

Valós függvények előállítása kompozícióként

DANKA TIVADAR, KUNOS ÁDÁM

1. Bevezetés

Függvények összetételével – más néven kompozíciójával – matematikai tanulmányaik során hamar megismerkednek a tanulók. Amikor általános- és középiskolában „bonyolult” függvényeket ábrázolnak függvénytranszformációkkal, valójában egyszerűbbek kompozíciójára bontják azokat. Olyanokra, melyeket már ismernek és értenek, ezáltal lépésenként megérthetik, ábrázolhatják a bonyolultabb függvényeket. Megfordítva ezt a gondolatot, a kompozíció lehetőséget ad, hogy függvényekből, mint építőkockákból, új függvényeket készítsünk. Ezzel kapcsolatban számos egyszerűen megfogalmazható, elemi kérdés tehető fel. Jelen dolgozat szerzői egyetemi hallgatók, akik egyik tankönyvükben [5] találtak néhány ilyet. Ezek a feladatok hamar a szerzők szívébe lopták magukat. Egymástól függetlenül gondolkodtak a problémákon és így több, teljesen különböző megoldást találtak. Jelen dolgozat ezeknek a megoldásoknak, ötleteknek a rendszerezett gyűjteménye. Az említett könyvben többnyire eldöntendő kérdés formájában vannak megfogalmazva a feladatok és megoldásként nagyrészt csak az állítások igazságtartalma szerepel, valamint hivatkozás régi idegennyelvű cikkekre és egy könyvre [4], [7], [6]. A szerzők nem olvasták ezeket a munkákat. Céljuk ebben a dolgozatban nem az, hogy egy matematikai elméletről átfogóan írjanak, nem is az, hogy a közölt problémáknak a lehető legrövidebb, legelegánsabb megoldását adják. Egyszerűen az, hogy bemutassák, hogy két érdeklődő egyetemi hallgató – egymással versengve – hogyan gondolkodott, milyen ötletekkel állt elő, milyen kérdéseket tett fel néhány tankönyvükben talált érdekes problémával kapcsolatban.

A feladatok és megoldások többnyire érdeklődő középiskolások számára is érthetőek. A következő szekcióban – főleg miattuk – összegyűjtjük azokat az alapvető fogalmakat, jelöléseket és állításokat, amiket a dolgozatban sűrűn használunk.

2. Jelölések, alapvető ismeretek

Azok az olvasók, akik ismerik a függvénytan és halmazelmélet alapvető jelöléseit és eredményeit, átugorhatják ennek a fejezetnek az elejét, mert itt csak ilyeneket elevenítünk fel. A 2.1. Jelöléstől azonban saját jelöléseket vezetünk be, ezeknek az elolvasása szükséges a dolgozat további részének megértéséhez.

A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza alatt az $\{1, 2, \dots\}$ számhamaszt értjük, a $\{0, 1, 2, \dots\}$ halmazt $\mathbb{N}_0$ -val jelöljük. A valós számok halmazát $\mathbb{R}$ -rel, az $a < b$ végpontokkal rendelkező nyílt intervallumot (a, b) -vel jelöljük. Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket *valós függvényeknek* nevezzük.

Tetszőleges H nemüres halmazon az *identitásfüggvényt* id_H -val jelöljük, azaz

$$\forall x \in H : \text{id}_H(x) = x.$$

Legyenek A és B nemüres halmazok, $C \subseteq A$ nemüres és f egy $A \rightarrow B$ függvény. Ekkor f *megszorítását a C halmazra* a szokásos $f|_C$ módon jelöljük, azaz $f|_C$ egy $C \rightarrow B$ függvény és minden $x \in C$ esetén $f|_C(x) = f(x)$. Egy $f : A \rightarrow B$ függvényt *injektívnek* nevezzük, ha különböző A -beli elemekhez különböző B belüli elemeket rendel, azaz

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Akkor mondjuk, hogy f *szürjektív*, ha B minden elemét megkaphatjuk úgy, hogy A valamely elemére alkalmazzuk f -et, azaz

$$\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b.$$

Akkor nevezzük f -et *bijektívnek*, ha szürjektív és injektív is. A bijektív függvényeket *bijekcióknak* nevezzük. Egy $f : A \rightarrow B$ bijekció tulajdonképpen párba állítja az A és B halmazok elemeit. Könnyű meggondolni, hogy ha f bijektív, akkor létezik (szintén bijektív) inverze, melyet f^{-1} -el jelölünk.

Az A és B halmazokat akkor nevezzük *azonos számosságúnak*, ha létezik $A \rightarrow B$ bijekció. Az A halmaz számosságát $|A|$ -val jelöljük. A természetes számok halmazával azonos számosságú halmazokat *megszámálhatóan végtelen* számosságúaknak nevezzük. Ezt a számosságot $\aleph_0$ -al jelöljük. Megmutatható, hogy az egész, sőt a racionális számok halmaza is megszámlálhatóan végtelen számosságú. Ha egy halmaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú, akkor őt *megszámálható-nak* mondjuk. Bizonyítható, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható. A valós számok halmazával azonos számosságú halmazokat *kontinuum számosságúaknak* nevezzük. A valós számok halmazának olyan részhalmazai, melyek tartalmazznak nyílt intervallumot, kontinuum számosságúak. Ez tulajdonképpen azt

jelenti, hogy a valós számok halmazának két olyan részhalmaza, melyek tartalmazzanak nyílt intervallumot, bijektív módon egymásra képezhetőek. Ezt a tényt sokszor fogjuk használni a dolgozat során. A matematikának az imént bevezetett fogalmakkal foglalkozó ágát halmazelméletnek nevezik, ebbe jó bevezetést nyújtanak az [1], [2] könyvek.

