

Bródy András és a nemnegatív elemű mátrixok*

SIMONOVITS ANDRÁS

Bródy András (1924–2010) emlékének

1. Bevezetés

Egykori mesterem, Bródy András (1924–2010) legkedveltebb elemzési eszköze a mátrixelmélet, azon belül is a *nemnegatív irreducibilis elemű mátrixok* elmélete volt. Emlékének egy olyan esszével adózom, amely ízelítőt nyújt a Perron–Frobenius-elmélet matematikai-közgazdasági alkalmazásaiból, lehetőleg – de nem csak – Bródy írásaira hivatkozva. Bródy munkásságának a csúcsa kétségtelen az *Érték és újratermelés* (Bródy, 1969), de már a világhíres matematikus baráttal együtt írt Rényi–Bródy (1956) is a sztálinizmus szorításából szabaduló hazai közgazdaságtan kiemelkedő korai gyöngyszeme, Bródy (1964) a hibaelemzés remekműve, Bródy (1973) a szabályozáselmélet újszerű darabja, míg Bródy (2004) Andris egyik hatyúdala volt.

Témaválasztásom másik oka: míg a korábbi magyar és nemzetközi matematikai-közgazdaságtani irodalomban a mátrixelmélet, s azon belül a nemnegatív elemű mátrixok elmélete nagy becsben állt (például Dorfmann–Samuelson–Solow (1958), Gale (1960) és Zalai (1989, különösen a 2. fejezet)), manapság e módszer nagyon háttérbe szorult. Az ökonometrián kívül szinte csak a Szluckij-mátrixszal találkozunk a mai közgazdászhallgatók. Tudomásom szerint a matematikusok egyetemi oktatásába viszont a nemnegatív elemű mátrixok elmélete sohasem került be, talán koordinátás alakja miatt. Bár a nemnegatív elemű mátrixok családjából a sztochasztikus mátrixokkal találkozunk a hallgatók, a Markov-láncok ergodicitásának bizonyításánál (Rényi, 1966, 406–409. o.) is szükségképpen elsikkad a lineáris algebrai háttér. (Egyetemi éveim alatt én is csak Bródy András Tőke-szemináriumán hallottam e gyönyörű elmületről, 1966 körül.) Ennek az elhanyagolt területnek a fontosságára, szépségére és alkalmazhatóságára szeretném felhívni az Olvasók figyelmét.

* Köszönetet mondok Rácz Andrásnak egy korábbi változat mindenre kiterjedő javításáért, valamint Muraközy Balázsnak és Zalai Ernőnek néhány értékes megjegyzéséért. Az esetleges hibákért kizárólag engem terhel a felelősség.

Itt csak távirati stílusban foglalom össze az elmélet legfontosabb állításait. 1. Tetszőleges pozitív elemű (négyzetes) mátrixnak egyetlenegy domináns sajátértéke van, s ez és a hozzá tartozó sajátvektor pozitív. 2. Általánosabban, tetszőleges nemnegatív elemű irreducibilis mátrix esetén e tulajdonságok csak gyengébben teljesülnek. (A még általánosabb reducibilis mátrixokkal foglalkozott például Móczár (1980) és Zalai (2011) a Neumann-modellek keretén belül.) 3. Ha egy 2. osztályba tartozó mátrix valamelyik hatványa pozitív elemű mátrix (ekvivalens azzal, hogy aciklikus mátrix), akkor az 1. osztály tulajdonságai érvényben maradnak.

Ezt az elméletet a közgazdaságtanban először Leontief alkalmazta, amikor kidolgozta az *ágazati kapcsolatok mérlegét* (ÁKM), amelyet aztán róla neveztek el. Két változatát ismertetjük: a nyílt statikus, valamint a zárt dinamikus Leontief-modellt, amelyeket Bródy olyan előszeretettel alkalmazott hosszú évtizedeken keresztül. A Markov-láncok elmélete fontos speciális eset, ahol az átmenetmátrix nemcsak pozitív elemű, de oszlopösszegei azonosan 1-gyel egyenlők: a mátrix *sztochasztikus*. A domináns sajátérték 1, és a domináns sajátvektor elemeinek összege 1, egyben fixpont. A Markov-láncok alkalmazása is széleskörű, mi hármat említünk meg: a munkapiaci átmenetmátrixot, az adóbevallási dinamikát lokálisan leíró mátrixot és a legegyszerűbb nemtriviális piaci egyensúlyi árvektort származtató mátrixot. Végül beszámolunk a Kornai és Martos (1971) által kezdeményezett és Bródy (1973) által érdekesen továbbfejlesztett készlet- és árjelzésen alapuló szabályozási modelljeiről, amelyeknek tárgya a Leontief-gazdaság, és amelyek elemzésében a nemnegatív irreducibilis mátrixok elmélete többszörösen szerepet kap.

Összefoglalva: a 2. szakaszban körvonalaazom a nemnegatív elemű mátrixok elméletét. A 3. szakaszban röviden ismertetem a Leontief-modellt. A 4. szakaszban vázolom a Markov-láncok alaptételét és három közgazdasági alkalmazását, majd az 5. szakaszban kitérek a Leontief-modell szerepére a készlet- és az árjelzésen alapuló szabályozásban. A 6. szakaszban kimondok néhány következtetést.

2. Nemnegatív elemű mátrixok

Nyilvánvaló okok miatt a közgazdaságtanban nagyon fontosak a *nemnegatív (pozitív) elemű* mátrixok, ahol $m_{ij} \geq 0$ ($m_{ij} > 0$) minden i, j -re (Rózsa, 2009, 9. fejezet). Mátrixjelölésben: $M \geq 0$. (A legújabb magyar helyesírási szabályzat megalkotói nagy hibát követtek el, amikor bevezették a *nem* kezdetű jelzők különírását! Ugyanis a *nem negatív* elemű mátrixok nem azonosak a *nemnegatív* elemű mátrixokkal! Az előbbi osztályba olyan mátrixok tartoznak, amelyeknek van legalább egy nem negatív elemük, míg az utóbbiba olyan mátrixok tartoznak, amelyeknek minden eleme nem negatív!)

Néha blokkdiagonális mátrixokkal dolgozunk, mert azok kisebb méretű mátrixokhoz vezetnek. Máskor éppen ellentétes a célunk: el akarjuk kerülni, hogy a

rendszer részeire bomolják. Ekkor hasznos a következő fogalom.

