

Maximum momentum egyenlőtlenségek és alkalmazásai

MÓRICZ FERENC

*A világhírű világjáró matematikus Erdős Pál emlékének
ajánlva születésének 100. évfordulója alkalmából*

1. Bevezetés

Legyen $(f_k(x): k \geq 1)$ valamely véges $I := [a_1, a_2]$ intervallumon értelmezett, valószínű értékű függvényeknek olyan végtelen sorozata, amelyek Lebesgue (esetleg csak Riemann) szerint integrálhatók valamely véges $I := [a_1, a_2]$ intervallumon. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

végtelen sor pontonkénti konvergenciájának vizsgálata céljából bevezetjük az

$$S(b, n; x) := \sum_{k=b+1}^{b+n} f_k(x) \text{ és } M(b, n; x) := \max_{1 \leq k \leq n} |S(b, k; x)|$$

jelöléseket, ahol $b = 0, 1, 2, \dots$ és $n = 1, 2, \dots$. Tehát $M(b, n; x)$ az egymást követő $S(b, k; x)$ részletösszegek legnagyobbika abszolút értékben, amely részletösszegeket az egymás után következő $f_k(x)$ függvényekből képezzük az $f_{b+1}(x)$ függvénytől kiindulva.

Legyenek $p \geq 1$ és $r \geq 1$ tetszőlegesen adott valószínű számok. Az alapvető feltevésünk az lesz, hogy az

$$(1.1) \quad \int_I |S(b, n; x)|^p dx \leq g^r(b, n)$$

egyenlőtlenség fennáll minden $b \geq 1$ és $n \geq 1$ egészszámra, és ahol a jobb oldalon álló $g(b, n)$ függvény nemnegatív értékű és rendelkezik az ún. *superadditív* tulajdonsággal. Ez utóbbin azt értjük, hogy a

$$(1.2) \quad g(b, k) + g(b + k, \ell) \leq g(b, k + \ell)$$

egyenlőtlenség fennáll minden $b \geq 0$ és $k, \ell \geq 1$ egészszámra. A szuperadditív tulajdonság fogalmát Serfling amerikai matematikus vezette be és elsőként bizonyított be a címben jelzett egyenlőtlenségeket (lásd az Irodalomjegyzék [9] cikkét).

Abban a speciális esetben, ha (1.2)-ben a „ $\leq$ ” jel helyett az „ $=$ ” jel érvényes, akkor azt mondjuk, hogy a $g(b, n)$ függvény *additív* tulajdonságú. Továbbá, ha (1.1)-ben a kitevő $p > 1$, akkor még azt is fel kell tennünk, hogy az $|f_1(x)|^p, |f_2(x)|^p, \dots$ függvények mindegyike is Lebesgue szerint integrálható az I intervallumon.

Megjegyezzük, hogy a $g(b, n)$ függvény nemnegatív és szuperadditív tulajdonságaiból következik, hogy rögzített b esetén $g(b, n)$ az n második változójában monoton növekvő függvény. Valóban, a $k := n$ és $\ell := 1$ speciális választás esetében (1.2) szerint

$$(1.3) \quad g(b, n) \leq g(b, n) + g(b + n, 1) \leq g(b, n + 1).$$

Alapvető célul tűzzük ki, hogy az (1.1) és (1.2) egyenlőtlenségekre támaszkodva adjunk felső becslést az

$$\int_I M^p(b, n; x) dx, \quad b \geq 0 \quad \text{és} \quad n \geq 1,$$

integrálokra. Az így nyert momentum egyenlőtlenségeket, amelyek a függvény-sorok részletösszegeinek maximumára vonatkoznak *maximál momentum egyenlőtlenségeknek* is szokás nevezni.

Tanulságos annak a speciális esetnek a vizsgálata, amikor

$$(1.4) \quad f_k(x) := c_k \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

ahol $(c_k: k \geq 1)$ valós számok (ún. *együtthatók*) tetszőleges sorozata, míg $(\varphi_k(x): k \geq 1)$ függvények ún. *ortonormált rendszere* (rövidítve: ONR) az I intervallumon. Ez utóbbin azt értjük, hogy

$$(1.5) \quad \int_I \varphi_k(x) \varphi_\ell(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq \ell; \\ 1, & \text{ha } k = \ell; \quad k, \ell = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Az itt szereplő integrál biztosan létezik, ha a $\varphi_k(x)$ függvényekről feltesszük, hogy a négyzetük is Lebesgue integrálható az I intervallumon. Ugyanis, ekkor az

$$|\varphi_k(x) \varphi_\ell(x)| \leq \frac{1}{2}(\varphi_k^2(x) + \varphi_\ell^2(x))$$

egyenlőtlenségben a jobboldal integrálható az I intervallumon, ennek következtében a baloldal is integrálható az I -n.

Az (1.4)–(1.5) speciális esetben egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\begin{aligned} \int_I S^2(b, n; x) dx &:= \int_I \left(\sum_{k=b+1}^{b+n} c_k \varphi_k(x) \right)^2 dx \\ &= \sum_{k=b+1}^{b+n} \sum_{\ell=b+1}^{b+n} c_k c_\ell \int_I \varphi_k(x) \varphi_\ell(x) dx = \sum_{k=b+1}^{b+n} c_k^2. \end{aligned}$$

Tehát ebben az esetben az (1.1) egyenlőtlenség fennáll a $p = 2$ és

$$g(b, n) := \sum_{k=b+1}^{b+n} c_k^2, \quad b \geq 0, \quad n \geq 1,$$

választással; ráadásul az „=” jellel a „ $\leq$ ” jel helyett (1.2)-ben.

A legegyszerűbb példa ortogonális függvényrendszerre a *trigonometrikus rendszer*, amelynek függvényei:

$$1, \cos kx, \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots$$

a $[0, 2\pi]$ alapintervallumon. Bár tekintettel ezen függvények 2π szerinti periodikus volta, a fenti trigonometrikus rendszer függvényei bármely 2π hosszúságú intervallumon is ortogonálisok. Az ortogonalitásról egyből meggyőződhetünk, ha az alábbi trigonometrikus azonosságokat használjuk:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)), \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)). \end{aligned} \tag{1.6}$$

A trigonometrikus rendszer csak ortogonális, de nem normált, mivel

$$\int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Az *ortonormált trigonometrikus rendszer* tehát a következő:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Az általánosított Rademacher–Mensov egyenlőtlenség

A következő 2.1. Tételben fogalmazzuk meg az alcímben jelzett egyenlőtlenséget, amelyet a jelen cikk szerzője bizonyított be az Irodalomjegyzékben található [7] cikkében. Az eredeti Rademacher–Mensov egyenlőtlenséget a következő 3. fejezet 3.1. Korolláriumában fogjuk megfogalmazni.