Néhány szót kell ejtenünk az n -dimenziós valós vektorokról, azaz $\mathbb{R}^n$ -ről. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz az olyan szám- n -esek halmaza, amelyek mindegyik komponense valós szám. Fontos és meglepő halmazelméleti tény, hogy $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^n$ között létezik bijekció, azaz azonos számosságúak. Hasonlóan definiálhatjuk az $\mathbb{R}^\infty$ halmazt, ami nem más, mint a valós számokból álló végtelen számsorozatok halmaza. $\mathbb{R}^\infty$ és $\mathbb{R}$ között is létezik bijekció, azaz a végtelen valós számsorozatok és a valós számok kölcsönösen egyértelműen párba állíthatóak.

A függvényösszetételt $\circ$ -el jelöljük a megszokott módon, ha tehát f egy $A \rightarrow B$, g egy $B \rightarrow C$ függvény, akkor $g \circ f$ egy $A \rightarrow C$ függvény és

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Legyen minden pozitív egész k esetén

$$f^{(k)} := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ db}},$$

amit az f k -adik iteráltjának nevezünk.

2.1. Jelölés. A $\rightsquigarrow$ jelölést bijekciókra fogjuk használni a következő módon. Ha f egy még nem definiált függvény, A és B adott, azonos számosságú halmazok, akkor $f := A \rightsquigarrow B$ azt jelenti, hogy „legyen f egy tetszőleges $A \rightarrow B$ bijekció”. Ha f egy már korábban definiált függvény, akkor $f = A \rightsquigarrow B$ alatt azt értjük, hogy „ f bijektíven képezi A -t B -re”.

2.2. Jelölés. Legyenek $f_1, f_2, \dots, f_n$ valós függvények. Ekkor legyen

$$[f_1, \dots, f_n] = \{f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k} : i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N}\}$$

az $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvényekből (véges sok) kompozícióval előállítható függvények halmaza.

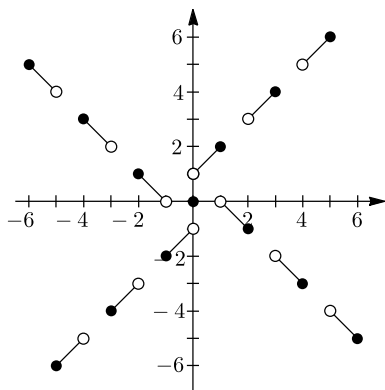
3. Feladatok és megoldásaik

Azt javasoljuk olvasóinknak, hogy gondolkozzanak a feladatokon, mielőtt a megoldások tanulmányozásába kezdenek. Egy-egy megoldás egészen más megvilágítást nyerhet, ha már magunk is törtük a fejünket a problémán.

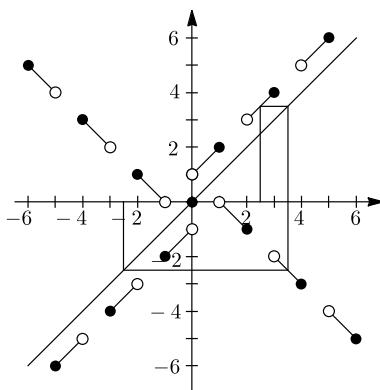
Mint a bevezetésben már említettük, a szerzők a feladatokat az [5] könyvből vették, de később tudomásukra jutott, hogy az 1. feladat korábban szerepelt a KöMaL-ban is [3].

1. Feladat. Létezik-e olyan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény, hogy $(g \circ g)(x) = -x$?

Megoldás (Danka Tivadar). A feladat megoldása könnyebb, ha nem kötjük ki, hogy valós függvényt keresünk (és ismerjük a komplex számokat): nyilvánvaló, hogy $g(x) = ix$ választással $(g \circ g)(x) = -x$. Keressünk most a valós függvények között! A megoldást megkaphatjuk úgy is, hogy lerajzoljuk a függvény grafikonját, például az 1. ábrán látható módon.



1. ábra



2. ábra

Egészen pontosan az alábbi függvényről van szó:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ x + 1, & \text{ha } 2k < x \leq 2k + 1, k \in \mathbb{N}_0, \\ -x + 1, & \text{ha } 2k + 1 < x \leq 2k + 2, k \in \mathbb{N}_0 \\ x - 1, & \text{ha } -2k - 1 \leq x < -2k, k \in \mathbb{N}_0 \\ -x - 1, & \text{ha } -2k - 2 \leq x < -2k - 1, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

A megoldó úgy talált erre a konstrukcióra, hogy eszébe jutott egy régi számítógépes játék, amivel gyerekkorában játszott. A játékban egy lézersugarat kellett tükrök segítségével célba juttatni. Aki látott már függvényiterációt pókháló-diagramon, az a

grafikonon láthatja, hogy az x pontból felfelé induló lézersugár a négy „tükröződés” után pontosan a $-x$ pontba jut el (2. ábra). Ez a megoldás azonban nem fed fel számunkra, hogy valójában mi teszi lehetővé egy ilyen tulajdonságú függvény létezését. Ehhez meg kell vizsgálnunk a $-x$ függvény pályáit.

3.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. Ekkor az $\{f^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot az f függvény x -et tartalmazó pályájának nevezzük, ahol $f^{(0)}(x) = x$.

Egy pálya megszámlálható sok elemet tartalmaz. Ha egy pálya véges, akkor arra egy véges sorozatként fogunk gondolni. Például, ha azt írjuk, hogy f x_1 -et tartalmazó pályája $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, akkor ez azt jelenti, hogy $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \dots, f(x_{n-1}) = x_n$, valamint $f(x_n) = x_i$ valamely $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén, és $x_1, x_2, \dots, x_n$ páronként különbözőek.

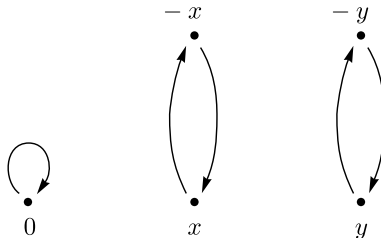
Könnyű látni, hogy f pályái minden információt tartalmaznak f -ről. Ezt az információt azonban nem csak sorozatok formájában tárolhatjuk.

3.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. A G irányított gráf az f *pálya-gráfja*, ha a csúcshalmaza megegyezik a valós számok halmazával és x -ből pontosan akkor mutat y -ba él, ha $f(x) = y$.