Reducibilis (felbontható) mátrixokról beszélünk, ha az $\{1, 2, \dots, n\}$ indexhalmaz felbontható két olyan nemtriviális J és J^* indexhalmazra, amelyre a keletkező M_{J^*J} és M_{JJ^*} blokkok egyike nulla mátrix. Ahhoz, hogy kevésbé formális legyen a meghatározásunk, érdemes gráfokra lefordítani a definíciót. Képzeljük azt, hogy van egy n -csúcsú irányított gráfunk, amelyben az i -edik pontból a j -edikbe él vezet, ha az (i, j) mátrixelem pozitív. (Természetesen elképzelhető, hogy az i -edik csúcsból a j -edik csúcsba él vezet, de fordítva nem.) Ekkor a mátrix reducibilitása azt jelenti, hogy a hozzátartozó gráf csúcspontjai két olyan csoportba oszthatók, hogy egyik csoport egyik csúcsából sem vezet él a másik csoport semelyik csúcsába sem. Egy mátrixot *irreducibilisnek* (felbonthatatlannak) nevezünk, ha *nem* reducibilis. (Vegyük észre, hogy minden blokkdiagonális mátrix reducibilis, hiszen ott egyik csoport sincs összekötve a másikkal.)

A következő tételeket 1907 és 1912 között Perron (pozitív mátrixokra) és Frobenius (nemnegatív mátrixokra) fedezte föl, és az 1950-es évek óta alapvető szerepet játszanak a matematikai közgazdaságtanban. A tételek kimondásához szükségünk lesz néhány definícióra. Az $Ms = \lambda s$ ($s \neq 0$) sajátérték–sajátvektor egyenlet megoldásai közül *dominánsnak* nevezzük azokat, amelyekre a sajátértékek abszolút értéke maximális. E maximum neve *spektrálsugár*, és jele $\rho(M)$, ekkor $|\lambda| \leq \rho(M)$.

1. Tétel. (Frobenius 1. tétele: 1908, Zalai, 1989, 2. fejezet, Rózsa, 2009.) *Legyen a négyzetes M mátrix nemnegatív és irreducibilis. Ekkor igazak a következő állítások.*

- M -nek van egy pozitív domináns sajátértéke.*
- Létezik (egy skalárszorozótól eltekintve) egyetlen pozitív sajátvektor, amely a pozitív domináns sajátértékhez tartozik.*
- A pozitív domináns sajátérték algebrai multiplicitása 1.*
- A pozitív domináns sajátérték monoton növekvő függvénye bármely pozitív elemnek.*
- Ha a spektrálsugár kisebb, mint 1: $\rho(M) < 1$, akkor az $(I - M)^{-1}$ mátrix létezik és pozitív:*

$$(I - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k.$$

A bizonyításból csak az alapgondolatot említjük meg: A

$$\rho(x) = \min \left[\frac{(Mx)_i}{x_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad x_i \neq 0 \right]$$

függvény jól definiált, és a maximumát az $s_1 > 0$ sajátvektornál veszi föl, értéke: $\rho(M) = \lambda_1$ pozitív domináns sajátérték.

A következő 2×2 -es sztochasztikus mátrixon szemléltetjük az 1. tétel a)–c) pontját.

1. Példa. Legyen μ és ν két, határozottan 0 és 1 közti valós szám. Legyen a mátrix

$$M = \begin{pmatrix} \mu & 1 - \nu \\ 1 - \mu & \nu \end{pmatrix}.$$

Egyszerű számolással adódik a mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\mu + \nu)\lambda + \mu + \nu - 1.$$

Könnyű belátni, hogy $p(1) = 0$, azaz $\lambda_1 = 1$ és $|\lambda_2| = |\mu + \nu - 1| < 1$. Némi számolással adódik a $(\xi, 1 - \xi)$ domináns sajátvektor első koordinátája:

$$\xi = \frac{1 - \nu}{2 - \mu - \nu}, \text{ amelyre } 0 < \xi < 1.$$

Ha beszorozzuk a mátrixot egy 0 és 1 közötti π skalárral, akkor $\rho(\pi M) = \pi$, és az e) pont is ellenőrizhető.

Élesíthetjük az 1. tételt, ha bevezetjük a következő speciális blokkszerkezetű mátrixokat: legyen $P > 1$ egy természetes szám, és legyen $Q = 1, \dots, P$ az $\{i_{Q-1} + 1, \dots, i_Q\}$ indexhalmaz blokkindexe, ahol $\{i_Q\}$ monoton növekvő sorozat P darab természetes számból áll. Írjuk föl mátrixunkat blokkszerkezetben: $M = [M_{QR}]$. Az M mátrixot P -ciklikusnak vagy P -rendben imprimitívnek nevezzük, ha $M_{QR} = 0$, $R \neq Q + 1$ esetén, azaz $M = (M_{Q, Q+1})$. Ismét a fenti gráf-hasonlatot alkalmazva, ekkor a csúcspontok P db csoportba oszthatók, hogy az 1. csoport csúsaiból kizárólag a 2. csoportéiba vezet él, a 2. csoportéiból a 3. csoportéiba, $\dots$, a $(P-1)$ -edikéiből a P -edikéibe és az P -edikéiből az 1. csoportéiba. Ekkor az M^P mátrix blokkdiagonális.

Ha egy mátrix semmilyen $P > 1$ természetes számra sem ciklikus, akkor $P = 1$ -et írunk, és a mátrixot *aciklikusnak* vagy *primitívnek* nevezzük.

2. Tétel. (Frobenius 2. tétele, 1912 és Rózsa, 2009.) *Legyen a négyzetes M mátrix nemnegatív és irreducibilis. Ekkor igazak a következő állítások.*

a) *Ha az M mátrix P -ciklikus, akkor pontosan P domináns sajátértéke van: $\rho \varepsilon^{Q-1}$, $Q = 1, \dots, P$, ahol ε a P -edik komplex egységgyök.*

b) *Ha az M mátrix aciklikus, akkor egyetlen domináns sajátértéke van, amely pozitív. A mátrix valamelyik hatványa pozitív: például $M^n > 0$.*

Megjegyzés. Ha $M > 0$, akkor nyilvánvalóan aciklikus, tehát a b) pont Perron tételére egyszerűsödik.

Az 1.e. tételben láttuk, hogy a nemnegatív elemű $\rho(M) < 1$ tulajdonságú mátrixoknak van egy szép tulajdonságuk. Most egy másik tulajdonságukat mutatjuk

be, amelyet *produktivitásnak* (termelékenységnak) nevezzük: létezik egy $x > 0$ oszlopvektor, amelyre

$$Mx < x.$$

1. Példa. (Folytatás.) Ha $\mu = \nu = 0$, akkor 2-ciklikus mátrixot kapunk, különben aciklikust.

3. Leontief-modellek

Ebben a szakaszban a statikus és a dinamikus Leontief-modelleket tanulmányozzuk.