2.1. Tétel. Ha $p \geq 1$, $r = 1$ és az (1.1) egyenlőtlenség fennáll minden $b \geq 0$ és $n \geq 1$ egészszámra, ahol $g(b, n)$ nemnegatív és szuperadditív tulajdonságú, akkor minden $b \geq 0$ és $n \geq 1$ egészszámra az is fennáll, hogy

$$(2.1) \quad \int_I M^p(b, n; x) dx \leq (\log 2n)^p g(b, n),$$

ahol a „log” a kettes alapú logaritmust jelöli.

A 2.1. Tétel szerint az (1.1) momentum egyenlőtlenség fennállásából, a feltételek teljesülése esetén, a (2.1) maximál momentum egyenlőtlenségre tudunk következtetni.

Bizonyítás. A (2.1) egyenlőtlenséget n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor definíció szerint

$$M(b, 1; x) = |S(b, 1; x)|, \quad b \geq 0.$$

Mivel $\log 2 = 1$, ezért a bizonyítandó (2.1) egyenlőtlenség ebben az esetben triviálisan fennáll.

Tekintsük ezután az $n = 2$ esetet. Könnyen beláthatjuk, hogy

$$\max\{|f_{b+1}(x)|, |f_{b+1}(x) + f_{b+2}(x)|\} \leq |f_{b+1}(x)| + \{|f_{b+1}(x)|^p + |f_{b+2}(x)|^p\}^{1/p},$$

amelyből következik, hogy

$$(2.2) \quad M(b, 2; x) \leq |S(b, 1; x)| + \{|S(b, 1; x)|^p + |S(b+1, 1; x)|^p\}^{1/p}.$$

Mivel $p \geq 1$, ezért alkalmazhatjuk a *Minkowski egyenlőtlenséget* (amely valójában a *háromszög egyenlőtlenség* az L^p -térben, lásd például az Irodalomjegyzék [11] könyvében a 299. oldalon) és ezáltal (2.2)-ből nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \left\{ \int_I M^p(b, 2; x) dx \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \int_I |S(b, 1; x)|^p dx \right\}^{1/p} \\ &\quad + \left\{ \int_I |S(b, 1; x)|^p dx + \int_I |S(b+1, 1; x)|^p dx \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Ha az így nyert egyenlőtlenség jobb oldalán az (1.1) és (1.2) egyenlőtlenségeket alkalmazzuk, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (2.3) \quad \left\{ \int_I M^p(b, 2; x) dx \right\}^{1/p} &\leq g^{1/p}(b, 1) + \{g(b, 1) + g(b+1, 1)\}^{1/p} \\ &\leq g^{1/p}(b, 1) + g^{1/p}(b, 2) \leq 2g^{1/p}(b, 2), \end{aligned}$$

amelynek során az (1.3) egyenlőtlenséget is kihasználtuk.

A most kapott (2.3) egyenlőtlenség éppen a bizonyítandó (2.1) egyenlőtlenség az $n = 2$ esetben.

Az $n = 1, 2$ konkrét esetek bizonyítása után áttérünk az $n \geq 3$ általános eset bizonyítására. Indukciós feltevésünk az, hogy a bizonyítandó (2.1) egyenlőtlenség fennáll minden $b \geq 0$ egészszám és a $g(b, \cdot)$ szuperadditív függvény második változójában minden olyan egészszámra is, amely a szóban forgó n -nél kisebb. Ezen indukciós feltevésre támaszkodva fogjuk bizonyítani, hogy akkor a (2.1) egyenlőtlenség n -re is fennáll, ahol $b \geq 0$ tetszőleges egészszám lehet.

Ezen célból legyen

$$(2.4) \quad m := \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

ahol a $\lceil \cdot \rceil$ szimbólummal egy valós szám *egész részét* jelöljük. Például az $n = 3$ esetben $m := \lceil 5/2 \rceil = 2$. Könnyen beláthatjuk, hogy ha az n páros szám, mondjuk $n = 2\nu$, ahol ν egészszám, akkor

$$m := \nu + 1 \quad \text{és így} \quad 2m = 2\nu + 2 = n + 2,$$

amelynek következtében ekkor

$$(2.5) \quad 2(m-1) = n \quad \text{és} \quad n - m = m - 2.$$

Ha viszont n páratlan szám, mondjuk $n = 2\nu + 1$, ahol ν egészszám, akkor

$$m := \nu + 1, \quad \text{viszont} \quad 2m = 2\nu + 2 = n + 1,$$

amelynek következtében ekkor

$$(2.6) \quad 2(m-1) \leq n \quad \text{és} \quad n - m = m - 1.$$

Összefoglalva (2.5)-öt és (2.6)-ot megállapíthatjuk, hogy mindkét esetben érvényes az alábbi két egyenlőtlenség:

$$(2.7) \quad 2(m-1) \leq n \quad \text{és} \quad n - m \leq m - 1.$$

Ezen előkészítés után rátérünk az $M(b; n)$ maximum becslésére, ahol $b \geq 0$ és $n \geq 3$ tetszőleges egészszámok, míg az m egészszámot (2.4) szerint választjuk. Egyszerűen belátható, hogy ha $m \leq k \leq n$, akkor

$$|S(b, k; x)| \leq |S(b, m; x)| + |S(b + m, k - m; x)|$$

azzal a megállapodással, hogy a $k = m$ esetén legyen $S(b + m, 0; x) := 0$. Innen egyből következik, hogy minden ilyen k -ra az is fennáll, hogy

$$|S(b, k; x)| \leq |S(b, m; x)| + M(b + m, n - m; x).$$

Ha pedig $1 \leq k \leq m - 1$, akkor nyilvánvaló, hogy

$$|S(b, k; x)| \leq M(b, m - 1; x).$$

A két utóbbi egyenlőtlenséget egybefoglalva nyerjük, hogy minden $b \geq 0$ és $1 \leq k \leq n$ egészszám esetén fennáll az

$$|S(b, k; x)| \leq |S(b, m; x)| + \{M^p(b, m - 1; x) + M^p(b + m, n - m; x)\}^{1/p}$$

egyenlőtlenség, ami azzal ekvivalens, hogy

$$(2.8) \quad M(b, n; x) \leq |S(b, m; x)| + \{M^p(b, m - 1; x) + M^p(b + m, n - m; x)\}^{1/p}.$$