Egy függvényre tehát nem csak hozzárendelésként, hanem egy irányított gráfként is tekinthetünk. Valós függvényre ritkán szoktunk így gondolni, de ha az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy bijekciójára (azaz egy permutációra) gondolunk, akkor általában egy ilyen irányított gráf jut az eszünkbe. A pálya-gráf két lényeges tulajdonsága:

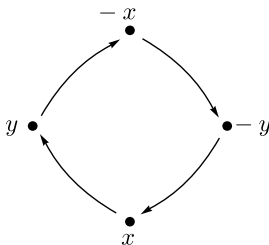
- A gráf minden x csúcsából pontosan egy él indul ki, de akárhány él befuthat.
- Egy függvény pálya-gráfja teljesen meghatározza a függvényt, azaz a függvények és a pálya-gráfok kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak.

Vizsgáljuk most meg a $-x$ függvény pályáit! Azt látjuk, hogy egyetlen egyelemű pálya van (mégpedig a nullát tartalmazó), a többi pedig két elemet tartalmaz: x -et és $-x$ -et (3. ábra).



3. ábra. A $-x$ függvény pályáinak szerkezete.

Mivel $-x$ -nek kontinuum-sok kételemű pályája van, ezért a kételemű pályák halmazát szét tudjuk bontani két megegyező számosságú halmazra. Így párba állíthatjuk a kételemű pályákat. Ragasszuk most össze a párokat! Azaz az $\langle x, -x \rangle$, $\langle y, -y \rangle$ pályapárokból képezzük a $\langle x, y, -x, -y \rangle$ pályát (4. ábra).



4. ábra. Az összeragasztott pályák.

Könnyen látható, hogy az így kapott pályák által megadott függvény olyan, amelyet kerestünk: a második iteráltja a $-x$ függvény. Ezzel megoldottuk a feladatot. Érdeemes észrevenni, hogy míg az első megoldás teljesen konkrétan a kezünkbe ad egy ilyen függvényt, a második egy eljárást ad, hogy miképpen lehet egy ilyen előállítani. ■

Megjegyzés. Habár a megoldásból kiderül, hogy sok megfelelő függvény van az 1. feladatra, ezek között nincs folytonos. Könnyen meggondolható, hogy a feladatbeli tulajdonsággal bíró g függvény invertálható, de nem lehet szigorúan monoton. Ez kizárja a folytonosságot, mert egy folytonos és invertálható függvény szükségképpen szigorúan monoton.

A következő természetesen felmerülő kérdés az, hogy ha a $-x$ függvény előállítható $g \circ g$ alakban alkalmasan választott g -re, akkor minden f valós függvénnyel megtehető-e ugyanez?

2. Feladat. Minden $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény előállítható $f = g \circ g$ alakban valamely alkalmas $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel?

Megoldás. (Danka Tivadar) Ha ismét pályákat képzelünk el grafikonok helyett, hamar láthatjuk a választ. Legyen f olyan függvény, melynek pontosan egy darab kételemű pályája van, a többi pedig egyelemű. Pontosabban, létezik két különböző x és y úgy, hogy $f(x) = y$ valamint $f(y) = x$ és az összes többi valós számhoz önmagát rendeli f . Belátjuk, hogy ez az f függvény nem áll elő második iteráltként. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik olyan g függvény, melyre igaz, hogy $f = g \circ g$. Milyen lehet

ekkor g x -et tartalmazó pályája? Könnyen látható, hogy csak $\langle x, a, y, b \rangle$ alakú lehet valamely két különböző a, b valós számra. Ekkor azonban $a = f(a) = (g \circ g)(a) = b$, így ellentmondásra jutottunk. ■

A bevezetésben azzal a hasonlattal éltünk, hogy a kompozíció segítségével új függvényeket készíthetünk, mint ahogy építőkockákból újabb és újabb építményeket. Természetesen felmerül a kérdés, hogy egy adott építmény elkészítéséhez legalább hányféle építőelem szükséges. Egy ilyen jellegű problémát fogunk vizsgálni a következőekben. Megjegyezzük azonban, hogy építőkockás hasonlatunk annyiban „sántít”, hogy az építőkockák jellemzően egyszerűek. Mi építőkockáink számát szeretnénk minimalizálni, és ehhez igen bonyolult építőkockákra lesz szükségünk. A probléma precíz megfogalmazása a következő:

Legyenek $f_0, \dots, f_n$ adott valós függvények. Keressük azt az minimális k nemnegatív egészt, melyre léteznek $g_0, g_1, \dots, g_k$ valós függvények, melyekre minden $i = 0, \dots, n$ esetén $f_i \in [g_0, g_1, \dots, g_k]$, azaz

$$[f_0, \dots, f_n] \subseteq [g_0, \dots, g_k].$$

A dolgozat hátralévő részében ennek a k -nak a meghatározásával foglalkozunk.

3. Feladat. *Legyenek $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ adott valós függvények. Igazoljuk, hogy léteznek olyan g_0, g_1, g_2 valós függvények, hogy bármely $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén $f_i \in [g_0, g_1, g_2]$.*

1. Megoldás. *(Danka Tivadar)* Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_0, g_1, g_2 valós függvények! $n + 1$ darab függvényről sokkal könnyebb az információt $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben tárolni, mint $\mathbb{R}$ -ben. Defináljuk az alábbi függvényeket:

- $g_0^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $x \mapsto (f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x))$
- $g_1^* : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$
- $g_2^* : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto x_0$

Szemléletesen a g_0^* függvény az $n + 1$ dimenziós térbe helyezi a függvényeket. A g_1^* függvény az $n + 1$ koordináta közül az elsőt kitörli, a többi eltolja balra, s az utolsó helyre nullát ír. A g_2^* függvény pedig az $n + 1$ dimenziós térben vett első koordinátára való vetítés. Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_2^* \circ \underbrace{g_1^* \circ \dots \circ g_1^*}_{i \text{ db}} \circ g_0^*, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük. Legyen g egy $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ bijekció. Defináljuk a keresett függvényeket:

- $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_0 := g \circ g_0^*$
- $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_1 := g \circ g_1^* \circ g^{-1}$
- $g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_2 := g_2^* \circ g^{-1}$

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén

$$\begin{aligned}
 g_2 \circ \underbrace{g_1 \circ \dots \circ g_1}_{i \text{ db}} \circ g_0 &= (g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^* \circ g^{-1}) \circ \dots \circ (g \circ g_1^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_0^*) \\
 &= g_2^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}} \circ g_1^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}} \circ \dots \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}} \circ g_0^* \\
 &= g_2^* \circ \underbrace{g_1^* \circ \dots \circ g_1^*}_{i \text{ db}} \circ g_0^* = f_i.
 \end{aligned}$$

■

2. Megoldás. (Kunos Ádám) Legyen r az a pozitív egész, melyre $2^{r-1} \leq n < 2^r$, azaz n kettes számrendszerben r jegyű. Legyen $g_2 := \mathbb{R} \rightsquigarrow (1, 2)$ (lásd 2.1. Jelölés), továbbá definiáljuk az I_i^j ($i, j \in \{0, 1, \dots\}$) nyílt intervallumokat

$$I_i^j := (2^i + j, 2^i + j + 1)$$

módon. Legyen továbbá

$$\begin{aligned}
 g_0^* &:= \begin{cases} I_i^j \rightsquigarrow I_{i+1}^{2j} & (0 \leq i < r, 0 \leq j < 2^i), \\ \text{a függvényérték } 0 & \text{a megadott intervallumokon kívül,} \end{cases} \\
 g_1^* &:= \begin{cases} I_i^j \rightsquigarrow I_{i+1}^{2j+1} & (0 \leq i < r, 0 \leq j < 2^i), \\ \text{a függvényérték } 0 & \text{a megadott intervallumokon kívül.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Legyen $0 \leq k \leq n$, kettes számrendszerben $k = (a_1 a_2 \dots a_r)_2$, ahol k kettes számrendszerbeli hosszától függően lehetnek 0-k a szám elején. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$g_{a_r}^* \circ g_{a_{r-1}}^* \circ \dots \circ g_{a_1}^* \circ g_2 = \mathbb{R} \rightsquigarrow (2^r + k, 2^r + k + 1).$$

Jelölje ennek a függvénynek az inverzét h_k , azaz legyen

$$h_k := (g_{a_r}^* \circ g_{a_{r-1}}^* \circ \dots \circ g_{a_1}^* \circ g_2)^{-1},$$

amely világos, hogy egy $(2^r + k, 2^r + k + 1) \rightsquigarrow \mathbb{R}$ függvény, sőt

$$h_k \circ g_{a_r}^* \circ g_{a_{r-1}}^* \circ \dots \circ g_{a_1}^* \circ g_2 = \text{id}_{\mathbb{R}}$$

is teljesül. Vegyük észre, hogy a g_0^* függvényt a $(2^r, 2^{r+1})$ intervallumon azonosan 0-nak definiáltuk. Módosítsuk a g_0^* függvényt a következőképpen, legyen minden $0 \leq k \leq n$ esetén $g_0|_{I_r^k} = f_k \circ h_k$, továbbá

$$H := \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i=0}^n I_r^i \right), \quad g_0|_H = g_0^*|_H.$$

Legyen továbbá $g_1 := g_1^*$. Ekkor

$$g_0 \circ g_{a_r} \circ g_{a_{r-1}} \circ \dots \circ g_{a_1} \circ g_2 = f_k.$$

Készen vagyunk. ■

4. Feladat. *Megoldható-e a 3. feladat, ha véges sok helyett megszámlálhatóan végtelen sok $f_0, f_1, f_2, \dots$ függvényt kell előállítanunk?*

1. Megoldás. *(Danka Tivadar)* Figyeljük meg, hogy a 3. feladat 1. megoldása könnyen átalakítható ennek a feladatnak a megoldásává $\mathbb{R}^\infty$ használatával. A részletek kidolgozását az olvasóra bízuk. ■

2. Megoldás. *(Kunos Ádám)* Legyenek

$$I_i = (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}, \quad (i \in \{0, 1, 2, \dots\})$$

tetszőleges páronként diszjunkt nyílt intervallumok. Legyen $g_0 := \mathbb{R} \rightsquigarrow I_0$, továbbá legyen

$$g_1 := \begin{cases} I_i \rightsquigarrow I_{i+1} & i \in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ \text{a függvényérték 0 a megadott intervallumokon kívül.} \end{cases}$$

Világos, hogy

$$g_1^{(i)} \circ g_0 = \underbrace{g_1 \circ \dots \circ g_1}_{i\text{-szer}} \circ g_0 = \mathbb{R} \rightsquigarrow I_i.$$

Jelölje ennek a függvénynek az inverzét h_i , azaz legyen $h_i := (g_1^{(i)} \circ g_0)^{-1}$. Defináljuk g_2 -t a következőképpen. Legyen minden nemnegatív egész i -re $g_2|_{I_i} = f_i \circ h_i$, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=0}^\infty I_i$ esetén pedig $g_2(x) = 0$. Könnyen végiggondolható, hogy ekkor

$$g_2 \circ g_1^{(i)} \circ g_0 = f_i. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a most látott konstrukció nagyon apró módosítással használható a 3. feladat megoldására is, azonban jóval egyszerűbb, mint ott a 2. megoldásban ismertetett konstrukció. A felhasznált kompozíciók számának tekintetében azonban a 3. feladatnál lévő konstrukció erősebb, hiszen míg ez a konstrukció az n függvényes problémát $\approx n$ kompozícióval oldja meg, a korábbi $\approx \log_2 n$ -nel.

Most a természetes kérdés az, hogy a generáló függvények száma csökkenthető-e feladatainkban. Ez a probléma már nehezebbnek bizonyult a szerzők számára. Ennek megfelelően a közölt megoldások is bonyolultabbak.