Statikus Leontief-modell. Ismert, hogy Leontief (1941/1951) dolgozta ki az ágazati kapcsolatok mérlegének (ÁKM) a statikus modelljét, amely a történelemben először tette lehetővé, hogy a gazdaság egyes szektorai közti kapcsolatokat részletesen és akár statisztikailag becsült egyenletrendszerrel elemezzük. A továbbiakban azonban csak elméleti elemzésre szorítkozunk.

Egy n -szektoros gazdaságból indulunk ki, ahol a szektorok közti kapcsolatokat egy *nyílt statikus* ÁKM-modell írja le (Leontief, 1941 és Bródy, 1969). A jelölés egyszerűsége kedvéért egyelőre föltesszük, hogy a gazdaság hosszú távon nem nő és nem csökken. Legyen a_{ij} a j -edik szektor egységnyi termeléséhez szükséges anyagigény az i -edik szektortól, legyen y_i az i -edik szektor *kibocsátása* és c_i a végső fogyasztás az i -edik szektor termékéből, $i, j = 1, \dots, n$. A megfelelő mátrixok és vektorok jele: A , y és c .

Föltesszük, hogy A nemnegatív elemű, irreducibilis mátrix, amelynek spektrálsugara kisebb, mint 1 : $\rho(A) < 1$. Ennek jelentését legegyszerűbben egy olyan mértékegység-rendszerben felírva érthetjük meg, amelyben minden oszlopösszeg kisebb mint 1:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1, \text{ ahol } j = 1, \dots, n.$$

Szóban: az egységértékű j -edik termék előállításához szükséges anyagok összköltségének összege kisebb, mint a termék értéke. Ez ésszerű feltevés.

A modell egy egyszerű azonosságon alapul: termelés – termelői fogyasztások összege = végső fogyasztás. Képletben:

$$(I - A)y = c.$$

Az 1.e. tétel alapján belátható, hogy ez az egyenlet egyértelműen megoldható.

3. Tétel. *Feltevéseink mellett a nyílt statikus ÁKM-modellnek minden pozitív végső fogyasztásvektorra létezik pontosan egy pozitív kibocsátása:*

$$y = (I - A)^{-1}c.$$

Az $(I - A)^{-1}$ mátrixot az A mátrix *Leontief-inverzének* nevezik. Matematikában ezt a típusú mátrixot *rezolvens mátrixnak* nevezik.

Az 1.e. tétel azt sugallja, hogy akármilyen végső fogyasztás megvalósítható, csak konzisztensen kell megválasztani a kibocsátási vektort. Köznapi tapasztalatainkból tudjuk, hogy ez nincs így, s ennek alapvetően két oka van: a) vannak korlátos erőforrások (nyersanyagok és munkaerő), amelyek még hosszabb távon sem növelhetők tetszés szerint; b) az ember által készített eszközök előállítása időt vesz igénybe. Ezzel a második kérdéssel foglalkozunk a következő részben.

Dinamikus Leontief-modell. Rátérünk a *zárt dinamikus* Leontief-modell ismertetésére. Jelölési könnyítés céljából nyílt modellünket „bezárjuk”: az $(n + 1)$ -edik szektornak a munkaerő-szektor tekintjük. Ekkor az egységnyi munkaórához szükséges $f > 0$ fogyasztási vektort és az egységnyi termék előállítása során kifejtett $v > 0$ munkaráfordítások vektorát a bővített $\mathbf{A}$ mátrix $(n + 1)$ -edik oszlopának, illetve sorának tekintjük, 0-t írva a jobb alsó sarokba. (Általánosabban a jobb alsó sarokelem is lehet pozitív, hiszen például tanárok munkájára van szükség a kohászok „előállításához”.) A termelési vektort is kibővítjük a munkaerő-szektor kibocsátásával (l): Képletben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & f \\ v & 0 \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ l \end{pmatrix}.$$

Ekkor a zárt statikus modell egyenlete

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y} = 0.$$

Most már ábrázolhatjuk a tőkefelhalmozást is, de ehhez $\rho(\mathbf{A}) = 1$ helyett a $\rho(\mathbf{A}) < 1$ feltevessel kell élnünk. Legyen $b_{ij} \geq 0$ a j -edik szektor egységnyi termelésnöveléséhez szükséges beruházási igény az i -edik szektortól. Az irreducibilis $\mathbf{B} = (b_{ij})$ tőkemátrix segítségével felírható a tőkefelhalmozási egyenlet:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}},$$

ahol $\dot{\mathbf{y}}$ az $\mathbf{y}$ vektor idő szerint deriváltja. A $\mathbf{B}$ tőkemátrix szingularitása nagyon megnehezíti a megoldást, sőt, Bródy (2004) és ennek nyomán Dobos (2007) megmutatta, hogy a teljes nemnegatív félegyenesen általában nincs pozitív megoldása e differenciálegyenlet-rendszernek.

Tegyük föl azonban, hogy a gazdaság minden szektora folyamatosan és azonos λ ütemben bővül: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 e^{\lambda t}$, ahol $\mathbf{y}_0$ a 0-adik időpont kibocsátási vektora. Ekkor az implicit differenciálegyenlet alapján az egyensúlyi kibocsátási vektor kielégíti a tőkefelhalmozás egyenletét:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y}_0 = \lambda \mathbf{B}\mathbf{y}_0.$$

A lineáris programozásból ismert módon minden primálfeladathoz tartozik egy duálfeladat, ahol a volumenek helyett árak szerepelnek. Ez a helyzet most is. Milyen árak tartoznak e modellhez? Legyen $\mathbf{p}$ az $(n+1)$ -dimenziós bővített ár(sor)vektor, amelynek fedeznie kell a $\mathbf{p}\mathbf{A}$ folyó kiadások mellett a π normál profitrátához (pozitív valós szám) tartozó $\mathbf{p}\mathbf{B}$ beruházási kiadásokat. A tőkefelhalmozás ároldalát a következő implicit differenciálegyenlet-rendszer írja le:

$$\mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{p}\mathbf{B}.$$

Az áralakulás egyensúlyi pályáját a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{\pi t}$ egyenlet adja. Az egyensúlyi áregyenlet képlete:

$$\mathbf{p}_0(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \pi \mathbf{p}_0 \mathbf{B}.$$

Mivel a kibocsátási- és az árvektor csak egy skalár erejéig van meghatározva (nincs kezdeti feltétel), a továbbiakban *arányokról* beszélünk. A kibocsátási egyenletet balról, az áregyenletet jobbról beszorozva az $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ Leontief-inverzszel, adódik a