Mivel $p \geq 1$, a Minkowski egyenlőtlenség alkalmazásával (2.8)-ból nyerjük, hogy

$$(2.9) \quad \left\{ \int_I M^p(b, n; x) dx \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_I |S(b, m; x)|^p dx \right\}^{1/p} + \left\{ \int_I M^p(b, m - 1; x) dx + \int_I M^p(b + m, n - m; x) dx \right\}^{1/p}.$$

Egyrészt, (1.1) szerint fennáll, hogy

$$(2.10) \quad \int_I |S(b, m; x)|^p dx \leq g(b, m).$$

Másrészt, (2.6) szerint $2(m - 1) \leq n$ és $n - m < m$; ezért az indukciós feltevést alkalmazva kapjuk, hogy

$$(2.11) \quad \int_I M^p(b, m - 1; x) dx \leq \{\log 2(m - 1)\}^p g(b, m - 1) \leq (\log n)^p g(b, m - 1)$$

és

$$(2.12) \quad \int_I M^p(b - m, n - m; x) dx \leq \{\log 2(n - m)\}^p g(b + m, n - m) \leq (\log n)^p g(b + m, n - m).$$

Tekintve, hogy a $g(b, \cdot)$ függvény a második változójában monoton növvő, ezért a (2.11), (2.12) és (1.2) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$(2.13) \quad \int_I M^p(b, m-1; x) dx + \int_I M^p(b+m, n-m; x) dx \\ \leq (\log n)^p \{g(b, m-1) + g(b+m, n-m)\} \leq (\log n)^p g(b, n).$$

Összefoglalva a (2.9), (2.10) és (2.13) egyenlőtlenségeket nyerjük, hogy

$$\left\{ \int_I M^p(b, n; x) dx \right\}^{1/p} \leq g^{1/p}(b, m) + (\log n) g^{1/p}(b, n) \\ \leq (1 + \log n) g^{1/p}(b, n) = (\log 2n) g^{1/p}(b, n),$$

ami a bizonyítandó (2.1) egyenlőtlenséggel ekvivalens. Így az indukciós lépés bizonyítását és ezzel együtt a 2.1. Tétel bizonyítását is befejeztük. ■

Megjegyezzük, hogy a 2.1. Tételt és a továbbiakban ismertetésre kerülő 4.1. Tételt is a jelen cikk szerzője a valószínűségszámításban szokásos terminológiát használva bizonyította be az Irodalomjegyzékben található [7] cikkében. Pontosabban szólva, legyen $(\xi_k: k \geq 1)$ *véletlen változók* (angolul: random variables) végtelen sorozata az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyeknek létezik a p -edik momentuma, amit az

$$E|\xi_k|^p := \int_{\Omega} |\xi_k(\omega)|^p dP(\omega) < \infty, \quad k = 1, 2, \dots;$$

képlettel értelmezzük, ahol $p \geq 1$ valós szám. Az „ E ” betű az angol „expectation” (magyar megfelelője: *várható érték*) szó kezdőbetűje. Az

$$S(b, n) := \sum_{k=b+1}^{b+n} \xi_k, \quad b = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$M(b, n) := \max\{|S(b, k)|: k = 1, 2, \dots, n\}$$

jelöléseket használva a 2.1. Tétel következő átfogalmazását bizonyítottuk be a fentebb már említett [7] cikkünkben.

2.2. Tétel. *Ha minden $b \geq 0$ és $n \geq 1$ egészszámra fennáll az*

$$E|S(b, n)|^p \leq g(b, n)$$

egyenlőtlenség, ahol $p \geq 1$ és $g(b, n)$ nemnegatív és szuperadditív tulajdonságú, akkor minden $b \geq 0$ és $n \geq 1$ egészszámra az is fennáll, hogy

$$EM^p(b, n) \leq (\log 2n)^p g(b, n).$$

3. Ortogonális függvénysorok konvergenciája

Az ortogonális függvénysorok elméletében alapvető jelentőségű a 2.1. Tételnek az a speciális esete, amikor a szóbanforgó $f_k(x)$ függvényeket az (1.4) alakban adjuk meg. Ebben az esetben kapjuk az ortogonális függvénysorok elméletéből jól ismert *Rademacher–Mensov egyenlőtlenséget*.

3.1. Korollárium. *Ha $(\varphi_k(x): k \geq 1)$ tetszőleges ONR valamely I intervallumon és*

$$S(b, n; x) := \sum_{k=b+1}^{b+n} c_k \varphi_k(x), \quad b = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots;$$

ahol $(c_k: k \geq 1)$ valós számok tetszőleges sorozata, akkor

$$(3.1) \quad \int_I M^2(b, n; x) dx \leq (\log 2n)^2 \sum_{k=b+1}^{b+n} c_k^2, \quad b = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

Megjegyezzük, hogy az ortogonális függvénysorok elméletének irodalmában a $(\log 2n)^2$ tényező helyett általában az $O(\log^2 n)$ tényező szerepel, mint például az Irodalomjegyzék [1] könyvének 79. oldalán. Ezen utóbbi jelölésen a $C(\log n)^2$ tényezőt kell értenünk, ahol a C alkalmas, de közelebből meg nem határozott állandót jelöl.

A következő tételben fogalmazzuk meg az ortogonális függvénysorok elméletében alapvető szerepet játszó *Rademacher–Mensov konvergenciatételt*.

3.2. Tétel. *Ha $(\varphi_k(x): k \geq 1)$ tetszőleges ONR valamely I intervallumon és a valós együtthatók $(c_k: k \geq 1)$ sorozatára fennáll, hogy*

$$(3.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (\log 2k)^2 < \infty,$$

akkor a

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

ortogonális függvénysor az I intervallum majdnem minden pontjában konvergál.

A „majdnem minden (rövidítve: m.m.) pontban” kifejezésen azt értjük, hogy „nullamértékű” az I intervallum azon pontjainak halmaza, amelyekben a (3.3) ortogonális függvénysor divergál; ami definíció szerint azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén az I -beli divergencia pontok halmaza lefedhető véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok olyan intervallummal, amelyeknek az összhosszúsága ε -nál kisebb.