5. Feladat. Legyenek $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, \dots\}$ adott valós függvények. Igazoljuk, hogy léteznek olyan g_0, g_1 valós függvények, hogy bármely $i \in \{0, 1, \dots\}$ esetén $f_i \in [g_0, g_1]!$

1. Megoldás. (Kunos Ádám) Legyen minden k egészre

$$h_k : (4k, 4k + 4] \rightarrow (4k, 4k + 2], \quad 4k + x \mapsto 4k + x/2 \quad (x \in (0, 4]),$$

és definiáljuk g_0 -t

$$g_0|_{(4k, 4k+4]} := h_k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

módon. Ekkor $g_0 \circ g_0$ egy

$$\mathbb{R} \rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (4k, 4k + 1] =: H$$

bijekció. Legyen α egy $H \rightarrow (2, 4]$ bijekció és legyen

$$I := \bigcup_{k=1}^{\infty} (4k - 2, 4k].$$

Ekkor egyrészt $(2, 4] \subset I$, másrészt $I \cap H = \emptyset$. Legyen

$$\beta : I \rightarrow I, \quad x \mapsto x + 4.$$

Definiáljuk g_1^* -ot:

$$g_1^*|_H := \alpha, \quad g_1^*|_I := \beta, \quad g_1^*|_{\mathbb{R} \setminus (I \cup H)}(x) := 0 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus (I \cup H)).$$

Ekkor $g_1^* \circ g_0 \circ g_0$ egy $\mathbb{R} \rightarrow (2, 4]$ bijekció, amiből

$$(g_1^*)^{(i)} \circ g_0^{(2)} = \underbrace{g_1^* \circ \dots \circ g_1^*}_{i\text{-szer}} \circ g_0 \circ g_0 = \mathbb{R} \rightsquigarrow (4i - 2, 4i] \quad (i \in \{1, 2, \dots\}),$$

vagyis

$$g_0 \circ (g_1^*)^{(i)} \circ g_0^{(2)} = \mathbb{R} \rightsquigarrow (4i - 3, 4i - 2].$$

Jelölje ennek a függvénynek az inverzét e_{i-1} , azaz legyen

$$e_{i-1} := (g_0 \circ (g_1^*)^{(i)} \circ g_0^{(2)})^{-1}.$$

Legyen

$$J := \bigcup_{i=1}^{\infty} (4i - 3, 4i - 2] = \bigcup_{i=0}^{\infty} (4i + 1, 4i + 2].$$

Fontos észrevennünk, hogy $J \cap (H \cup I) = \emptyset$. Defináljuk g_1 -t a következő módon:

$$g_1|_{(4i+1, 4i+2]} := f_i \circ e_i \quad (i \in \{0, 1, \dots\}), \quad g_1|_{\mathbb{R} \setminus J} := g_1^*|_{\mathbb{R} \setminus J}.$$

Végül figyeljük meg, hogy az eddigiekből

$$(1) \quad g_1 \circ g_0 \circ \underbrace{g_1 \circ \dots \circ g_1}_{i+1\text{-szer}} \circ g_0 \circ g_0 = f_i.$$

■

A következő megoldás a szerzők közös munkájának eredménye.

2. Megoldás. Próbáljuk ezt a feladatot is gráfos szemlélettel megoldani a következő módon. Gondoljunk úgy a két megkonstruálandó függvényre, mint egy $0, 1$ címkékkel élcímkezett irányított gráfra, aminek csúcshalmaza a valós számok halmaza.

3.3. Definíció. Az olyan G irányított gráfokat, melyek csúcseinak halmaza $\mathbb{R}$, éleik $\{0, 1\}$ címkézettek és minden csúcsuból legfeljebb egy 0 és legfeljebb egy 1 címkéjű él indul ki, *valós gráfoknak* nevezzük. A G gráf éleinek halmazát $E(G)$ -vel jelöljük.

3.4. Definíció. Egy G valós gráfban *üres csúcsoknak* nevezzük azokat a csúcsokat, melyekből nem indul ki él. Azon csúcsok halmazát, melyekből indul ki él $C(G)$ -vel jelöljük.

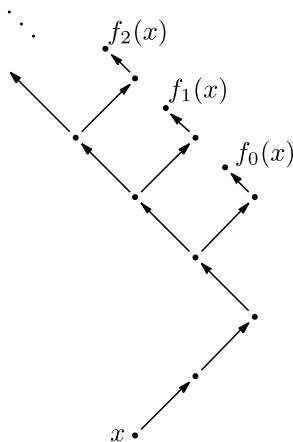
Minden f_i függvényhez legyen adott egy $k(f_i)$ véges $0, 1$ kód, azaz egy $0, 1$ elemekből álló véges jelsorozat. Olyan G valós gráfot keresünk, melyre igaz, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ csúcsuból indulva a $k(f_i)$ kódnak megfelelő címkéjű élek mentén lépkedve éppen az $f_i(x)$ függvényértékhez jutunk. Ha találunk egy olyan k kódolást, melyhez a most leírt módon tudunk találni egy G valós gráfot, akkor készen vagyunk.

3.5. Definíció. Legyen adott egy G valós gráf és egy $k(f_i)$ $0, 1$ kódolás. A valós számok egy $H \subseteq \mathbb{R}$ részhalmazára azt mondjuk, hogy a k kódolásra nézve megfelelő G -ben, ha minden $x \in H$ valós számra x -ből a $k(f_i)$ kódznak megfelelő élsorozaton végig lépkedve a gráfban $f_i(x)$ -hez jutunk minden i nemnegatív egész esetén.