4. Tétel. (Bródy, 1969.) *Tegyük föl, hogy a bővített inputmátrix spektrálsugara is kisebb, mint 1: $\rho(\mathbf{A}) < 1$.*

a) *A kibocsátási egyensúlyi egyenletet pontosan egy pozitív növekedési ütem (λ) és kibocsátási arányvektor ($\mathbf{y}$) elégíti ki:*

$$\frac{1}{\lambda} \mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{y}.$$

b) *Az áregyensúlyi egyenletet pontosan egy pozitív profitráta (π) és egy árarány (sor)vektor ($\mathbf{p}$) elégíti ki:*

$$\frac{1}{\pi} \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}.$$

c) *Az egyensúlyi növekedési ütem és a profitráta egyenlő: $\lambda = \pi$.*

Megjegyzések. 1. Például az első egyenletet balról beszorozva $\mathbf{p}$ -vel, a másodikat jobbról $\mathbf{y}$ -nal, és figyelembe véve, hogy $\mathbf{p}\mathbf{y} > 0$, adódik

$$\frac{1}{\lambda} \mathbf{p}\mathbf{y} = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{y} = \frac{1}{\pi} \mathbf{p}\mathbf{y}, \text{ azaz } \pi = \lambda.$$

2. Ez a modell Neumann (1938) modelljének egyszerűsített változata. Ott egy terméket elvben több eljárással lehetett előállítani (például villamos áramot fával, szénnel, olajjal, gázzal és uránnal), és bármely eljárásnak elvben több terméke is lehetett (például a tehéntenyésztésnek a tej, a hús és a bőr). Mindkét modellnek közös hibája, hogy a munkaerő-szektor úgy kezeli mint a többi szektort, márpedig ez legfeljebb egy rabszolga-gazdaságra igaz.

Medvegyev (2011) izgalmasan írja le Bródy és a marxi elmélet kapcsolatát (vö. Zalai, 1988).

4. Markov-láncok

A véges állapotú homogén (időben állandó szerkezetű) Markov-láncok átmeneti mátrixa nemnegatív, speciális esetben pozitív elemű. Ezért a Perron–Frobenius-tételek segítségével is értékes eredményeket kaphatunk a Markov-láncok ergodicitásáról. (Nem véletlen, hogy a két kutatási terület egyidejűleg jött létre.) Emellett a Markov-láncokat széles körben alkalmazzák a közgazdaságtanban is.

Röviden a Markov-láncokról. Ismert, hogy a Markov-láncok fontos szerepet játszanak a valószínűség-számításban. A legegyszerűbb esetben diszkrét idejű, diszkrét állapotú sztochasztikus folyamattal foglalkozunk, ahol a jövőt a múlt csak a jelenen keresztül határozza meg.

Legyen $M = (m_{ij})$ egy $n \times n$ -es átmenet-valószínűségi mátrix, ahol $m_{ij} \geq 0$ annak a valószínűsége, hogy egy lépés alatt a rendszer a j -edik állapotból az i -edikbe kerül: $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, n$: sztochasztikus mátrix. Legyen $x_t \geq 0$ valószínűségi eloszlásvektor, ahol $x_{i,t}$ annak a valószínűsége, hogy a t -edik időszakban a rendszer az i -edik állapotban van: $\sum_{i=1}^n x_{i,t} = 1$. Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint $x_{i,t} = \sum_{j=1}^n m_{ij} x_{j,t-1}$. Vektor- és mátrixjelölésekre áttérve: $x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t})$, $\mathbf{1}^T M = \mathbf{1}^T$, $x_t = M x_{t-1}$ és $\mathbf{1}^T x_t = 1$, ahol $\mathbf{1}^T = (1, \dots, 1)$ az összegző vektor. *Homogén Markov-láncunk* van, amelynek időben állandó átmenetmátrixáról itt föltesszük, hogy aciklikus: $M^n > 0$. Ekkor a határeloszlás létezik, azaz a lánc *ergodikus*: $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = x^o$, $x^o = M x^o$, az M mátrix jobb oldali domináns sajátvektora (Rényi, 1966, 403–409. o.), amely egyben fixpont.

A továbbiakban a Markov-láncok három közgazdasági alkalmazását mutatom be: a munkapiac Markov-láncát és a lokális kölcsönhatás stabilitását röviden, valamint az általános egyensúlyelmélet legegyszerűbb egzisztencia-tételét hosszabban.

A munkapiac Markov-lánca. Horváth (2010, 148. o., 1. táblázat) megad egy 8-állapotú Markov-láncot, amelyben az állapotok a dolgozó munkapiaci aktivitásra vonatkoznak: 1. egész évben, 2. 3/4–1 év között, 3. 1/2–3/4 év között, 4. 1/4–1/2 év között, 5. legfeljebb 1/4 évet, 6. 0 napot *dolgozott*, 7. rokkant nyugdíjas volt és 8. öregségi nyugdíjas volt. A szerző megemlíti, hogy e feltevessel „szemben súlyos kritikák fogalmazhatók meg, de ... az ilyen modellezés meglehetősen elterjedt a nyugdíjmodellezés világában.” Hasonló feltevessel élve, Fehr–Habermann (2008) egy ún. kiszámítható általános egyensúlyi modellt alkotott. Numerikusan meghatározták a társadalmilag optimális „degresszív nyugdíjrendszer” paraméterértékeit: ellentétben a világszerte csodált német pontrendszerrel, ebben a rendszerben a nagyobb életpálya-járulékbefizetések aránytalanul kevésbé növelik a járadékokat, akárcsak az 1998 előtti magyar nyugdíjrendszer. Természetesen a modellben szereplő paraméterértékek nem olyan jól meghatározottak, mint a gravitációs együtttható. Ezért nem lehetünk olyan biztosak az eredményben, mint az úrrakéták tervezői voltak, amikor Newton majdnem 300 éves képlete alapján kilőtték az első szputnyikokat.

A lokális kölcsönhatás stabilitása. Méder–Simonovits–Vincze (2010) 2. adócsalási modellje vezetett a következő absztrakt matematikai modellhez, amellyel a lokális kölcsönhatás dinamikája vizsgálható (vö. Garay–Simonovits–Tóth, 2011): legyen $I \geq 2$ egy pozitív egész szám. Az előzőtől eltérő jellegű jelölést alkalmazva, legyen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_I)$ egy I -dimenziós vektor, a rendszer állapotvektora. Minden $i = 1, \dots, I$ -re létezik egy N_i indexhalmaz, $|N_i|$ elemszámmal, az i egyén ismerőseinek a halmaza. Diszkrét idővel dolgozva, $t = 0, 1, \dots$, legyen $\mathbf{x}_t = (x_{1,t}, \dots, x_{I,t})$ a t -edik időszak állapotvektora. Az i -edik egyén megfigyeli „lokális” környezete átlagállapotát:

$$\bar{x}_{i,t} = \frac{\sum_{j \in N_i} x_{j,t}}{|N_i|}.$$

A lokális kölcsönhatás dinamikáját a következő nemlineáris differenciaegyenlet-rendszer írja le:

$$x_{i,t+1} = F(\bar{x}_{i,t}), \quad i = 1, \dots, I,$$

ahol $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy sima függvény, pontosan egy fixponttal: $x^o = F(x^o)$, ahol $F'(x^o) < 1$.

