem létezhetnek, hiszen a szorzatra bontásból adódó egyenletek jobb oldalain csak páros számok lehetnek; ezért a megkívánt tulajdonságokkal csupán az *a. alesetben* bemutatott primitív poliplett létezhet. Ha megfelednénk arról, hogy a szorzatra bontásból adódó egyenletek jobb oldalán csak páros számok lehetnek, akkor is érdekes eredményekhez juthatunk; hiszen az $1 \cdot 52$, $52 \cdot 1$, $13 \cdot 4$ és a $4 \cdot 13$ szorzat lehetőségek bármelyikének felhasználásával előállított „hamis” poliplettekből könnyű valódi polipletteket csinálni, de ennek tárgyalására a későbbiekben még visszatérek.

Az $A/1$. esethez tartozó további poliplettek előállításához egy kicsivel „bonyolultabb” példát is választok. A $d = 1$ és $r^2 = 49$ értékekkel a

$$\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2(r^2-1)(r^2+1)}{12} = \frac{1^2 \cdot 48 \cdot 50}{12} = 200 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

és a

$$\frac{dn}{2} = \frac{1 \cdot 48}{2} = 24$$

értékekhez jutok; így a $200 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ prímtényezőkre bontásból adódóan, (***) alapján, az alábbi eseteket írhatjuk fel.

a. eset: Ha $u - z - 24 = 2$ és $u + z + 24 = 100$, akkor $u = 51$ és $z = 25$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 49 \cdot 2601 = 127449 = 357^2$, ezért a keresett 49 tagból álló sorozat tagjai:

25, 26, 27, 28, 29, $\dots$, 70, 71, 72, 73; amelyekkel teljesül a

$$25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 + \dots + 71^2 + 72^2 + 73^2 = 127449 = 357^2$$

egyenlőség.

b. eset: Ha $u - z - 24 = 4$ és $u + z + 24 = 50$, akkor $u = 27$ és $z = -1$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 49 \cdot 729 = 35721 = 189^2$; ezért a keresett 49 tagból álló sorozat tagjai:

-1, 0, 1, 2, 3, $\dots$, 44, 45, 46, 47; amelyekkel teljesül a

$$(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 45^2 + 46^2 + 47^2 = 35721 = 189^2$$

egyenlőség.

c. eset: Ha $u - z - 24 = 10$ és $u + z + 24 = 20$, akkor $u = 15$ és $z = -19$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 49 \cdot 225 = 11025 = 105^2$; ezért a keresett 49 tagból álló sorozat tagjai:

-19, -18, -17, -16, -15, $\dots$, 26, 27, 28, 29; amelyekkel teljesül a

$$(-19)^2 + (-18)^2 + (-17)^2 + (-16)^2 + (-15)^2 + \dots + 27^2 + 28^2 + 29^2 = 11025 = 105^2$$

egyenlőség.

d. eset: Ha $u - z - 24 = 20$ és $u + z + 24 = 10$, akkor $u = 15$ és $z = -29$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 49 \cdot 225 = 11025 = 105^2$; ezért a keresett 49 tagból álló sorozat tagjai:

-29, -28, -27, -26, -25, $\dots$, 16, 17, 18, 19.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai a *c. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnak.

e. eset: Ha $u - z - 24 = 50$ és $u + z + 24 = 4$, akkor a *b. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szereseit kapjuk vissza; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnak.

f. eset: Ha $u - z - 24 = 100$ és $u + z + 24 = 2$, akkor az *a. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szereseit kapjuk vissza; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnak.

Könnyű belátni, hogy további esetek nem létezhetnek, hiszen a szorzatra bontásból adódó egyenletek jobb oldalain csak páros számok lehetnek; ezért a megkívt tulajdonságokkal csupán az a ., a b . és a c . *alesetekben* bemutatott primitív poliplettek létezhetnek.

Ha megfeledekeznénk arról, hogy a mostani esetben is a szorzatra bontásból adódó egyenletek jobb oldalain csak páros számok lehetnek, és ezért ha felíránk az $1 \cdot 200, 200 \cdot 1, 5 \cdot 40, 40 \cdot 5, 8 \cdot 25, 25 \cdot 8$ lehetőségek közül például az $u - z - 24 = 5$ és az $u + z + 24 = 40$ egyenleteket akkor megoldásként $u = 22, 5$ és $z = -6, 5$ adódik; így $y^2 = (n + 1)u^2 = 49 \cdot 506, 25 = 24806, 25 = 157, 5^2$ ezért a keresett 49 tagból álló, nem egész számokból álló sorozat tagjai:

$$-6, 5; -5, 5; -4, 5; -3, 5; -2, 5; \dots, 38, 5; 39, 5; 40, 5; 41, 5$$

lesznek. Vegyük észre, hogyha ezen „*hamis*” sorozat tagjait megszorozzuk 2-vel, akkor a

$$-13, -11, -9, -7, -5, \dots, 77, 79, 81, 83$$

sorozathoz, vagyis egy 49 tagból álló, a $d = 2$ -es növekménnyel előállított valódi polipletthez jutunk, amelyre teljesül a

$$\begin{aligned} & (-13)^2 + (-11)^2 + (-9)^2 + (-7)^2 + (-5)^2 + \dots + 79^2 + 81^2 + 83^2 = 99225 = 315^2 = \\ & = (2 \cdot 157, 5)^2 \end{aligned}$$

egyenlőség.