Ötletünk az, hogy próbáljuk felépíteni gráfunkat lépésenként. Kódolásunkat ügyesen kell megválasztanunk, nem minden kódolás vezet célhoz. Tegyük fel például, hogy a 0 az első szám, amiből kiindulva behúztunk bizonyos éleket, $k(f_0) = 1010$ és

$$0 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{0} 4 = f_0(0).$$

Ezeknek az éleknek a behúzásánál azonban nem vettük figyelembe, hogy esetleg $k(f_{42}) = 10$ és $f_{42}(2) = \pi$, ami azt eredményezi, hogy a megkezdett gráfunkat nem lehet megfelelően befejezni, hiszen a 2 -ből az $1, 0$ címkéjű éleket már korábban behúztuk, és azok nem π -be vezetnek. Olyan kódolást kell tehát terveznünk, ami ilyen jellegű problémákat nem eredményez. Tekintsük az 5. ábrán látható konstrukciót.



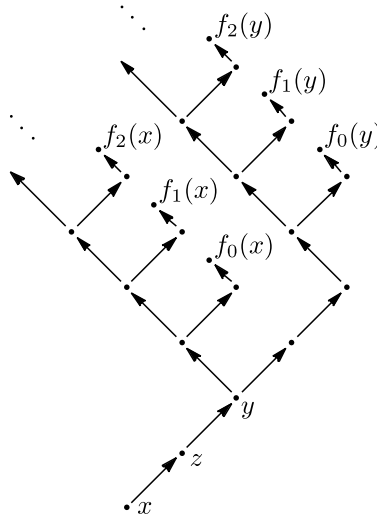
5. ábra

A jobbra mutató nyilak jelölik a 0 -val címkézett éleket, míg a balra mutató nyilak az 1 -gyel címkézett éleknek felelnek meg. Tehát kódolásunk – melyet mostantól jelöljön K – kódszavai

$$(2) \quad K(f_i) := 00 \underbrace{1 \dots 1}_{i+1 \text{ db}} 01.$$

Az 5. ábrán látható konstrukciót mostantól *létrának*, x -et (a kiindulási pontot) a létra *gyökerének*, a gyökértől (ezesetben x -től) különböző olyan pontokat a létrában, melyekből indul ki él *belső pontoknak* fogjuk nevezni. Gondoljuk most át,

hogyan lehet konstrukciókkal a gráf építése. Egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ pontból kiindulva építsük fel a létrát, úgy, hogy a belső pontok mind egymástól különbözőek legyenek. Ezt természetesen megtehetjük. Figyeljük meg, hogy most tetszőleges x -től különböző valós számra igaz, hogy belőle legfeljebb 1 hosszú jobbra út indul ki. Tehát bármely x -től különböző y csúcsból is akarjuk felépíteni a konstrukciónkat, két 0-éllel (jobbra nyíllal) már egy általunk választható, üres valós számhoz juthatunk, melyből a belső pontokat továbbra is egymástól különböző üres valós számoknak választva felépíthetjük a konstrukciónkat, és így már olyan gráfot kapunk, melyben két megfelelő csúcs lesz. Vegyük azonban észre, hogy most már nem igaz előbbi megfigyelésünk: nem igaz, hogy tetszőleges x és y -től különböző valós számból legfeljebb egy él indul ki jobbra. Ellenpéldának legyen y a 6. ábrán látható módon választva és legyen a harmadik csúcs, melyből fel szeretnénk létránkat építeni z .



6. ábra

Ennek ellenére z -ből kiindulva ebben az ellenpéldában is fel tudjuk építeni a létrát, hiszen két 0 címkézett él után a következő 1 címkézett éllel már egy általunk választott üres csúcshoz juthatunk. Ilyen módon lehetővé válik konstrukciónk „végtelen folytatása”. Ennek a „végtelen folytatásnak” a precízzé tétele komolyabb halmazelméleti eszközöket igényel.

3.6. Jelölés. Jelölje G és G' valós gráfok esetén $G \leq G'$ azt, hogy $E(G) \subseteq E(G')$. (Ezt természetesen úgy érjük, hogy az élek tartalmazzák a címkéjüket is, azaz G -ben az élek címkéi ugyanazok, mint G' -ben.)

Világos, hogy a most bevezetett reláció részbenrendezés a valós gráfok halmazán. Könnyen meggondolható, hogy a következő definíció jó.

3.7. Definíció. Legyen $\mathcal{G}$ valós gráfoknak egy olyan halmaza, melyet a $\leq$ reláció teljesen (azaz lineárisan) rendez. Ekkor $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ jelölje azt a valós gráfot, melyre

$$E\left(\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G\right) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} E(G).$$

Legyen α_0 egy olyan rögzített limeszrendszám, melyre a valós számok megcímkézhetők $\mathbb{R} = \{r_\beta : \beta < \alpha_0\}$ módon. Mivel α_0 limeszrendszám, tetszőleges $\beta < \alpha_0$ esetén $\beta + \omega \leq \alpha_0$ teljesül, ahol ω a természetes számok rendszámát jelöli. Legyen $\beta \leq \alpha_0$ rendszámok esetén

$$H_\beta := \{r_\gamma : \gamma < \beta\}.$$

Tehát $H_{\alpha_0} = \mathbb{R}$. Transzfinit rekurzióval szeretnénk elkészíteni a $\{G_\beta\}_{\beta \leq \alpha_0}$ valós gráfokat a fenti konstrukción szerint, úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

1. G_β -ban H_β megfelelő a K kódolás szerint.
2. $\{x \in \mathbb{R} : G_\beta\text{-ban } x \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \text{ módon léteznek élek}\} = H_\beta$.
3. $\{x : \bullet \xrightarrow{0} x \text{ módon létezik él } G_\beta\text{-ban}\} \subseteq C(G_\beta)$.
4. G_β -ban $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \xrightarrow{0} z \text{ és } y \xrightarrow{0} z) \Rightarrow x = y$.
5. Ha $\beta < \alpha_0$, akkor $C(G_\beta) \subset H_{\beta+\omega}$, továbbá $|H_{\beta+\omega} \setminus C(G_\beta)| = \aleph_0$.