Megfelelő technikai feltevések (F konkavitása és a később bevezetendő M aciklussága) mellett belátható a következő tétel:

5. Tétel. *A lokális kölcsönhatások dinamikájának pontosan egy fixpontja van. Ez szimmetrikus: $x_i^o = x^o$ ($i = 1, \dots, I$) és lokálisan stabil.*

Megjegyzés. Bonyolultabb eszközökkel belátható, hogy a dinamika globálisan stabil.

Bizonyítás. A szimmetrikusság és a globális stabilitás bizonyítása a mély Banach-féle fixponttételen alapul. Egyszerűsége és a Markov-lánc ergodicitásán alapuló gondolatmenete miatt viszont vázolom a lokális stabilitás bizonyítását. Legyen $M = \mathbf{F}'(\mathbf{x}^o)$ a lineáris közelítés mátrixa. A deriválás láncszabálya szerint

$$m_{ij} = \frac{F'(x^o)}{|N_i|}, \text{ ha } j \in N_i \text{ és } m_{ij} = 0 \text{ egyébként.}$$

Ezért $0 < \rho(M) = F'(x^o) < 1$. ■

A teljesség kedvéért megemlítem, hogy hasonló módszerrel elemeztük az együttélő korosztályok dinamikáját Molnár–Simonovits (1996)-ban.

Általános piaci egyensúly létezése. A matematikai közgazdaságtan egyik csúcsa az általános piaci egyensúly létezésének bizonyítása. A legegyszerűbb esetben a termelést elhanyagoljuk, azaz egy cseregazdaságra szorítkozunk, amelyben a már meglevő termékeket cserélik el a háztartások egymással. A csere célja: minden háztartás annyira javítsa a helyzetét, amennyire csak lehetséges. Részletesebben: minden háztartásnak van egy *hasznosságfüggvénye*, amely a csere utáni készletvektor monoton növekvő függvénye. Minden termék csere utáni összkészlete megegyezik a csere előtti összkészlettel. Minden háztartás csak addig nyújtózkodhat, ameddig a takarója ér, azaz egy feltételezett piaci árrendszerben a kezdőkészletek eladásából származó jövedelme megegyezik a végső készletek piaci értékével. Belátható, hogy megfelelő technikai feltevések mellett létezik legalább egy ilyen piaci árvektor és a hozzá tartozó optimális fogyasztási vektor rendszere, az általános egyensúly.

Az általános modellben Arrow–Debreu (1954) bizonyította a piaci egyensúly létezését, magyarul jól összefoglalja a lényeget Zalai (1989). Technikailag elég bonyolult a bizonyítás (a Brouwer-féle fixpont-tételen, illetve annak Kakutani-féle általánosításán alapul), de van egy olyan speciális eset, amikor a bizonyítás a pozitív elemű mátrixok domináns sajátvektorára vonatkozó Perron–Frobenius-tételre vagy a Markov-lánckok stacionárius sztochasztikus eloszlásvektorának a létezésére egyszerűsödik. Ezt mutatom be az alábbiakban.

Legyen a háztartások száma H , indexe $h = 1, \dots, H$; és a termékek száma I , indexe $i = 1, \dots, I$. Legyen továbbá a h -adik háztartás vagyonvektora $a^h = (a_{1h}, \dots, a_{Ih})$, fogyasztási vektora $x_h = (x_{1h}, \dots, x_{Ih})$, és legyen hasznosságfüggvénye $u_h(x_{1h}, \dots, x_{Ih})$. Legyen $p = (p_1, \dots, p_I)$ a piaci árvektor, amely minden háztartás számára adott. Adott árvektor esetén a h -adik háztartás ($h = 1, \dots, H$) a következő hasznosságmaximalizálási feladatot oldja meg:

$$u_h(x_{1h}, \dots, x_{Ih}) \rightarrow \max$$

figyelembe véve a költségvetési feltételt:

$$p_1 x_{1h} + \cdots + p_I x_{Ih} = p_1 a_{1h} + \cdots + p_I a_{Ih} = I_h,$$

ahol I_h a h -adik háztartás árfüggő jövedelme.

Ha minden termék összesített kezdőkészlete pozitív, akkor a mértékegységek megfelelő megválasztásával feltehetjük, hogy a kezdőkészletek egységeinek:

$$\sum_{h=1}^H a_{ih} = 1, \quad i = 1, \dots, I.$$

A csere mérlegegyenletei rendre

$$\sum_{h=1}^H x_{ih} = 1, \quad i = 1, \dots, I.$$

A modern közgazdaságtan egyik legjellemzőbb eszköze, hogy minden döntést egy célfüggvény maximalizálásából vezet le. Esetünkben minden háztartásnak megfelelő *hasznosságfüggvénye* van, és a könnyebb számolhatóság kedvéért Cobb–Douglas-féle:

$$u_h(x_{1h}, \dots, x_{Ih}) = \sum_{i=1}^I \beta_{ih} \log x_{ih},$$

ahol a β_{ih} súlyok pozitívak, összegük 1: $\sum_{i=1}^I \beta_{ih} = 1$, minden h -ra. Ez a feltevés hasonlít a pszichológiában megfigyelt hatásokhoz, nevezetesen, hogy a zaj megkésztetésekor a fájdalomérzet egységgel nő. Itt egy bizonyos termék fogyasztásának megkettőzése a hasznosságérzetet egységgel növeli, a többi termék fogyasztásától függetlenül.

Kimondhatjuk a piaci egyensúly létezését.

6. Tétel. *Az általános egyensúlyban a normálástól eltekintve egyetlen pozitív p° piaci egyensúlyi árvektor létezik, és ez kielégíti a következő fixpont-feltételt:*

$$p_i^\circ = \sum_{k=1}^I p_k^\circ b_{ki}, \quad i = 1, \dots, I,$$

ahol $b_{ki} = \sum_{h=1}^H \beta_{ih} a_{kh} > 0$. A h -adik háztartás optimális fogyasztása az i -edik termékből

$$x_{ih} = \frac{\beta_{ih} I_h^\circ}{p_i^\circ}, \quad i = 1, \dots, I, \quad h = 1, \dots, H.$$

Mielőtt rátérnék a bizonyításra, néhány megjegyzést teszek.