3.2. Tétel bizonyítása. Először azt bizonyítjuk, hogy a (3.2) feltételből következik a (3.3) ortogonális függvénysor

$$S_{2^m}(x) := \sum_{k=1}^{2^m} c_k \varphi_k(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

alakú részletösszegeinek m.m. pontban való konvergenciája. A $(\varphi_k(x))$ rendszer ortonormált tulajdonságából és (3.2)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} (3.4) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \int_I m^2 S_{2^m, 2^m}^2(x) dx &:= \sum_{m=1}^{\infty} \int_I m^2 \left(\sum_{k=2^{m+1}}^{2^{m+1}} c_k \varphi_k(x) \right)^2 dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sum_{k=2^{m+1}}^{2^{m+1}} c_k^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2^{m+1}}^{2^{m+1}} c_k^2 (\log k)^2 < \infty. \end{aligned}$$

A Lebesgue integrálra vonatkozó *monoton konvergenciatétel* (Beppo Levi tételének nevezve, lásd az Irodalomjegyzék [11] könyvében a 152. oldalon) szerint (3.4)-ből következik, hogy az integranduszokból álló sor az I intervallum m.m. pontjában konvergál; azaz

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 S_{2^m, 2^m}^2(x) < \infty \quad \text{m.m.}$$

A véges számsorozatokra vonatkozó *Cauchy egyenlőtlenséget* alkalmazva kapjuk, hogy tetszőleges $\nu \geq 1$ és $q \geq 1$ egészszámokra fennáll, hogy

$$\begin{aligned} (S_{2^{\nu+q}}(x) - S_{2^{\nu}}(x))^2 &:= \left(\sum_{m=\nu}^{\nu+q-1} S_{2^m, 2^m}(x) \right)^2 \\ &\leq \sum_{m=\nu}^{\nu+q-1} m^2 S_{2^m, 2^m}^2(x) \sum_{m=\nu}^{\nu+q-1} \frac{1}{m^2} \\ &= o\left(\frac{1}{\nu}\right) \rightarrow 0 \quad \text{m.m., ha } \nu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy a *Cauchy belső konvergencia kritérium* az $(S_{2^m}(x); m \geq 1)$ sorozatra m.m. pontban teljesül, ezért az m.m. pontban konvergál.

Ezután már csak azt kell bizonyítanunk, hogy az

$$(3.5) \quad M_{2^m, 2^m}(x) := \max_{2^m < n \leq 2^{m+1}} |S_n(x) - S_{2^m}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{ha } m \rightarrow \infty$$

határérték is fennáll az I intervallum m.m. pontjában. A (3.1) egyenlőtlenséget és a (3.2) feltételt alkalmazva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} \int_I M_{2^m, 2^m}^2(x) dx &\leq \sum_{m=2}^{\infty} (m+1)^2 \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 \\ &\leq \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 (\log 2k)^2 = \sum_{k=5}^{\infty} c_k^2 (\log 2k)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Ismét a monoton konvergenciatételt alkalmazva kapjuk, hogy a $\sum_{m=2}^{\infty} M_{2^m, 2^m}^2(x)$ sor m.m. pontban konvergál, amelyből (3.5) triviálisan következik. Ezzel a 3.2. Tétel bizonyítását befejeztük. ■

A magyar ortogonális függvénysorok kiváló szakértője, Tandori Károly 1957-ben azt bizonyította be (lásd az Irodalomjegyzék [12] cikkében), hogy bizonyos esetben a (3.2) feltétel nemcsak elegendő, hanem egyben szükséges feltétele is a (3.3) ortogonális függvénysor m.m. pontban való konvergenciájának. Ezt a nevezetes eredményt fogalmazzuk meg a következő tételben.

3.3. Tétel. *Ha a valós együtthatók $(c_k: k \geq 1)$ sorozata olyan, hogy $|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \dots$ és*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (\log 2k)^2 = \infty,$$

akkor tetszőleges $I := [a_1, a_2]$ intervallumon megadható olyan $(\varphi_k(x): k \geq 1)$ ONR, amelyre a (3.3) ortogonális függvénysor az I intervallum minden pontjában divergál.

Megjegyezzük, hogy hasonló tételek érvényesek *ortogonális véletlen változók* esetében is (lásd például az Irodalomjegyzék [7] cikkében és [8] könyvének 3. fejezetében). Mint ismeretes, a valószínűségszámításban a m.m. konvergencia szerepét a *majdnem biztos* (angolul: almost surely) szakkifejezés veszi át. Példaképpen idézzük a *nagy számok erős törvényének* (angolul: strong law of large numbers) következő változatát.

3.4. Tétel. *Legyen $(\xi_k: k \geq 1)$ véges második momentummal rendelkező, ortogonális véletlen változók sorozata; azaz*

$$E(\xi_k, \xi_\ell) = 0 \quad \text{és} \quad \sigma_k^2 := E(\xi_k^2) < \infty, \quad k \neq \ell; \quad k, \ell = 1, 2, \dots$$

Ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} (\log 2k)^2 < \infty,$$

akkor a nagy számok erős törvénye fennáll, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = 0 \quad \text{majdnem biztosan.}$$

A 3.4. Tétel bizonyítása a 2.1. Tétel (a $p = 2$ speciális esetben) és az úgynevezett Kronecker lemma (lásd, például [1, Theorem 2.2.2 a 72. oldalon]) együttes alkalmazásával történik. Az utóbbi lemma a következőképpen fogalmazható meg.

Kronecker lemma. Legyen $(\lambda_k: k \geq 1)$ pozitív számoknak olyan sorozata, amely monoton növe tart ∞ -be. Ha a valós számok $(c_k: k \geq 1)$ sorozata olyan, amelyre a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k}$$

sor konvergens, akkor fennáll, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n c_k = 0.$$

4. Az általánosított Erdős–Sztecskin egyenlőtlenség

A már bizonyított 2.1. Tétel feltételében szereplő (1.1) egyenlőtlenség következményét az $r = 1$ kitevő esetében vizsgáltuk. A most következő 4.1. Tételben, amelyet szintén a jelen cikk szerzője bizonyított be az Irodalomjegyzékben található [7] cikkében, viszont éppen az lesz a lényeges, hogy $r > 1$. A fenti alcímben jelzett egyenlőtlenséget a következő tételben fogalmazzuk meg, míg az eredeti *Erdős–Sztecskin egyenlőtlenséget* a következő fejezet 5.4. Tételében fogjuk megfogalmazni.

4.1. Tétel. Ha $p \geq 1$, $r > 1$ és az (1.1) egyenlőtlenség fennáll minden $b \geq 0$ és $n \geq 1$ egészszámra, ahol $g(b, n)$ nemnegatív és szuperadditív tulajdonságú, akkor minden $b \geq 0$ és $n \geq 1$ egészszámra az is fennáll, hogy

$$(4.1) \quad \int_I M^p(b, n; x) dx \leq C g^r(b, n)$$

feltéve, hogy a C állandó elég nagy; pontosabban szólva, ha

$$(4.2) \quad C \geq (1 - 2^{(1-r)/p})^{-p}.$$

Bizonyítás. A 2.1. Tétel bizonyításához hasonlóan, a 4.1. Tételt is n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 1$ esetben a bizonyítandó (4.1) egyenlőtlenség triviálisan fennáll már a $C = 1$ választással is. Az $n \geq 2$ általános esetben az indukciós feltevésünk az, hogy a bizonyítandó (4.1) egyenlőtlenség fennáll minden $b \geq 0$ egészszám és a $g(b, \cdot)$ szuperadditív függvény második változójában minden olyan egészszáma is, amely n -nél kisebb. Ezen indukciós feltevésünkre támaszkodva fogjuk bizonyítani, hogy akkor a (4.1) egyenlőtlenség n -re is fennáll, ahol $b \geq 0$ tetszőleges egészszám.