Az $A/2$. esetben, amikor a páratlan d szám 3-mal osztható, akkor a 4-gyel való oszthatóságot bármilyen páratlan, $r^2 > 1$ négyzetszám biztosítani tudja; hiszen ilyenkor az egymást követő $r^2 - 1$ és az $r^2 + 1$ páros tényezők szorzata nem csak 4-gyel, de 16-tal is osztható; ezért a $\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2 (r^2 - 1)(r^2 + 1)}{12}$ hányados értéke 4-gyel osztható páros egész szám lesz.

Az $A/2$. esethez tartozó poliplettek előállításához legegyszerűbb példaként a $d = 3$ és $r^2 = 9$ értékeket választom, amelyekkel a

$$\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2 (r^2 - 1)(r^2 + 1)}{12} = \frac{3^2 \cdot 8 \cdot 10}{12} = 60 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

és a

$$\frac{dn}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$$

értékekhez jutok. A $60 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ prímtenyezőkre bontásból adódóan, (**) alapján, az alábbi eseteket írhatjuk fel.

a. eset: Ha $u - z - 12 = 2$ és $u + z + 12 = 30$, akkor $u = 16$ és $z = 2$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 9 \cdot 256 = 2304 = 48^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26; \text{ amelyekkel teljesül a}$$

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 20^2 + 23^2 + 26^2 = 2304 = 48^2$$

egyenlőség.

b. eset: Ha $u - z - 12 = 6$ és $u + z + 12 = 10$, akkor $u = 8$ és $z = -10$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 64 = 576 = 24^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$-10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14$; amelyekkel teljesül a

$$(-10)^2 + (-7)^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 = 576 = 24^2$$

egyenlőség.

c. eset: Ha $u - z - 12 = 10$ és $u + z + 12 = 6$, akkor $u = 8$ és $z = -14$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 64 = 576 = 24^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$-14, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10$.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai a *b. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei, ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnek.

d. eset: Ha $u - z - 12 = 30$ és $u + z + 12 = 2$, akkor $u = 16$ és $z = -26$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 256 = 2304 = 48^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$-26, -23, -20, -17, -14, -11, -8, -5, -2$.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai az *a. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei, ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnek.

Ha megint megfedekezni arról, hogy az egyenletek jobb oldalain csak páros számok lehetnek, és ezért felírnánk például az $u - z - 12 = 3$ és az $u + z + 24 = 20$ egyenleteket, akkor ezekből $u = 11,5$ és $z = -3,5$ adódik, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 132,25 = 1190,25 = 34,5^2$, ezért a keresett 9 tagból álló, nem egész számokból álló sorozat tagjai:

$-3,5; -0,5; 2,5; 5,5; 8,5; 11,5; 14,5; 17,5; 20,5$ lesznek.

Vegyük észre, hogyha ezen „*hamis*” sorozat tagjait megszorozzuk 2-vel, akkor a

$-7, -1, 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41$

sorozathoz, vagyis egy 9 tagból álló, a $d = 6$ -os növekménnyel előállított poliplett-hez jutunk, amelyre teljesül a

$$(-7)^2 + (-1)^2 + 5^2 + 11^2 + 17^2 + 23^2 + 29^2 + 35^2 + 41^2 = 4761 = 69^2 = (2 \cdot 34,5)^2$$

egyenlőség (lásd később, a $B/2$. esetben, a $d = 6$ és $r^2 = 9$ értékekhez tartozó *e. alesetet!*).

B. esetként a d szám legyen páros egész szám és ehhez, 3-mal történő oszthatóságától függően további két alesetet rendelhetünk:

B/1. eset: a páros d szám legyen 3-mal nem osztható egész szám; vagyis $d = 2k$ alakú, de a k számnak a 3 nem lehet osztója ($k = 1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots$).

$B/2$. eset; a páros d szám legyen 3-mal osztható egész szám; vagyis $d = 6k$ és $k \in \mathbb{N}$.