1. Az árvektor „nagysága” most sincs meghatározva, hiszen közgazdaságilag közömbös, hogy forintban vagy fillérben vagy akár euróban számolunk, de az árarányok határozottak.

2. A tételben szereplő hasznosságfüggvények a lehető legegyszerűbbek, és ennek tudható be, hogy a h -adik háztartás i -edik termékre vonatkozó optimális fogyasztási kiadási hányada, $p_i x_{ih}/I_h$ az egyensúlyi árakon számítva éppen β_{ih} .

3. Általában a háztartásnak nincs minden termékből pozitív készlete; az egyensúly létezéséhez elegendő, ha minden preferenciasúly pozitív, sőt, még kevesebb is.

Bizonyítás. a) Először adott piaci árvektor esetén meghatározzuk a feltételes optimális fogyasztási vektorokat, majd b) meghatározzuk az egyensúlyi piaci árvektort.

a) Legyen λ_h a Lagrange-szorító, ekkor a Lagrange-függvény (az I_h állandót elhagyva)

$$L(x_{1h}, \dots, x_{Ih}) = \sum_{i=1}^I [\beta_{ih} \log x_{ih} - \lambda_h p_i x_{ih}].$$

A Lagrange-módszer értelmében az optimális fogyasztásvektorra a következő egyenletrendszer adódik:

$$L_{x_{ih}}(x_{1h}, \dots, x_{Ih}) = \frac{\beta_{ih}}{x_{ih}} - \lambda_h p_i = 0, \quad i = 1, \dots, I.$$

Rendezve: $p_i x_{ih} = \beta_{ih} \lambda_h^{-1}$. Visszahelyettesítve a költségvetési feltételbe,

$$I_h = \sum_{i=1}^I p_i x_{ih} = \sum_{i=1}^I \beta_{ih} \lambda_h^{-1} = \lambda_h^{-1},$$

azaz a Lagrange-szorító itt éppen a háztartás jövedelmének a reciproka. Rendezve

$$x_{ih} = \frac{\beta_{ih} I_h}{p_i}.$$

b) Behelyettesítve a mérlegegyenletekbe az optimális fogyasztást és az árfüggő jövedelmeket,

$$\sum_{h=1}^H \beta_{ih} \frac{\sum_{k=1}^I p_k a_{kh}}{p_i} = 1, \quad i = 1, \dots, I.$$

Felcserélve az összegzés sorrendjét és felhasználva, hogy a hasznosságsúlyok összege 1,

$$\sum_{i=1}^I b_{ki} = \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H \beta_{ih} a_{kh} = \sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^I \beta_{ih} a_{kh} = \sum_{i=1}^I a_{kh} = 1,$$

azaz (b_{ki}) mátrix sztochasztikus, tehát a Perron–Frobenius-tétel vagy a Markov-lánccok tétele alapján a normálástól eltekintve pontosan egy pozitív $p^o > 0$ vektor elégíti ki, s ez az egyensúlyi árvektor, 1 sajátértékkel. ■

2. Példa. Legegyszerűbb esetben ugyanannyi termék van, mint háztartás, és az i -edik termék kezdőkészlete az i -edik háztartás tulajdonában van: $I = H$ és $a_{ih} = \delta_{ih}$, ahol δ_{ih} a Kronecker delta. Ekkor $b_{ih} = \beta_{ih}$, azaz az áregyenlet mátrixa a hasznosságsúlyok mátrixa. Ekkor az árarányokat az utóbbi mátrix szerkezete határozza meg.

A kéttermékes gazdaságban $\beta_{11} = 1 - \beta_{21}$ és $\beta_{22} = 1 - \beta_{12}$, $p = (\pi, 1)$. A mátrixegyenlet első sora szerint $(1 - \beta_{12})\pi + \beta_{12} = \pi$, azaz $\pi = \beta_{12}/\beta_{21}$. Kvalitatíve: az 1. termék ára akkor és csak akkor nagyobb, mint a 2.-é ($\pi > 1$), ha az 1. egyén a 2. terméknek nagyobb súlyt tulajdonít, mint a 2. egyén az 1. terméknek ($\beta_{12} > \beta_{21}$).

Ebből a példából még az is látható, hogy az egyensúly létezéséhez nem kell feltenni, hogy minden termék minden egyénnek hasznos; elegendő, ha az 1. termék a 2. egyénnek hasznos, a 2. termék pedig az 1. egyénnek: $\beta_{12}, \beta_{21} > 0$, azaz (b_{ij}) irreducibilis.

4. A készlet- és az árjelzésen alapuló szabályozásról

Ebben a szakaszban a többszektoros gazdaság készlet- és az árjelzésen alapuló szabályozásának két lineáris modelljét mutatjuk be. A vizsgálatot Kornai–Martos (1971) kezdeményezte, az első tíz év eredményeit Kornai–Martos szerk. (1981) tartalmazza. Az első modell itt ismertetett alakja Simonovits (1998) 2.3. alfejezetéből, a második Bródy (1973) cikkéből származik.

Mindenekelőtt röviden összefoglalom a szóban forgó kutatási irányzat lényegét. 1970 körül, amikor a kutatás megindult, a közgazdaságtanban még nagyon ritka volt az igazi dinamikus vizsgálat. A dinamikus vizsgálatokon belül is általában elhanyagolták a reálszféra–szabályozási szféra megkülönböztetést. De még a szabályozáselméleti megközelítésen belül is túl nagy szerepet kapott a piacgazdaság leegyszerűsített logikáját tükröző árjelzésen alapuló szabályozás. Ehhez képest jelentett újdonságot a *szabályozás árjelzések nélkül* elnevezésű kutatási irányzat, amely nemcsak dinamikus szabályozáselméleti megközelítést alkalmazott, de a központi irányítású gazdaságok szintén leegyszerűsített logikáját követve azt vizsgálta, mit lehet elérni árszabályozások nélkül.

Készletjelzésen alapuló modell. Egy n -szektoros gazdaságból indulunk ki, ahol a szektorok közti kapcsolatokat egy készletekkel bővített nyílt statikus Leontief-modell írja le (1. szakasz). Ellentétben a hagyományos készletszabályozási modellekkel, ebben a modellben (és a modellcsalád többi modelljében) azt akarjuk vizsgálni, miképp működhet egy egész gazdaság *decentralizált készletjelzések* alapján. Egyszerűen szólva azt tételezzük föl, hogy a termelők a termelésüket aszerint növelik vagy csökkentik egy kívülről adott *normál* (más elméletben: egyensúlyi) értékhez képest, hogy a saját készletük kisebb-e vagy sem a normálisnál. Az éppen időre termelést (angol rövidítése: JIT = just in time) modellezve, a felhasználói készleteket figyelmen kívül hagytuk.