Ezen célból úgy választunk egy m egészszámot, $1 \leq m \leq n$, hogy a

$$(4.3) \quad g(b, m-1) \leq \frac{1}{2}g(b, n) < g(b, m)$$

egyenlőtlenségpár fennálljon, azzal a megállapodással, hogy az $m = 1$ esetén legyen $g(b, 0) := 0$. Megjegyezzük, hogy a második szélsőséges esetben, amikor (4.3)-ban $m = n$, a második egyenlőtlenség fennállása triviális.

Mivel $g(b, \cdot)$ a második változójában monoton növekvő, ezért biztosan létezik olyan m egészszám, amelyre a (4.3) egyenlőtlenségpár fennáll. Az is nyilvánvaló, hogy (1.2)-ből és (4.3)-ból egyből következik, hogy

$$(4.4) \quad \begin{aligned} g(b+m, n-m) &\leq g(b, n) - g(b, m) \\ &< g(b, n) - \frac{1}{2}g(b, n) = \frac{1}{2}g(b, n). \end{aligned}$$

Az indukciós bizonyítást először abban az esetben végezzük el, amikor (4.3)-ban $1 < m < n$. Nyilvánvaló, hogy ha $m \leq k \leq n$, akkor

$$\begin{aligned} |S(b, k; x)| &\leq |S(b, m; x)| + |S(b+m, k-m; x)| \\ &\leq |S(b, m; x)| + M(b+m, n-m; x), \end{aligned}$$

azzal a megállapodással, hogy a $k = m$ esetben legyen $S(b+m, 0; x) := 0$.

Ha viszont $1 \leq k < m$, akkor nyilvánvaló, hogy

$$|S(b, k; x)| \leq M(b, m-1; x).$$

Az utóbbi két egyenlőtlenséget egybefoglalva nyerjük, hogy minden $b \geq 0$ és $1 \leq k \leq n$ egészszáma fennáll az

$$|S(b, k; x)| \leq |S(b, m; x)| + \{M^p(b, m-1; x) + M^p(b+m, n-m; x)\}^{1/p}$$

egyenlőtlenség, ami azzal ekvivalens, hogy

$$(4.5) \quad M(b, m; x) \leq |S(b, m; x)| + \{M^p(b, m-1; x) + M^p(b+m, n-m; x)\}^{1/p}.$$

Mivel $p \geq 1$, a Minkowski egyenlőtlenség alkalmazásával (4.5)-ből nyerjük, hogy

$$(4.6) \quad \left\{ \int_I M^p(b, n; x) dx \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_I |S(b, m; x)|^p dx \right\}^{1/p} + \left\{ \int_I M^p(b, m-1; x) dx + \int_I M^p(b+m, n-m; x) dx \right\}^{1/p}.$$

Az (1.1) egyenlőtlenség és a $g(b, \cdot)$ függvény második változójában való monoton növekvő tulajdonsága következtében triviálisan fennáll, hogy

$$(4.7) \quad \int_I |S(b, m; x)|^p dx \leq g^r(b, m) \leq g^r(b, n).$$

Mivel $m-1 < n$ és $n-m < n$, ezért mindkét esetben alkalmazhatjuk az indukciós feltevésünket és kapjuk a következő két egyenlőtlenséget:

$$(4.8) \quad \int_I M^p(b, m-1; x) dx \leq C g^r(b, m-1) \leq \frac{C}{2^r} g^r(b, n)$$

és

$$(4.9) \quad \int_I M^p(b+m, n-m; x) dx \leq C g^r(b+n, n-m) \leq \frac{C}{2^r} g^r(b, n),$$

ahol (4.3)-at, illetve (4.4)-et is kihasználtuk.

A (4.6)–(4.9) egyenlőtlenségek egybefoglalásával nyerjük, hogy

$$(4.10) \quad \left\{ \int_I M^p(b, n; x) dx \right\}^{1/p} \leq \left(1 + \frac{C^{1/p}}{2^{(r-1)/p}} \right) g^{r/p}(b, n) \leq C^{1/p} g^{r/p}(b, n),$$

azzal a feltevéssel, hogy

$$1 + \frac{C^{1/p}}{2^{(r-1)/p}} \leq C^{1/p}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség pedig azzal ekvivalens, hogy

$$2^{(r-1)/p} \leq (2^{(r-1)/p} - 1) C^{1/p},$$

ahol az $r > 1$ feltétel lényeges; ebből pedig rendezéssel kapjuk, hogy

$$C^{1/p} \geq \frac{2^{(r-1)/p}}{2^{(r-1)/p} - 1} = (1 - 2^{(1-r)/p})^{-1},$$

ahogyan ezt (4.2)-ben állítottuk. Ezzel az indukciós lépés bizonyítását az $1 < m < n$ esetben befejeztük.

Hátra van még az indukciós lépés bizonyítása abban a két speciális esetben, amikor $m = 1$ vagy pedig $m = n$. Az $m = 1$ esetben az (1.2) és (4.3) egyenlőtlenségeket használva adódik, hogy

$$(4.11) \quad g(b+1, n-1) \leq g(b, n) - g(b, 1) \leq g(b, n) - \frac{1}{2}g(b, n) = \frac{1}{2}g(b, n).$$

Az $M(b, 0; x) := 0$ megállapodással a (4.5) becslés a következő alakú lesz:

$$M(b, n; x) \leq |S(b, 1; x)| + M(b+1, n-1; x).$$

Ha erre alkalmazzuk a Minkowski egyenlőtlenséget, majd kihasználjuk (1.1)-et, az indukciós feltevést és még (4.11)-et is, akkor kapjuk, hogy

$$(4.12) \quad \begin{aligned} & \left\{ \int_I M^p(b, n; x) dx \right\}^{1/p} \\ & \leq \left\{ \int_I |S(b, 1; x)|^p dx \right\}^{1/p} + \left\{ \int_I M^p(b+1, n-1; x) dx \right\}^{1/p} \\ & \leq g^{r/p}(b, 1) + C^{1/p} g^{r/p}(b+1, n-1) \\ & \leq g^{r/p}(b, n) + \frac{C^{1/p}}{2^{r/p}} g^{r/p}(b, n) = \left(1 + \frac{C^{1/p}}{2^{r/p}} \right) g^{r/p}(b, n). \end{aligned}$$

A most kapott egyenlőtlenségek közül a végső jobboldalon álló kifejezés nyilvánvalóan kisebb, mint a (4.10)-ben kapott középső kifejezés. Így a (4.2)-beli C -vel a (4.12)-beli egyenlőtlenség is nyilvánvalóan fennáll.