A $B/1$. esetben a 3-mal való oszthatóságot bármilyen 3-mal nem osztható, $r^2 > 1$ négyzetszám biztosítani tudja; hiszen ilyenkor az $r^2 - 1$ és az $r^2 + 1$ tényezők egyike, az $r^2 - 1$ tényező biztosan osztható 3-mal. Egy ilyen eset első bemutatásához a lehető legkisebb, vagyis a $d = 2$ és az $r^2 = 4$ értékeket választom, így velük a

$$\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2(r^2-1)(r^2+1)}{12} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5}{12} = 5 = 1 \cdot 5$$

és a

$$\frac{dn}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

értékekhez jutok; ezért az $5 = 1 \cdot 5$ prímtenyezőkre való bontásból adódóan csak az alábbi két esetet írható fel.

a. eset: Ha $u - z - 3 = 1$ és $u + z + 3 = 5$, akkor $u = 3$ és $z = -1$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 4 \cdot 9 = 36 = 6^2$; ezért a keresett 4 tagból álló sorozat tagjai:

$-1, 1, 3, 5$; amelyekkel teljesül a

$$(-1)^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 = 36 = 6^2$$

egyenlőség.

b. eset: Ha $u - z - 3 = 5$ és $u + z + 3 = 1$, akkor $u = 3$ és $z = -5$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 4 \cdot 9 = 36 = 6^2$; ezért a keresett 4 tagból álló sorozat tagjai:

$-5, -3, -1, 1$.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai az *a. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei, ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnek.

A $B/1/1$. eset „jobb” bemutatásához, a $d = 2$ és az $r^2 = 16$ számok választásával a

$$\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2(r^2-1)(r^2+1)}{12} = \frac{2^2 \cdot 15 \cdot 17}{12} = 85 = 1 \cdot 5 \cdot 17$$

és a

$$\frac{dn}{2} = \frac{2 \cdot 15}{2} = 15$$

értékekhez jutok. A $85 = 1 \cdot 5 \cdot 17$ prímtenyezőkre bontásból adódóan, $(**)$ alapján, az alábbi esetek írhatók fel.

a. eset: Ha $u - z - 15 = 1$ és $u + z + 15 = 85$, akkor $u = 43$ és $z = 27$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 16 \cdot 1849 = 29584 = 172^2$; ezért a keresett 16 tagból álló sorozat tagjai:

27, 29, 31, 33, $\dots$, 51, 53, 55, 57; amelyekkel teljesül a

$$27^2 + 29^2 + 31^2 + 33^2 + \dots + 51^2 + 53^2 + 55^2 + 57^2 = 29584 = 172^2$$

egyenlőség.

b. eset: Ha $u - z - 15 = 5$ és $u + z + 15 = 17$, akkor $u = 11$ és $z = -9$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 16 \cdot 121 = 1936 = 44^2$, ezért a keresett 16 tagból álló sorozat tagjai:

-9, -7, -5, -3, $\dots$, 15, 17, 19, 21; amelyekkel teljesül a

$$(-9)^2 + (-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 + \dots + 15^2 + 17^2 + 19^2 + 21^2 = 1936 = 44^2$$

egyenlőség.

c. eset: Ha $u - z - 15 = 17$ és $u + z + 15 = 5$, akkor $u = 11$ és $z = -21$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 16 \cdot 121 = 1936 = 44^2$, ezért a keresett 16 tagból álló sorozat tagjai:

-21, -19, -17, -15, $\dots$, 3, 5, 7, 9.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai a *b. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnek.

d. eset: Ha $u - z - 15 = 85$ és $u + z + 15 = 1$, akkor $u = 43$ és $z = -57$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 16 \cdot 1849 = 29584 = 172^2$, ezért a keresett 16 tagból álló sorozat tagjai:

-57, -55, -53, -51, $\dots$, -33, -31, -29, -27.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai az *a. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnek.

A bemutatott esetek kapcsán vegyük észre, hogy az egyenletek jobb oldalán, a $85 = 1 \cdot 5 \cdot 17$ szorzatra bontásból adódóan, csak páratlan számok léptek fel.

A *B/1.* esethez, az előzőnél egy kicsivel „bonyolultabb” példaként, a $d = 2$ és az $r^2 = 25$ választással a

$$\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2 (r^2 - 1)(r^2 + 1)}{12} = \frac{2^2 \cdot 24 \cdot 26}{12} = 208 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$$

és a

$$\frac{dn}{2} = \frac{2 \cdot 24}{2} = 24$$

értékekhez jutok. A $208 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ prímtényezőkre bontásból adódóan, $(**)$ alapján, az alábbi eseteket írhatjuk fel.

a. eset: Ha $u - z - 24 = 2$ és $u + z + 24 = 104$, akkor $u = 53$ és $z = 27$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 25 \cdot 2809 = 70225 = 265^2$, ezért a keresett 25 tagból álló sorozat tagjai:

27, 29, 31, 33, $\dots$, 69, 71, 73, 75; amelyekkel teljesül a

$$27^2 + 29^2 + 31^2 + 33^2 + \dots + 69^2 + 71^2 + 73^2 + 75^2 = 70225 = 265^2$$

egyenlőség.

b. eset: Ha $u - z - 24 = 4$ és $u + z + 24 = 52$, akkor $u = 28$ és $z = 0$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 25 \cdot 784 = 19600 = 140^2$, ezért a keresett 25 tagból álló sorozat tagjai:

0, 2, 4, 6, $\dots$, 42, 44, 46, 48; amelyekkel teljesül a

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 42^2 + 44^2 + 46^2 + 48^2 = 19600 = 140^2 = 4 \cdot 70^2$$

egyenlőség. Vegyük észre, hogy a kapott sorozat tagjainak 2-vel történő elosztásával a 0, 1, 2, 3, $\dots$, 21, 22, 23, 24 sorozathoz, vagyis az első 25 szám alkotta poliplettéhez jutunk (lásd az *A/1.* esetbenél a $d = 1$ és az $r^2 = 25$ értékekhez tartozó *a. alesetet!*).

c. eset: Ha $u - z - 24 = 8$ és $u + z + 24 = 26$, akkor $u = 17$ és $z = -15$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 25 \cdot 289 = 7225 = 85^2$, ezért a keresett 25 tagból álló sorozat tagjai:

-15, -13, -11, -9, $\dots$, 27, 29, 31, 33; amelyekkel teljesül a

$$(-15)^2 + (-13)^2 + (-11)^2 + (-9)^2 + \dots + 27^2 + 29^2 + 31^2 + 33^2 = 7225 = 85^2$$

egyenlőség.

d. eset: Ha $u - z - 24 = 26$ és $u + z + 24 = 8$, akkor $u = 17$ és $z = -33$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 25 \cdot 289 = 7225 = 85^2$, ezért a keresett 25 tagból álló sorozat tagjai:

-33, -31, -29, -27, $\dots$, 9, 11, 13, 15.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai a *c. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnek.

e. eset: Ha $u - z - 24 = 52$ és $u + z + 24 = 4$, akkor $u = 28$ és $z = -48$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 25 \cdot 784 = 19600 = 140^2$, ezért a keresett 25 tagból álló sorozat tagjai:

-48, -46, -44, -42, $\dots$, 6, 4, 2, 0.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai a *b. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnek.

f. eset: Ha $u - z - 24 = 104$ és $u + z + 24 = 2$, akkor $u = 53$ és $z = -75$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 25 \cdot 2809 = 70225 = 265^2$, ezért a keresett 25 tagból álló sorozat tagjai:

-75, -73, -71, -69, $\dots$, -33, -31, -29, -27.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai az *a. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnak.

A bemutatott esetek kapcsán vegyünk észre, hogy az egyenletek jobb oldalán, a $208 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ szorzatra bontásból adódóan, csak páros tényezőket írtam fel. A páratlan tényezők megengedése megint „**hamis**” poliplettekhez vezet.

A *B/2.* esetben a 12-vel való oszthatóságot a d szám egymaga „biztosítja”, ezért ilyenkor a poliplettek előállításához bármilyen, $r^2 > 1$ négyzetszám választható. Ezen eset bemutatásához, legegyszerűbb esetként, a $d = 6$ és az $r^2 = 4$ számokat választva a

$$\frac{d^2 n \cdot (n+2)}{12} = \frac{d^2 (r^2 - 1)(r^2 + 1)}{12} = \frac{6^2 \cdot 3 \cdot 5}{12} = 45 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

és a

$$\frac{dn}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

értékekhez jutunk. A $45 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ prímtényezőkre bontásból adódóan, (**) alapján, a páratlan tényezőssé lehetőségekkel az alábbi eseteket írhatjuk fel.

a. eset: Ha $u - z - 9 = 1$ és $u + z + 9 = 45$, akkor $u = 23$ és $z = 13$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 4 \cdot 529 = 2116 = 46^2$, ezért a keresett 4 tagból álló sorozat tagjai:

13, 19, 25, 31; amelyekkel teljesül a

$$13^2 + 19^2 + 25^2 + 31^2 = 2116 = 46^2$$

egyenlőség.

b. eset: Ha $u - z - 9 = 3$ és $u + z + 9 = 15$, akkor $u = 9$ és $z = -3$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 4 \cdot 81 = 324 = 18^2$, ezért a keresett 4 tagból álló sorozat tagjai:

-3, 3, 9, 15; amelyekkel teljesül a

$$(-3)^2 + 3^2 + 9^2 + 15^2 = 324 = 18^2$$

egyenlőség. Vegyük észre, hogyha a kapott sorozat tagjait 3-mal elosztjuk, akkor a $-1, 1, 3, 5$ tagokból álló, a már korábban bemutatott primitív poliplettet kapjuk (lásd a *B/1.* esetnél az *a. alesetet!*).