A jelölés egyszerűsége kedvéért most föl tesszük, hogy a gazdaság hosszú távon nem nő és nem csökken. Legyen a_{ij} a j -edik szektor egységnyi termeléséhez szükséges anyagigény az i -edik szektortól, legyen rendre a t -edik időszakban $z_{i,t}$ és $y_{i,t}$ az i -edik szektor *záró készlete* és *kibocsátása*, valamint c_i a végső fogyasztás az i -edik szektor termékéből. A megfelelő mátrixok és vektorok jele: A , z_t , y_t és c . A 3. szakaszt követve, ismét föl tesszük, hogy A nemnegatív elemű, irreducibilis mátrix, melynek spektrálsugara kisebb, mint 1 : $\rho(A) < 1$. A decentralizált szabályozáselmélet logikája szerint szükségünk lesz még a d_i reakcióegyütthatók diagonális mátrixára: $\langle d \rangle = \langle d_i \rangle > 0$.

A modell dinamikája egy egyszerű azonosságon alapul:

készletváltozás = termelés – termelői fogyasztások összege – végső fogyasztás.

A termelői fogyasztás arányos a termeléssel, a végső fogyasztás adott. A modellt egy lineáris decentralizált szabályozási egyenlettel zárjuk le:

az i -edik szektor termelése = kapacitás – reakcióegyüttható $\times$ saját készlete.

Fölírjuk a modell egyenleteit.

Készletváltozás

$$z_{t+1} = z_t + (I - A)y_t - c.$$

Decentralizált termelésszabályozás

$$y_t = y^* - \langle d \rangle z_t.$$

Második egyenletünket behelyettesítve az elsőbe, adódik az *alapegyenlet-rendszer*:

$$z_{t+1} = (I - \langle d \rangle + A\langle d \rangle)z_t + (I - A)y^* - c.$$

Mielőtt elemeznénk az alapegyenlet-rendszer dinamikáját, közvetlenül tanulmányozzuk a normál állapot tulajdonságait. Mindenekelőtt egy feltevéssel élünk. A teljes kapacitás képes fedezni a 3. tételbeli végső fogyasztást:

$$y^* > (I - A)^{-1}c.$$

7. Tétel. *Megfelelő kapacitások esetén a készletjelzésen alapuló rendszernek létezik pontosan egy pozitív normál kibocsátása és készlete:*

$$y^o = (I - A)^{-1}c \text{ és } z^o = \langle d \rangle^{-1}[y^* - (I - A)^{-1}c].$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be a $z_t = z_{t+1} = z^o$ és az $y_t = y^o$ összefüggést a megfelelő összefüggéspárba, ahonnan helyettesítéssel adódik az állítás. A $\rho(A) < 1$, az i.e. tétel és $c > 0$ folytán $y^o > 0$ és az egyenletrendszer értelmében $z^o > 0$. ■

Szükségünk lesz a következő fogalomra.

Egy lineáris $x_{t+1} = Mx_t$ iteráció *konvergenciasebessége* a spektrálsugár reciprokértéke:

$$\Phi = \frac{1}{\rho(M)}.$$

Igaz a

8. Tétel. *Tegyük föl, hogy csillapított visszacsatolás működik: $0 < d \leq 1$. Ekkor a) a készletjelzésen alapuló szabályozás stabil; b) a maximális konvergenciasebesség a $d = 1$ esetben valósul meg, értéke*

$$\Phi_1 = \frac{1}{\rho(A)};$$

c) a készletjelzésen alapuló szabályozás tipikusan (aszimptotikusan) oszcillációmentes, azaz az eltérésváltozók előjele egy idő után változatlan marad.

Megjegyzések. 1. Kornai–Simonovits (1981)-ben egy bonyolultabb modellre igazoltuk e tételt, ahol az outputkészletek mellett inputkészletek, és a termelés mellett beszerzési döntések is szerepeltek.

2. Ha túllépünk a $0 < d \leq 1$ korláton, azaz legalább egy i -re $d_i > 1$, akkor általában tovább gyorsíthatjuk a szabályozás konvergenciáját (Varga, 1962, de a későbbi 3. példában nem).

3. A közgazdasági szakirodalom általában elhanyagolja a konvergenciasebesség kvantitatív kérdését, s megelégszik a stabilitás kvalitatív megállapításával. Modelünk biztató, hiszen a konvergenciasebesség megfelelően nagy.

4. Vegyük észre, hogy a stabil készletjelzésen alapuló szabályozás hosszú távon elvezet a normál készletvektorhoz. Dinamikus folyamat nélkül, előzetesen z^o értéke csak papíron, centralizált számítással határozható meg, mert z_i^o értéke függ A és c összes komponensétől.

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy az alapegyenlet-rendszer együttható mátrixa, M nemnegatív. Az egyszerűség kedvéért csak a $d_1 = \dots = d_n = \delta$ esetre szorítkozunk, amikor az $M = (1 - \delta)I + \delta A$ mátrix domináns sajátértékét kell nyomon követni. ■

A következő példa egy olyan rendszert mutat be, ahol a csillapítás feloldásával sem lehet tovább gyorsítani a konvergenciát, mert az A mátrix 2-ciklikus, és két domináns sajátértéke van.

3. Példa. Tekintsünk egy kétszektoros ÁKM-modellt, ahol az A mátrix nettósítva van:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix},$$

és δ lehet 1-nél nagyobb. Igazolható, hogy a tágabb maximum is $\delta = 1$.

Ár- és készletjelzés. Bródy (1973) több szabályozási modellt is elemzett, de talán legfontosabb újítása az volt, hogy a készletjelzés mellé visszahozta az árszabályozást. Elődeihez hasonlóan, ő is a szabályozás stabilitását vizsgálta. A rövidség kedvéért csak a nyereségváltozásról vezérelt diszkrét idejű szabályozást ismertetem, zárt modellel. Saját jelöléseimet alkalmazva, legyen $\mathbf{p}$ egy $n+1$ -dimenziós árvektor, amely időben a

$$\Delta \mathbf{p}_t = -(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y}_t$$

egyenlet szerint változik. A termelés változása viszont a profit változását követi:

$$\Delta \mathbf{y}_t = -(\mathbf{I} - \mathbf{A})\Delta \mathbf{p}_t.$$

Egybevetve a két egyenletet, a termelési dinamikát az

$$\mathbf{y}_{t+1} = [(\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)(\mathbf{I} - \mathbf{A}) + \mathbf{I}]\mathbf{y}_t$$

egyenlet írja le, ahol $\mathbf{A}^*$ az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja. Ha tompítjuk a visszacsatolást, akkor a transzformáció stabillá tehető.