A másik $m = n$ speciális esetben a (4.5) becslés az $M(b+n, 0; x) := 0$ megállapodással a következő triviális alakú lesz:

$$M(b, n; x) \leq |S(b, n; x)| + M(b, n-1; x).$$

Ha erre alkalmazzuk a Minkowski egyenlőtlenséget, majd kihasználjuk (1.1)-et, az indukciós feltevést és még (4.10)-et is, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_I M^p(b, n; x) dx \right\}^{1/p} \\ & \leq \left\{ \int_I |S(b, n; x)|^p dx \right\}^{1/p} + \left\{ \int_I M^p(b, n-1; x) dx \right\}^{1/p} \\ & \leq g^{r/p}(b, n) + C^{1/p} g^{r/p}(b, n-1) \\ & \leq g^{r/p}(b, n) + \frac{C^{1/p}}{2^{r/p}} g^{r/p}(b, n) = \left(1 + \frac{C^{1/p}}{2^{r/p}} \right) g^{r/p}(b, n), \end{aligned}$$

amelyben a végső jobboldalon álló kifejezés a (4.12)-ben kapott végső jobboldalon álló kifejezéssel azonos. Így a (4.2)-beli C -vel a most kapott egyenlőtlenség is nyilvánvalóan fennáll.

Ezzel az indukciós lépés bizonyítását mind a három esetben (nevezetesen az $1 < m < n$, az $m = 1$ és az $m = n$ esetekben) és ezzel együtt a 4.1. Tétel bizonyítását is befejeztük. ■

5. Lakunáris Fourier sorok konvergenciája

Legyen $(c_k: k \geq 1)$ és $(d_k: k \geq 1)$ valós számoknak két tetszőleges sorozata, továbbá $(m_k: k \geq 1)$ pedig természetes számoknak monoton növekvő sorozata. A

$$(5.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos m_k x + d_k \sin m_k x)$$

trigonometrikus sort *lakunárisnak* (magyar terminussal: *hézagossnak*) nevezzük, ha az m_k frekvenciákra az alábbi hézagossági feltétel teljesül (lásd az Irodalomjegyzék [2] könyvében a 232. oldalon):

$$(5.2) \quad \frac{m_{k+1}}{m_k} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

A következő tételt Kolmogorov bizonyította az Irodalomjegyzékben található [6] cikkében:

5.1. Tétel. *Ha*

$$(5.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 + d_k^2) < \infty,$$

akkor az (5.1) lakunáris trigonometrikus sor m.m. konvergál.

Megjegyezzük, hogy ha az (5.3) feltétel teljesül, akkor az (5.1) trigonometrikus sor egyben Fourier sor is, mégpedig egy négyzetesen integrálható, periodikus függvény Fourier sora. (Lásd például az Irodalomjegyzék [11] könyvében a 261–262. oldalakon.)

A természetes számoknak egy $(m_k: k \geq 1)$ sorozatáról akkor mondjuk, hogy (B_2) *feltételnek* tesz eleget (lásd az Irodalomjegyzék [2] könyvének 233. oldalán), ha megadható olyan s természetes szám, hogy bármely m természetes szám legfeljebb s különböző módon állítható elő az (m_k) sorozat két tagjának összegeként vagy különbségeként, vagyis az $m = m_\ell + m_k$ vagy $m = m_\ell - m_k$ alakban, ahol $1 \leq k < \ell$.

A következő tételt Erdős Pál bizonyította az Irodalomjegyzékben található [4] cikkében (lásd szintén a [2] könyv 258–263. oldalain).

5.2. Tétel. *Ha a valós számok $(c_k: k \geq 1)$ és $(d_k: k \geq 1)$ két sorozatára az (5.3) feltétel teljesül, és a természetes számok $(m_k: k \geq 1)$ sorozata eleget tesz a (B_2) feltételnek, akkor az (5.1) Fourier sor m.m. konvergál.*

Írásunk következő 6. fejezetében bizonyítani fogjuk, hogy a természetes számok bármely $(m_k: k \geq 1)$ lakunáris sorozata eleget tesz a (B_2) feltételnek. Következésképpen az 5.1. Tétel speciális esete az 5.2. Tételnek.

Erdős Pál fenti tételének bizonyításában Szidon Simon következő lemmáját használta fel (lásd az Irodalomjegyzék [10] cikkében, vagy pedig [2] könyvének a 233. oldalán).

5.3. Lemma. *Ha természetes számok $(m_k: k \geq 1)$ sorozata teljesíti a (B_2) feltételt, akkor tetszőleges*

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^n c_k \cos m_k x \quad \text{vagy} \quad T_n(x) := \sum_{k=1}^n d_k \sin m_k x$$

trigonometrikus polinomra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(5.4) \quad \int_0^{2\pi} T_n^4(x) dx \leq C \left(\int_0^{2\pi} T_n^2(x) dx \right)^2 \\ = C \left(\pi \sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^2 \quad \text{vagy} \quad C \left(\pi \sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^2,$$

ahol a C állandó értéke nem függ sem a $T_n(x)$ trigonometrikus polinom n rendjétől, sem a $(c_k: k \geq 1)$ vagy $(d_k: k \geq 1)$ valós együtthatóktól.

A fenti 5.3. Lemma bizonyítását a következő 6. fejezetben fogjuk ismertetni.

Nilvánvaló, hogy az (5.4) egyenlőtlenség az (1.1) egyenlőtlenségnek azon speciális esete, amikor $p := 4$ és $r := 2$, továbbá

$$S(b, n; x) = \sum_{k=b+1}^{b+n} c_k \cos m_k x \quad \text{vagy} \quad \sum_{k=b+1}^{b+n} d_k \sin m_k x$$

és

$$(5.5) \quad g(b, n) := \sqrt{C} \pi \sum_{k=b+1}^{b+n} c_k^2 \quad \text{vagy} \quad \sqrt{C} \pi \sum_{k=b+1}^{b+n} d_k^2$$

(az additív eset), ahol $b \geq 0$ és $n \geq 1$ tetszőleges egészszámok.