c. eset: Ha $u - z - 9 = 5$ és $u + z + 9 = 9$, akkor $u = 7$ és $z = -7$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 4 \cdot 49 = 196 = 14^2$, ezért a keresett 4 tagból álló sorozat tagjai:

-7, -1, 5, 11; amelyekkel teljesül a

$$(-7)^2 + (-1)^2 + 5^2 + 11^2 = 196 = 14^2$$

egyenlőség.

d. eset: Ha $u - z - 9 = 9$ és $u + z + 9 = 5$, akkor $u = 7$ és $z = -11$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 4 \cdot 49 = 196 = 14^2$, ezért a keresett 4 tagból álló sorozat tagjai:

$-11, -5, 1, 7.$

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai a *c. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnak.

e. eset: Ha $u - z - 9 = 15$ és $u + z + 9 = 3$, akkor $u = 9$ és $z = -15$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 4 \cdot 81 = 324 = 18^2$, ezért a keresett 4 tagból álló sorozat tagjai:

$-15, -9, -3, 3.$

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai a *b. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnak.

f. eset: Ha $u - z - 9 = 45$ és $u + z + 9 = 1$, akkor $u = 23$ és $z = -31$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 4 \cdot 529 = 2116 = 46^2$, ezért a keresett 4 tagból álló sorozat tagjai:

$-31, -25, -19, -13.$

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai a *a. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnak.

A bemutatott esetek kapcsán vegyük észre, hogy a felírt egyenletek jobb oldalán csak páratlan tényezők léptek fel.

A $B/2$. esethez további példaként, a $d = 6$ és az $r^2 = 9$ választással a

$$\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2 (r^2 - 1)(r^2 + 1)}{12} = \frac{6^2 \cdot 8 \cdot 10}{12} = 240 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

és a

$$\frac{dn}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

értékekhez jutok. A $240 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ prímtenyezőkre bontásból adódóan, $(**)$ alapján, a páros tényezőssé lehetőségekkel csak az alábbi eseteket írhatjuk fel.

a. eset: Ha $u - z - 24 = 2$ és $u + z + 24 = 120$, akkor $u = 61$ és $z = 35$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 3721 = 33489 = 183^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$35, 41, 47, 53, 59, 65, 71, 77, 83$; amelyekkel teljesül a

$$35^2 + 41^2 + 47^2 + 53^2 + 59^2 + 65^2 + 71^2 + 77^2 + 83^2 = 33489 = 183^2$$

egyenlőség.

b. eset: Ha $u - z - 24 = 4$ és $u + z + 24 = 60$, akkor $u = 32$ és $z = 4$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 1024 = 9216 = 96^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52$; amelyekkel teljesül a

$$4^2 + 10^2 + 16^2 + 22^2 + 28^2 + 34^2 + 40^2 + 46^2 + 52^2 = 9216 = 96^2$$

egyenlőség. Vegyük észre, hogy a kapott sorozat tagjait 2-vel elosztva a 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 tagokból álló primitív polipletthez jutunk, amelyet a $d = 3$ és $r^2 = 9$ értékekkel korábban már előállítottam (lásd az $A/2$. eset *a. alesetét!*).

c. eset: Ha $u - z - 24 = 6$ és $u + z + 24 = 40$, akkor $u = 23$ és $z = -7$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 529 = 4761 = 69^2$; ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$-7, -1, 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41$; amelyekkel teljesül a

$$(-7)^2 + (-1)^2 + 5^2 + 11^2 + 17^2 + 23^2 + 29^2 + 35^2 + 41^2 = 4761 = 69^2$$

egyenlőség.

d. eset: Ha $u - z - 24 = 8$ és $u + z + 24 = 30$, akkor $u = 19$ és $z = -13$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 361 = 3249 = 57^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$-13, -7, -1, 5, 11, 17, 23, 29, 35$; amelyekkel teljesül a

$$(-13)^2 + (-7)^2 + (-1)^2 + 5^2 + 11^2 + 17^2 + 23^2 + 29^2 + 35^2 = 3249 = 57^2$$

egyenlőség.

e. eset: Ha $u - z - 24 = 10$ és $u + z + 24 = 24$, akkor $u = 17$ és $z = -17$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 289 = 2601 = 51^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$-17, -11, -5, 1, 7, 13, 19, 25, 31$; amelyekkel teljesül a

$$(-17)^2 + (-11)^2 + (-5)^2 + 1^2 + 7^2 + 13^2 + 19^2 + 25^2 + 31^2 = 2601 = 51^2$$

egyenlőség.