Bródy itt vezette be a *jól orientáló szabályozás* fogalmát: a gazdaság állandó zavarai miatt nem elegendő, ha a rendszer stabil, ezen felül jól kell orientálnia a rendszert: az egyensúlytól mért eltérések lehetőleg ne váltsanak előjelet és szigorúan monoton csökkenjenek. Ennek aszimptotikus változatát (fából vaskarika?) éppen a domináns sajátérték pozitivitása mondja ki (8.c. tétel).

A szakasz lezárásaként megemlíjtük, hogy Bródy idézett cikke indította el Martos Bélát a szabályozások ekvivalenciájának kutatása útján, amelynek gazdag eredményeit Martos (1990) monográfiájában foglalta össze.

6. Következtetések

Írásomban röviden ízelítőt próbáltam adni a nemnegatív elemű mátrixok közgazdasági alkalmazásairól, hiszen e témakör Bródy 55 éves közgazdasági munkásságának egyik központi eleme volt. A nyílt statikus Leontief-modell leírja a végső fogyasztás és a bruttó termelés közti kapcsolatot, de nyitva hagyja a növekedés kérdéseit. A zárt dinamikus Leontief–Bródy-modell nemcsak a növekedési ütemet határozza meg, de rámutat egy érdekes dualitásra: a termelési volumen és a marxi termelési árak egyidejű meghatározására, illetve a profitráta és a növekedési ütem egyezőségére. Egy speciális nemnegatív elemű mátrixcsalád, a sztochasztikus mátrixok segítségével elemezhetők a Markov-láncok, és három érdekes közgazdasági alkalmazásuk szemlélteti a megközelítés hasznosságát. Végül bemutattam a Kornai és Martos által kezdeményezett készletjelzésen alapuló szabályozás elméletét, amely a Bródy által itthon meghonosított ÁKM köré épült, és amelynek továbbfejlesztéséhez Bródy jelentősen hozzájárult. Remélem, hogy e rövid áttekintéssel sikerült felkeltenünk az Olvasó figyelmét a némileg feledésbe merülő kérdéskör iránt.

Hivatkozások

- [1] Arrow, K. J.–Debreu, G. (1954): Existence of Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica* 22, 265–290.
- [2] Bródy, A. (1964): *Az ágazati kapcsolatok modellje*, Budapest, Akadémiai Kiadó.
- [3] Bródy, A. (1969): *Érték és újratermelés*, Budapest, KJK.
- [4] Bródy, A. (1973): Szabályozási modellekről, *Sigma* 6, 93–103.
- [5] Bródy, A. (2004): Leontief zárt dinamikus modellje, *Közgazdasági Szemle* 51, 924–935.
- [6] Dobos, I. (2007): Megjegyzések Bródy András Leontief zárt dinamikus modellje című dolgozatáról, *Közgazdasági Szemle* 54, 1004–1011.
- [7] Dorfmann, R.–Samuelson, P.A.–Solow, R. (1958): *Linear Programming and Economic Analysis*, New York, McGraw Hill.
- [8] Fehr, H.–Habermann, C. [2008]: Risk Sharing and Efficiency Implications of Progressive Pension Arrangements, *Scandinavian Journal of Economics* 110, 419–443.
- [9] Gale, D. (1960): *The Theory of Linear Economic Models*, Chicago, Chicago University Press.
- [10] Garay, B.–Simonovits, A.–Tóth, J. (2011): Local Interaction with Tax Evasion, Budapest, Institute of Economics, HAS, Working Paper.
- [11] Horváth, Gy. (2010): A hatásvizsgálat mikroszimulációs modellje, Holtzer P. szerk. *Jelentés a Nyugdíj és Időskori Kerekasztal tevékenységéről*, Budapest, Miniszterelnökségi Hivatal, 146–172.
- [12] Kornai, J.–Martos, B. (1971): Gazdasági rendszerek vegetatív működése, *Sigma* 4, 34–50.
- [13] Kornai, J.–Martos, B., szerk. (1981): *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó.
- [14] Kornai, J.–Simonovits, A. (1981): Normál pályáról vezérelt készletjelzéses szabályozás, Kornai–Martos, szerk. 205–224.

- [15] Leontief, W. W. (1941): *The Structure of the American Economy*, New York, Oxford University Press (edition in 1951).
- [16] Martos, B. (1990): *Economic Control Structures*, Amsterdam, North Holland.
- [17] Medvegyev, P. (2011): Bródy András és a dualitás matematikai elmélete: a gazdasági növekedés Neumann-modellje *Közgazdasági Szemle* 59, 3–8.
- [18] Méder, Zs. Z.–Simonovits, A.–Vincze, J. (2010): Adómorál és adórendszer: racionális vs. ágensalapú megközelítés, Budapest, MKE-2010. évi konferencia előadása.
- [19] Móczár, J. (1980): Az indekompozabilitás kiterjesztése lineáris gazdasági modellekre, *Szigma* 12.
- [20] Molnár, Gy.–Simonovits, A. (1996): Várározások, stabilitás és működőképesség az együttélő korosztályok realista modelleszaladjában, *Közgazdasági Szemle* 43, 863–890.
- [21] Neumann, J. (1938/1965): Az általános egyensúly egy modellje, *Válogatott előadások és tanulmányok*, Budapest, KJK.
- [22] Rényi, A. (1966): *Valószínűség-számítás*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.
- [23] Rényi, A.–Bródy, A. (1956): Az árrendezés problémái, *Az MTA Matematikai Kutatóintézetének Közleményei* 1, 325–335.
- [24] Rózsa, P. (2009): *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Budapest, Typotex.
- [25] Simonovits, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, Budapest, KJK.
- [26] Varga, R. (1962): *Matrix Iterative Analysis*, Englewood Cliff, N.J., Prentice Hall.
- [27] Zalai, E. (1988): *Munkaérték és sajátérték*, Budapest, Akadémiai Kiadó.
- [28] Zalai, E. (1989): *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*, Budapest, KJK.
- [29] Zalai, E. (2011): Az egyensúlyi ráták unicitása és a berráta pozitivitása a Neumann-modell általánosításában, *Közgazdasági Szemle* 58, 20–40.

*Simonovits András, MTA KRTK, Közgazdaságtudományi Intézet,
1112 Budapest, Budaörsi út 45,
BME Matematikai Intézet és CEU Economics Department,
e-mail: simonov@econ.core.hu*