Erdős Pál fenti 5.2. Tételének bizonyításában Szidon Simon lemmájának (5.4) egyenlőtlenségéből lényegében a (4.1) maximál momentum egyenlőtlenségnek azon speciális esetét vezette le, amelyben az additív $g(b, n)$ függvény (5.5) alakú; anélkül, hogy külön tételben vagy lemmában fogalmazta volna meg a 4.1. Tétel alkalmazásával adódó

$$(5.6) \quad \int_0^{2\pi} M^4(b, n; x) dx \leq (1 - 2^{-1/4})^{-4} C \pi^2 g^2(b, n)$$

maximál momentum egyenlőtlenséget. Majd a 3.2. Tétel bizonyításához hasonló módon, Erdős Pál az (5.6) egyenlőtlenségre támaszkodva bizonyította be az (5.1) Fourier sor m.m. konvergenciáját.

Megjegyezzük, hogy Erdős Pál 5.2. Tételének bizonyítását tanulmányozva, S.B. Sztecskin orosz matematikus sejtette az alábbi maximál momentum egyenlőtlenséget, akinek szóbeli közlése alapján V.F. Gaposkhin közölte azt az Irodalomjegyzék [5, lásd a 29–31. oldalakon] cikkében, és amely egyenlőtlenség az *Erdős–Sztecskin egyenlőtlenség* néven vált ismertté a szakirodalomban. A következő 5.4. Tételben ezt fogalmazzuk meg a jelen cikkünk jelölésrendszerét használva.

5.4. Tétel. *Ha $\gamma > 2$ és létezik valós számoknak olyan $(c_k: k \geq 1)$ sorozata, amelyre az*

$$\int_I |S(b, n; x)|^\gamma dx \leq C \left(\sum_{k=b+1}^{b+n} c_k^2 \right)^{\gamma/2}$$

egyenlőtlenség minden $b \geq 0$ és $n \geq 1$ egészszámra fennáll, ahol C állandó, akkor minden $b \geq 0$ és $n \geq 1$ egészszámra az is fennáll, hogy

$$\int_I M^\gamma(b, n; x) dx \leq C_\varepsilon C \left(\sum_{k=b+1}^{b+n} c_k^2 \right)^{\gamma/2},$$

ahol a C_ε állandó nem függ a $(c_k: k \geq 1)$ sorozattól és a γ kitevőtől, ha $\gamma \geq 2 + \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$.

Az 5.4. Tétel esetében tehát a 4.1. Tételben szereplő szuperadditív $g(b, n)$ függvény szerepet a

$$g(b, n) := C^{2/\gamma} \sum_{k=b+1}^{b+n} c_k^2$$

additív függvény, a $p(\geq 1)$ kitevő szerepét $\gamma(> 2)$, míg az $r(\geq 1)$ kitevő szerepét $\gamma/2(> 1)$ veszi át.

Megjegyezzük, hogy Lennard Carleson svéd matematikus 1966-ban bebizonyította (lásd az Irodalomjegyzék [3] cikkét), hogy tetszőleges négyzetesen integrálható, periodikus függvény Fourier sora m.m. konvergál. Ennek következtében az 5.1. és 5.2. Tételek Carleson tételének speciális eseteivé váltak.

Carleson tételének bizonyítása azonban annyira bonyolult, hogy még napjainkban is komoly teljesítmény annak megértése minden részletében. Viszont az 5.1. Tétel Erdős Pál bizonyításából kifejlődött maximál momentum egyenlőtlenségeknek számos alkalmazása lett és még napjainkban is vannak alkalmazásai mind az ortogonális sorok pontonkénti konvergenciájának vizsgálatában, mind a valószínűségszámításban a nagy számok különféle törvényeinek bizonyításában.

6. Szidon Simon lemmájának bizonyítása

Megjegyezzük, hogy Szidon Simon a 20. század első felében jelentős magyar matematikus volt, aki német nyelven írt tudományos cikkeinek szerzőjeként az S. Sidon nevet használta.

A következőkben az 5.3. Lemmájának bizonyítását a $T_n(x)$ koszinusz polinom esetében fogjuk ismertetni. Mivel

$$\begin{aligned} T_n^2(x) &:= \left(\sum_{k=1}^n c_k \cos m_k x \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n c_k^2 \cos^2 m_k x + \sum_{1 \leq k \neq \ell \leq n} c_k c_\ell \cos m_k x \cos m_\ell x, \end{aligned}$$

ezért az (1.6) és speciálisan a $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ azonosság alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_n^4(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 \cos^2 2m_k x + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \neq \ell \leq n} c_k c_\ell \cos(m_k + m_\ell)x \\ (6.1) \quad &+ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} c_k c_\ell \cos(m_k - m_\ell)x =: \sum_{j=0}^{2m_n} C_j \cos jx, \end{aligned}$$

ahol a C_j együtthatókat az alábbi képletek adják:

$$C_0 := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2, \quad C_j := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \neq \ell \leq n} c_k c_\ell;$$

megjegyezve, hogy a kettős összegezést csak azokra a (k, ℓ) párokra kell kiterjesztenünk, amelyekre $|m_k \pm m_\ell| = j$ és $k \neq \ell$.

Nyilvánvaló, hogy

$$(6.2) \quad C_0^2 = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 + \sum_{1 \leq k \neq \ell \leq n} c_k^2 c_\ell^2 \right).$$

A (B_2) feltétel teljesülése következtében az $|m_k \pm m_\ell| = j$ előállítás csak véges sok esetben állhat fenn, amelyet s -sel fogunk jelölni. Ez az s nem függ sem j -től, sem n -től. Ezért a véges számsorozatokra vonatkozó *Cauchy egyenlőtlenség* alkalmazásával kapjuk, hogy

$$C_j^2 = \frac{1}{4} \left(\sum_{\substack{1 \leq k \neq \ell \leq n \\ |m_k \pm m_\ell| = j}} c_k c_\ell \right)^2 \leq \frac{s}{4} \sum_{1 \leq k \neq \ell \leq n} c_k^2 c_\ell^2,$$

amelyből nyilvánvalóan következik, hogy

$$(6.3) \quad \sum_{j=1}^{2m_n} C_j^2 \leq \frac{s}{4} \sum_{k=1}^n c_k^2 \sum_{\ell=1}^n c_\ell^2 \leq \frac{s}{4} \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^2.$$

A (6.1)–(6.3) egyenlőtlenségekből pedig az következik, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} T_n^4(x) dx &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{2m_n} C_j \cos jx \right)^2 dx \\ &= \pi \left(2C_0^2 + \sum_{j=0}^{2m_n} C_j^2 \right) \leq \frac{\pi}{2} \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^2 + \frac{s\pi}{4} \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} (2+s) \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^2 \leq C \left(\pi \sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^2, \text{ ahol } C := \frac{2+s}{4\pi}. \end{aligned}$$

Ezzel Szidon Simon 5.3. Lemmájában az (5.4) egyenlőtlenség fennállását bebizonyítottuk. ■

A továbbiakban azon 5. fejezetbeli állítás bizonyítását ismertetjük, hogy ha a természetes számokból álló $(m_k : k \geq 1)$ sorozat lakunáris; vagyis, ha az (5.2) egyenlőtlenség valamely $\lambda > 1$ valós számra fennáll, akkor megadható olyan csak a λ -tól függő s természetes szám, hogy bármely n természetes számra az

$$n = m_\ell + m_k \quad \text{vagy} \quad n = m_\ell - m_k, \quad \text{ahol} \quad \ell > k \geq 1;$$

előállítások legfeljebb csak s számú (ℓ, k) pár esetében állhatnak fenn.