Ha sikerül egy ezeknek a feltételeknek eleget tevő $\{G_\beta\}_{\beta \leq \alpha_0}$ gráfalmazt konstruálnunk, akkor készen vagyunk, hiszen a G_{α_0} gráfban $\mathbb{R}$ megfelelő halmaz. A transzfinit rekurziót természetesen az üres valós gráffal (melynek nincs éle) indítjuk. Tegyük fel, hogy valamely $\beta \leq \alpha_0$ rendszámra már megkonstruáltuk a $\{G_\gamma\}_{\gamma < \beta}$ gráfokat.

Ha β limeszrendszám, akkor azt állítjuk, hogy

$$(3) \quad G_\beta := \bigcup_{\gamma < \beta} G_\gamma$$

megfelel az 1–5. tulajdonságoknak. Az 1. tulajdonság abból következik, hogy tetszőleges $\gamma < \beta$ rendszámra $\gamma + 1 < \beta$ is teljesül (mivel β limeszrendszám), azaz $G_{\gamma+1}$ szerepel a (3) unióban, ebben pedig r_γ megfelelő. A 2. tulajdonság bizonyításához figyeljük meg, hogy ha G_β -ban valamely $x \in \mathbb{R}$ -re

$$(4) \quad x \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{1} \bullet,$$

akkor ezen élsorozat éleihez léteznek

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 < \beta$$

rendszámok úgy, hogy a (4) élek szerepelnek a G_{γ_1} , G_{γ_2} és G_{γ_3} gráfokban. Ebből adódóan mindhárom él szerepel a $G_{\max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}}$ gráfban, mely benne van a (3) unióban. Készen vagyunk a 2. tulajdonság bizonyításával is. A 3. és 4. tulajdonság bizonyítása a most látotthoz hasonlóan mehet, ezeket az olvasóra bízjuk. Az 5. tulajdonság bizonyításához figyeljük meg, hogy jelen esetben még $C(G_\beta) \subseteq H_\beta$ is teljesül. Ez abból könnyen látható, hogy a $\{G_\gamma\}_{\gamma < \beta}$ gráfok teljesítik az 5. tulajdonságot.

Tegyük most fel, hogy β rákövetkező rendszám, $\beta = \gamma + 1$. Mivel a G_γ teljesíti a 2. tulajdonságot, így G_γ -ban r_γ -ból

$$(5) \quad r_\gamma \xrightarrow{0} x_1 \xrightarrow{0} x_2 \xrightarrow{1} x_3$$

lépésekkel már biztosan egy általunk választott üres csúcshoz juthatunk. Ez lehetővé teszi, hogy r_γ -ból a következőképpen felépítsük létránkat, melyet mostantól jelöljön L_γ . r_γ -ból nem biztos, hogy indul 0-él G_γ -ban. Ha nem indul, akkor az (5)-beli x_1 -et és az összes utána következő belső pontját a létrának $H_{\gamma+\omega} \setminus (C(G_\gamma) \cup \{r_\gamma\})$ -beli egymástól különböző pontoknak választjuk úgy, hogy

$$|H_{\beta+\omega} \setminus C(G_\beta)| = \aleph_0$$

teljesüljön. Ezt megtehetjük, hiszen G_γ teljesíti az 5. tulajdonságot (hiszen $\gamma < \beta \leq \alpha_0$). Ha r_γ -ból indul ki G_γ -ban $r_\gamma \xrightarrow{0} x_1$ él, de x_1 -ből már nem indul ki 0-él, akkor az előző esethez hasonlóan x_2 -ből építjük fel üres csúcsokon keresztül létránkat. Legkésőbb x_3 -t tudjuk üres csúcsnak választani és belőle felépíteni a létránkat. Ezzel megkonstruáltuk a G_β gráfot. Hátravan még annak az ellenőrzése, hogy G_β teljesíti az 1–5. tulajdonságokat. Az 1. tulajdonság a konstrukcióból adódóan teljesül. A 2. tulajdonságra térve

$$\{x \in \mathbb{R} : G_\beta\text{-ban } x \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \text{ módon vannak élek}\} \supseteq H_\beta$$

világos, így csak a fordított tartalmazást kell bizonyítanunk. Ehhez tegyük fel, hogy $w \in \mathbb{R}$ -ből

$$(6) \quad w \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{1} \bullet$$

módon indulnak élek G_β -ban. Jelölje a fenti éleket rendre e_1 , e_2 és e_3 . Ezek az élek vagy már eredetileg is G_γ -ban voltak vagy akkor keletkeztek, amikor r_γ -ból az L_γ létrát építettük. Ezt a két esetet rendre R (régi) és L (létra) betűkkel fogjuk jelölni. A 7. ábrán összeszedtük az összes lehetőséget.

Eset	e_1	e_2	e_3
(A)	L	L	L
(B)	L	L	R
(C)	L	R	L
(D)	L	R	R
(E)	R	L	L
(F)	R	L	R
(G)	R	R	L
(H)	R	R	R

7. ábra

A (H) esetben abból, hogy a G_γ teljesíti a 2. tulajdonságot $w \in H_\gamma \subseteq H_\beta$ adódik. Az (A) eset $w = r_\gamma$ -t jelentené, hiszen egy létrában csak a gyökérből indulnak ki (6) módon élek, így $r_\gamma \in H_\beta$ miatt ezzel az esettel is készen vagyunk. Az L_γ létrában csak olyan 0-élek indulnak $C(G_\gamma)$ -beli csúcsokba, melyek G_γ -beli élek is (láttuk, hogy 2. tulajdonságunk miatt ez a gyökértől legfeljebb 2 lépésig tart). Tekintsük a táblázat egy olyan sorát melyben (balról jobbra olvasva) szerepel az LR karaktersorozat. Ez azt jelenti, hogy az L él (mely ekkor biztosan 0-él) egy $C(G_\gamma)$ -beli csúcsba mutat, ilyen pedig előző megállapításunk alapján lehetetlen. Ez azt mutatja, hogy táblázatunk LR-t tartalmazó sorai nem fordulhatnak elő. Ezzel kizártuk a (B), (C), (D), és (F) eseteket. Most megvizsgáljuk az (E) esetet. Ekkor