f. eset: Ha $u - z - 24 = 12$ és $u + z + 24 = 20$, akkor $u = 16$ és $z = -20$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 256 = 2304 = 48^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$-20, -14, -8, -2, 4, 10, 16, 22, 28$; amelyekkel teljesül a

$$(-20)^2 + (-14)^2 + (-8)^2 + (-2)^2 + 4^2 + 10^2 + 16^2 + 22^2 + 28^2 = 2304 = 48^2$$

egyenlőség. Vegyük észre, hogy a kapott sorozat tagjait 2-vel elosztva a $-10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14$ tagokból álló primitív polipletthez jutunk, amelyet korábban a $d = 3$ és $r^2 = 9$ értékekkel már előállítottam (lásd az $A/2$. eset *b. alesetét!*)

g. eset: Ha $u - z - 24 = 20$ és $u + z + 24 = 12$, akkor $u = 16$ és $z = -28$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 9 \cdot 256 = 2304 = 48^2$, ezért a keresett 9 tagból álló sorozat tagjai:

$-28, -22, -16, -10, -4, 2, 8, 14, 20$.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai az *f. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei, ezért ezt nem tekinthetjük primitív polipletnek.

Ha tovább folytatjuk az egyenletek jobb oldalán a szorzatra bontásból adódó páros számok felcserélését, akkor visszakapjuk az *e.*, *d.*, *c.*, *b.* és az *a. alesetekhez* tartozó sorozatok (-1) -szereseit, amelyeket azonban nem tekinthetünk primitív polipletteknek.

A $B/2$. esethez újabb példaként, a $d = 6$ és az $r^2 = 36$ választással a

$$\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2(r^2-1)(r^2+1)}{12} = \frac{6^2 \cdot 35 \cdot 37}{12} = 3885 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 37$$

és a

$$\frac{dn}{2} = \frac{6 \cdot 35}{2} = 105$$

értékekhez jutok. A $3885 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 37$ prímtényezőkre bontásból adódóan, (**) alapján, a páratlan tényezőssé lehetőségekkel az alábbi eseteket írhatjuk fel.

a. eset: Ha $u - z - 105 = 1$ és $u + z + 105 = 3885$, akkor $u = 1943$ és $z = 1837$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 36 \cdot 3775249 = 135908964 = 11658^2$, ezért a keresett 36 tagból álló sorozat tagjai:

1837, 1843, 1849, 1855, $\dots$, 2035, 2041, 2047, amelyekkel teljesül az

$$1837^2 + 1843^2 + 1849^2 + 1855^2 + \dots + 2035^2 + 2041^2 + 2047^2 = 135\,908\,964 = 11658^2$$

egyenlőség.

b. eset: Ha $u - z - 105 = 3$ és $u + z + 105 = 1295$, akkor $u = 649$ és $z = 541$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 36 \cdot 421201 = 15\,163\,236 = 3894^2$, ezért a keresett 36 tagból álló sorozat tagjai:

541, 547, 553, 559, $\dots$, 739, 745, 751, amelyekkel teljesül az

$$541^2 + 547^2 + 553^2 + 559^2 + \dots + 739^2 + 745^2 + 751^2 = 15\,163\,236 = 3894^2$$

egyenlőség.

c. eset: Ha $u - z - 105 = 5$ és $u + z + 105 = 777$, akkor $u = 391$ és $z = 281$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 36 \cdot 152881 = 5\,503\,716 = 2346^2$, ezért a keresett 36 tagból álló sorozat tagjai:

281, 287, 293, 299, $\dots$, 479, 485, 491, amelyekkel teljesül a

$$281^2 + 287^2 + 293^2 + 299^2 + \dots + 479^2 + 485^2 + 491^2 = 5\,503\,716 = 2346^2$$

egyenlőség.

d. eset: Ha $u - z - 105 = 7$ és $u + z + 105 = 555$, akkor $u = 281$ és $z = 169$, így $y^2 = (n+1)u^2 = 36 \cdot 78961 = 2\,842\,596 = 1686^2$, ezért a keresett 36 tagból álló sorozat tagjai:

169, 175, 181, 187, $\dots$, 367, 373, 379; amelyekkel teljesül a

$$169^2 + 175^2 + 181^2 + 187^2 + \dots + 367^2 + 373^2 + 379^2 = 2\,842\,596 = 1686^2$$

egyenlőség.

e. eset: Ha $u - z - 105 = 15$ és $u + z + 105 = 259$, akkor $u = 137$ és $z = 17$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 36 \cdot 18769 = 675\,684 = 822^2$, ezért a keresett 36 tagból álló sorozat tagjai:

17, 23, 29, 35, $\dots$, 215, 221, 227, amelyekkel teljesül a

$$17^2 + 23^2 + 29^2 + 35^2 + \dots + 215^2 + 221^2 + 227^2 = 675\,684 = 822^2$$

egyenlőség.