Elsőként ezen állításunkat az $n = m_\ell + m_k$, $\ell > k \geq 1$ alakú összegek esetében igazoljuk. (5.2)-ből egyből adódik, hogy

$$\frac{m_\ell}{m_{\ell-1}} \geq \lambda, \quad \text{tehát} \quad m_k \leq m_{\ell-1} \leq \frac{1}{\lambda} m_\ell;$$

majd ebből következik, hogy

$$m_\ell < n = m_\ell + m_k \leq m_\ell + m_{\ell-1} \leq m_\ell \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda+1}{\lambda} m_\ell.$$

Az utóbbi egyenlőtlenségből pedig átszorzással kapjuk, hogy

$$(6.4) \quad \frac{\lambda}{\lambda+1} n \leq m_\ell < n.$$

Az $n = m_\ell - m_k$, $\ell > k \geq 1$ különbségek esetében hasonló módon járunk el. Ugyancsak (5.2)-ből egyből adódik, hogy

$$\frac{m_{\ell-1}}{m_\ell} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \text{tehát} \quad m_{\ell-1} \leq \frac{1}{\lambda} m_\ell;$$

majd ebből következik, hogy

$$m_\ell > n = m_\ell - m_k \geq m_\ell - m_{\ell-1} = m_\ell - \frac{1}{\lambda} m_\ell = \frac{\lambda-1}{\lambda} m_\ell.$$

Az utóbbi egyenlőtlenségből pedig átszorzással kapjuk, hogy

$$(6.5) \quad \frac{\lambda}{\lambda-1} n \geq m_\ell > n.$$

Adott n természetes szám esetén jelöljük ℓ_1 -gyel a legkisebb, ℓ_s -sel pedig a legnagyobb azon ℓ indexet, amely az $n = m_\ell \pm m_k$ előállításokban előfordul, ahol $\ell > k \geq 1$. A fentebb levezetett (6.4) és (6.5) egyenlőtlenségek szerint fennáll, hogy

$$m_{\ell_1} \geq \frac{\lambda}{\lambda+1} n \quad \text{és} \quad m_{\ell_s} \leq \frac{\lambda}{\lambda-1} n,$$

amelyekből egyből következik, hogy

$$(6.6) \quad \frac{m_{\ell_s}}{m_{\ell_1}} \leq \frac{\lambda}{\lambda-1} n / \frac{\lambda}{\lambda+1} n = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}.$$

Másrészt az (5.2) lakunaritási feltételből azt kapjuk, hogy

$$(6.7) \quad \frac{m_{\ell_s}}{m_{\ell_1}} = \frac{m_{\ell_s}}{m_{\ell_{s-1}}} \cdot \frac{m_{\ell_{s-1}}}{m_{\ell_{s-2}}} \cdots \frac{m_{\ell_1+1}}{m_{\ell_1}} \geq \lambda^s.$$

A (6.6) és (6.7) egyenlőtlenségek összevetéséből látjuk, hogy

$$\lambda^s \leq \frac{m_{\ell_s}}{m_{\ell_1}} \leq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1},$$

amely egyenlőtlenség csak véges sok $s = s(\lambda)$ természetes számra állhat fenn, hiszen $\lambda > 1$ miatt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda^s = \infty.$$

Megjegyezzük, hogy Erdős Pál 5.2. Tétele lényegesen általánosabb Kolmogorov 5.1. Tételénél, mivel meg lehet adni természetes számoknak olyan $(m_k: k \geq 1)$ sorozatát, amely teljesíti a (B_2) feltételt és amelyre még az is teljesül, hogy

$$(6.8) \quad \frac{m_k}{k^3} \leq C, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ahol C állandó (lásd az Irodalomjegyzék [2] könyvében a 263. oldalon). Ez az $(m_k: k \geq 1)$ sorozat nem lehet lakunáris, mivel annak feltételezése ellentmondásra vezet. Valóban, ha a lakunaritás (5.2) feltételének fennállását valamely $\lambda > 1$ valós számmal feltételezzük, akkor fennáll, hogy

$$m_{k+1} \geq \lambda m_k \geq \lambda^2 m_{k-1} \geq \cdots \geq \lambda^k m_1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ezt (6.8)-cal összevetve azt kapjuk, hogy

$$1 = \frac{m_{k+1}}{m_{k+1}} \geq \frac{\lambda^k m_1}{C(k+1)^3}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

ami ellentmond annak, hogy $\lambda > 1$ következtében

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)^3} = \infty.$$

Irodalomjegyzék

- [1] G. Alexits, *Convergence Problems of Orthogonal Series*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.
- [2] N.K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series*, Vol. II, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [3] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., 116(1966), 135–157.
- [4] P. Erdős, *On the convergence of trigonometric series*, J. Math. Phys. (Massachusetts Institute of Technology), 22(1943), 37–39.
- [5] V.F. Gaposkhin, *Lacunary series and independent functions* (orosz nyelvű cikk), Uspekhi Mat. Nauk, 5(1966), 1–82.
- [6] A.N. Kolmogorov, *Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier*, Fund. Math., 5(1921), 96–97.
- [7] F. Móricz, *Moment inequalities and the strong laws of large numbers*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 35(1976), 299–314.
- [8] P. Révész, *The Laws of Large Numbers*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.
- [9] R.J. Serfling, *Moment inequalities for the maximum cumulative sum*, Ann. Math. Statist., 41(1970), 1227–1234.
- [10] S. Sidon, *Ein Satz über Fouriersche Reihen mit Lücken*, Math. Zeitschrift, 163(1930), 251–252.
- [11] Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függvénysorok*, Polygon, Szeged, 2002.
- [12] K. Tandori, *Quelques évaluations sur les fonctions orthogonales*, C. R. Acad. Sci. Paris, 244(1957), 836–838.

Móricz Ferenc, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.,
moricz@math.u-szeged.hu