$$w \xrightarrow{0} w_1 \xrightarrow{L} w_2 \xrightarrow{1} w_3.$$

A $w_1 \xrightarrow{0} w_2 \xrightarrow{1} w_3$ élek L_γ -beliek, és létra konstrukciónkban csak úgy szerepelnek egymás után 0–1 élek, ha a 0-él kezdőpontjába is fut be a létrának éle, így létezik L_γ -beli $v \rightarrow w_1$ él. Abból, hogy a G_γ teljesíti a 3. tulajdonságot $w_1 \in C(G_\gamma)$ következik (a $w \xrightarrow{0} w_1$ él miatt). Tehát a $v \rightarrow w_1$ él is G_γ beli. Ebből az következik, hogy $w_1 \in \{x_1, x_2\}$ (lásd (5)). Mivel azonban az L_γ létrában w_1 -ből 0-él indul ki, csak $w_1 = x_1$ lehetséges, amiből pedig $v = r_\gamma$. Azt tudjuk, hogy $w \xrightarrow{0} w_1$ és $v \xrightarrow{0} w_1$ is G_γ -beli élek, így a 4. tulajdonságból $r_\gamma = v = w$, tehát valóban $w \in H_\beta$. Végül vizsgáljuk meg a (G) esetet. Ekkor

$$w \xrightarrow{0} w_1 \xrightarrow{R} w_2 \xrightarrow{1} w_3.$$

Az előző gondolatmenethez teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy ekkor is $w = r_\gamma$ teljesül, azaz $w \in H_\beta$. Ezzel tehát bebizonyítottuk G_β -ra a 2. tulajdonságot. A 3.

tulajdonság bizonyítása egyszerű, az olvasóra hagyjuk. A 4. tulajdonság bizonyításához tegyük fel, hogy G_β -ban

$$x \xrightarrow{0} z \text{ és } y \xrightarrow{0} z.$$

Ha mindkét él G_γ -beli, akkor abból következik az állítás, hogy G_γ teljesíti a 4. tulajdonságot. Ha mindkét él L_γ -beli, akkor a létra konstrukcióból látható az állítás. A

$$x \xrightarrow[L]{0} z \text{ és } y \xrightarrow[R]{0} z$$

eset pedig a már látott (3. tulajdonságot használó) gondolatmenetünket követve vezet ellentmondásra. Az 5. tulajdonság teljesülését már az L_γ létra építésénél láttuk. Készen vagyunk a rákövetkező rendszám esetével is. Ezzel a transzfinit rekurziós gondolatmenetet befejeztük, megoldottuk a feladatot. ■

Megjegyzés. A most vázolt megoldás megtalálása után a szerzők meglepődve tapasztalták, hogy a megoldáshoz talált (2) kódolás megegyezik az előző megoldásban használt (1) kódolással, pedig a két megoldás jellege teljesen más, a két konstrukció gyökeresen más gondolatok, szempontok, ötletek alapján született a szerzők fejében.

Végül bebizonyítjuk, hogy egy függvénnyel már nem oldhatóak meg előző feladataink.

6. Feladat. *Adjunk meg két olyan f_0, f_1 függvényt, melyek esetén nem létezik olyan g valós függvény, hogy $\{f_0, f_1\} \subseteq [g]!$*

1. Megoldás. *(Danka Tivadar)* Legyen $f_0 := \text{id}_\mathbb{R}$ és $f_1(x) := x + 1$. Nyilvánvaló, hogy f_0 minden pályája véges, ezzel szemben f_1 minden pályája végtelen. Tegyük fel, hogy $g^{(k)} = f_0$ valamely k természetes számra. Könnyen meggondolható, hogy ekkor g -nek nem lehet végtelen pályája, tehát minden pályája véges. Ilyen függvény iteráltjának azonban nem lehet végtelen pályája, így $f_1 = g^{(l)}$ nem teljesül egyetlen l természetes számra sem. ■

2. Megoldás. *(Kunos Ádám)* Csak az 1. megoldás egy variánsát adjuk. Azt fogjuk megmutatni (másképpen), hogy az 1. megoldásban adott f_0 és f_1 függvények megfelelőek. Ehhez bevezetjük minden i természetes számra a

$$\alpha_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + i$$

függvényt. Világos, hogy ezzel $f_1 = \alpha_1$ és $\alpha_1^{(i)} = \alpha_i$ tetszőleges i természetes szám esetén. Tegyük fel, hogy létezik olyan g valós függvény, melyre $g^{(k)} = f_0$ és $g^{(l)} = f_1$, valamely k és l természetes számokra. Ekkor

$$\text{id}_{\mathbb{R}} = g^{(k)} = (g^{(k)})^{(l)} = g^{(kl)} = (g^{(l)})^{(k)} = \alpha_1^{(k)} = \alpha_k,$$

mely ellentmondás bizonyítja állításunkat. ■

Köszönetnyilvánítás. A szerzők ezúton fejezik ki köszönetüket a második szerző témavezetőjének, Maróti Miklósnak, aki sokat segített az 5. feladat transzfinit rekurziós megoldásának „rácba szedésében”.

Hivatkozások

- [1] Hajnal András – Hamburger Péter, *Halmazelmélet*, Tankönyvkiadó Vállalat, 1983.
- [2] P. R. Halmos – L. E. Sigler, *Elemi halmazelmélet. Halmazelméleti feladatok*, Műszaki Könyvkiadó, 1981.
- [3] Gy. 2401., *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, 1987, 3. sz. 126.
- [4] R. Isaacs, Iterates of fractional order, *Canad. J. Math*, **2**, 409–416., 1950.
- [5] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera, *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.
- [6] W. Sierpiski, *Oeuvres Choiesies*, Warszawa 1976, III. kötet 255–258.
- [7] W. Sierpiski, Sur les suites infinies de fonctions définies dans les ensembles quelconques, *Fund. Math.*, **24** 209–212., 1935.

Danka Tivadar, SZTE Matematikus MSc hallgató, tivadar.danka@math-u.szeged.hu
Kunos Ádám, SZTE Matematikus MSc hallgató, kunosadam@gmail.com