f. eset: Ha $u - z - 105 = 21$ és $u + z + 105 = 185$, akkor $u = 103$ és $z = -23$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 36 \cdot 10609 = 381\,924 = 618^2$, ezért a keresett 36 tagból álló sorozat tagjai:

-23, -17, -11, -5, $\dots$, 165, 181, 187, amelyekkel teljesül a

$$(-23)^2 + (-17)^2 + (-11)^2 + (-5)^2 + \dots + 165^2 + 181^2 + 187^2 = 381\,924 = 618^2$$

egyenlőség.

g. eset: Ha $u - z - 105 = 35$ és $u + z + 105 = 111$, akkor $u = 73$ és $z = -67$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 36 \cdot 5329 = 191\,844 = 438^2$, ezért a keresett 36 tagból álló sorozat tagjai:

-67, -61, -55, -49, $\dots$, 131, 137, 143; amelyekkel teljesül a

$$(-67)^2 + (-61)^2 + (-55)^2 + (-49)^2 + \dots + 131^2 + 137^2 + 143^2 = 191\,844 = 438^2$$

egyenlőség.

h. eset: Ha $u - z - 105 = 37$ és $u + z + 105 = 105$, akkor $u = 71$ és $z = -71$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 36 \cdot 5041 = 181\,476 = 426^2$, ezért a keresett 36 tagból álló sorozat tagjai:

-71, -65, -59, -53, $\dots$, 127, 133, 139; amelyekkel teljesül a

$$(-71)^2 + (-65)^2 + (-59)^2 + (-53)^2 + \dots + 127^2 + 133^2 + 139^2 = 181\,476 = 426^2$$

egyenlőség.

g. eset: Ha $u - z - 105 = 105$ és $u + z + 105 = 37$, akkor $u = 71$ és $z = -139$, így $y^2 = (n + 1)u^2 = 36 \cdot 5041 = 181\,476 = 426^2$, ezért a keresett 36 tagból álló sorozat tagjai:

-139, -133, -127, -121, $\dots$, 53, 59, 65, 71.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat tagjai a *h. alesethez* tartozó sorozat tagjainak a (-1) -szeresei; ezért ezt nem tekinthetjük primitív poliplettnak.

Ha tovább folytatnánk az egyenletek jobb oldalán a szorzatra bontásból adódó páratlan számok felcserélését, akkor a *g.*, *f.*, *e.*, *d.*, *c.*, *b.* és az *a. alesetekhez* tartozó sorozatok (-1) -szereseit kapjuk vissza, amelyeket azonban nem tekinthetünk primitív poliplettnak.

E dolgozat befejezéséként talán érdemes elgondolkozni azon, hogy például a 3-as kitevővel felírt, kettőnél több tagból álló egész számok összege adhat-e köbszámot.

Összefoglalás

A/1. eset: $2 \nmid d$ és $3 \nmid d$ tulajdonságú d számok választása esetén a poliplettek létezéséhez teljesülnie kell, hogy $3 \mid (r^2 - 1)(r^2 + 1)$ és $2 \mid (r^2 - 1)(r^2 + 1)$, az ezeket biztosító $r^2 > 1$ négyzetszámokra viszont teljesülnie kell, hogy $3 \nmid r^2$ és $2 \nmid r^2$.

Előállított poliplettek $d = 1$ és $r^2 = 25$ esetén:

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, 22, 23, 24; \quad \mathbf{70}.$$

$d = 1$ és $r^2 = 49$ esetén:

$$25, 26, 27, 28, 29, \dots, 70, 71, 72, 73; \quad \mathbf{357}.$$

$$-1, 0, 1, 2, 3, \dots, 44, 45, 46, 47; \quad \mathbf{189}.$$

$$-19, -18, -17, -16, -15, \dots, 26, 27, 28, 29; \quad \mathbf{105}.$$

A/2. eset: $2 \nmid d$ és $3 \mid d$ tulajdonságú d számok választása esetén a poliplettek létezéséhez teljesülnie kell, hogy $2 \mid (r^2 - 1)(r^2 + 1)$, ezért az r^2 számok csak páratlan négyzetszámok lehetnek ($r^2 > 1$).

Előállított poliplettek $d = 3$ és $r^2 = 9$ esetén:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26; \quad \mathbf{48}.$$

$$-10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14; \quad \mathbf{24}.$$

B/1. eset: $2 \mid d$ és $3 \nmid d$ tulajdonságú d számok választása esetén a poliplettek létezéséhez teljesülnie kell, hogy $3 \mid (r^2 - 1)(r^2 + 1)$, ezért az $r^2 > 1$ számokra $3 \nmid r^2$ -nek is teljesülnie kell.

Előállított poliplettek $d = 2$ és $r^2 = 4$ esetén:

$$-1, 1, 3, 5; \quad \mathbf{6}.$$

$d = 2$ és $r^2 = 16$ esetén:

$$27, 29, 31, 33, \dots, 51, 53, 55, 57; \quad \mathbf{172}.$$

$$-9, -7, -5, -3, \dots, 15, 17, 19, 21; \quad \mathbf{44}.$$

$d = 2$ és $r^2 = 25$ esetén:

$$27, 29, 31, 33, \dots, 69, 71, 73, 75; \quad \mathbf{265}.$$

$$0, 2, 4, 6, \dots, 42, 44, 46, 48; \quad \mathbf{140}. \Rightarrow 0, 1, 2, 3, \dots, 21, 22, 23, 24; \quad \mathbf{70}.$$

$$-15, -13, -11, -9, \dots, 27, 29, 31, 33; \quad \mathbf{85}.$$

$B/2$. eset: $2 \mid d$ és $3 \mid d$ tulajdonságú d számok választása esetén a poliplettek létezéséhez bármilyen $r^2 > 1$ négyzetszám megfelel.

Előállított poliplettek $d = 6$ és $r^2 = 4$ esetén:

$$\begin{aligned} &13, 19, 25, 31; \quad \mathbf{46.} \\ &-3, 3, 9, 15; \quad \mathbf{18.} \Rightarrow -1, 1, 3, 5; \quad \mathbf{8.} \\ &-7, -1, 5, 11; \quad \mathbf{14.} \end{aligned}$$

$d = 6$ és $r^2 = 9$ esetén:

$$\begin{aligned} &35, 41, 47, 53, 59, 65, 71, 77, 83; \quad \mathbf{183.} \\ &4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52; \quad \mathbf{96.} \Rightarrow 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26; \quad \mathbf{48.} \\ &-7, -1, 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41; \quad \mathbf{69.} \\ &-13, -7, -1, 5, 11, 17, 23, 29, 35; \quad \mathbf{57.} \\ &-17, -11, -5, 1, 7, 13, 19, 25, 31; \quad \mathbf{51.} \\ &-20, -14, -8, -2, 4, 10, 16, 22, 28; \mathbf{48.} \Rightarrow -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14; \mathbf{24.} \end{aligned}$$

$d = 6$ és $r^2 = 36$ esetén:

$$\begin{aligned} &1837, 1843, 1849, 1855, \dots, 2035, 2041, 2047; \quad \mathbf{11658.} \\ &541, 547, 553, 559, \dots, 739, 745, 751; \quad \mathbf{3894.} \\ &281, 287, 293, 299, \dots, 479, 485, 491; \quad \mathbf{2346.} \\ &169, 175, 181, 187, \dots, 367, 373, 379; \quad \mathbf{1686.} \\ &17, 23, 29, 35, \dots, 215, 221, 227; \quad \mathbf{822.} \\ &-23, -17, -11, -5, \dots, 165, 181, 187; \quad \mathbf{618.} \\ &-67, -61, -55, -49, \dots, 131, 137, 143; \quad \mathbf{438.} \\ &-71, -65, -59, -53, \dots, 127, 133, 139; \quad \mathbf{426.} \end{aligned}$$

A poliplettek előállításához a $\frac{d^2 n(n+2)}{12} = \frac{d^2(r^2-1)(r^2+1)}{12}$ hányados tulajdonságainak vizsgálatát azonban „fordítva” is elvégezhetjük; először az $r^2 > 1$ négyzetszám tulajdonságait rögzítjük le, és ehhez keressük meg azokat a d számokat, amelyekkel megvalósul a 12-vel való oszthatóság.

α . esetként az r^2 négyzetszám legyen páratlan; és ehhez, 3-mal való oszthatóságától függően, további két alesetet rendelhetünk:

$\alpha/1$. eset; ha a páratlan r^2 szám nem osztható 3-mal; akkor könnyű belátni, hogy a d növekmény bármilyen egész szám lehet;

$\alpha/2$. eset; ha a páratlan r^2 szám osztható 3-mal; akkor könnyű belátni, hogy a d növekmény csak 3-mal osztható egész szám lehet.

β . esetként az r^2 szám legyen páros négyzetszám; és ehhez, 3-mal való oszthatóságtól függően, további két esetet rendelhetünk:

$\beta/1$. eset; ha a páros r^2 szám nem osztható 3-mal; akkor könnyű belátni, hogy a d növekmény csak páros egész szám lehet;

$\beta/2$. eset; ha a páros r^2 szám osztható 3-mal; akkor könnyű belátni, hogy a d növekmény csak páros, 3-mal osztható egész szám lehet, vagyis $d = 6 \cdot k$ és $k = 1, 2, 3, \dots$

Dolgozatomat egykori matematika tanárain emlékének ajánlom!

Ringler András

