

Bizonyítások a Poincaré-féle félgömbmodellen

HORVÁTH JENŐ, H. TEMESVÁRI ÁGOTA

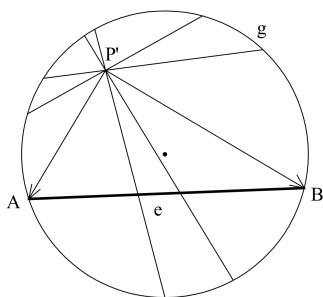
Dr. Molnár József professzor úr emlékére

Bevezetés

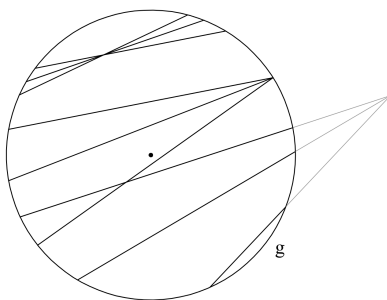
A nem-euklideszi geometriák közül a hiperbolikus vagy Bolyai-Lobacsevszki geometria (röviden B-L geometria) [1] iskolai, főiskolai taníthatóságának kérdéseivel több cikk is foglalkozott, például [4], [5], [6], [7]. A [4], [5] dolgozatokban a B-L geometria néhány elemi tételének középiskolai anyagba való beépíthetőségét tárgyalja a szerző és nem használ modellt. A [3],[8] cikkekben elemi geometriai feladatok és tételek szerepelnek a hiperbolikus geometria különböző modelljeinek felhasználásával. Egy iskolai kísérletről számol be a [2] cikk.

Dolgozatunkban a címnek megfelelően egyszerűbb bizonyításokat tárgyalunk. Kérdésként felmerül, hogy miért ezt a modellt választottuk. A válasz egyszerű, ezt tartjuk a legelemibb modellnek. Nem kell inverzió (Poincaré-féle kör- és félsíkmodell), nem kellenek projektív geometriai ismeretek (Cayley-Klein modell). A Poincaré-féle félgömbmodellből az említett modellek többsége egyszerűen származtatható. Például a Poincaré-féle félgömbmodell merőleges vetülete a határkör síkjára a Cayley-Klein modell, bár ezt nem használjuk. A bizonyítások, szerkesztések esetén felhasználjuk, hogy a Poincaré-féle félgömbmodell az euklideszi térben van.

Adott az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térben egy nyílt félgömbfelület (Γ) , határköre g . A g határkör síkját E -síknak nevezzük. Pontnak nevezzük a nyílt félgömbfelület pontjait, egyenesnek pedig a g -t merőlegesen metsző nyílt félköröket. Ezeket a továbbiakban h -egyeneseznek (hiperbolikus egyenesek) nevezzük. A h -egyenesegek tehát nyílt félkörök. A félköröket lezáró pontokat az egyenes végeinek nevezzük. Az illeszkedés az Euklideszi térben szokásos illeszkedés. Az 1. ábrán a modell merőleges vetülete, egy e egyenes A és B végekkel és egy e -re nem illeszkedő P pont merőleges vetülete látható az E -síkon. A vetületi pontokat vesszővel jelöljük. A $P \rightarrow P'$ megfeleltetés egy-egy értelmű. A P ponton át e -hez húzhatók metsző és nem metsző egyenesek. Az ezeket elválasztó két egyenest a P pontra illeszkedő, e -hez párhuzamos egyeneseknek nevezzük.

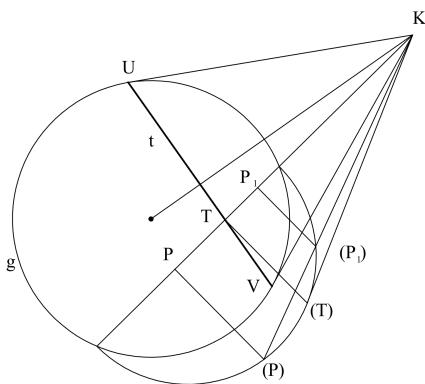


1. ábra

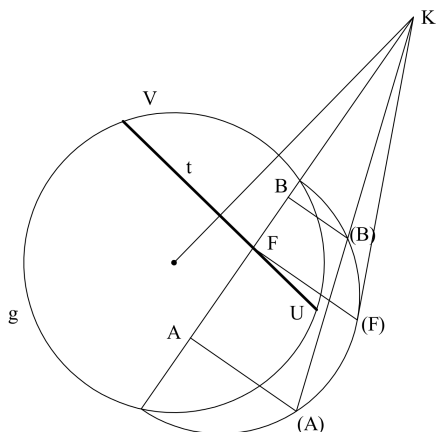


2. ábra

A modellen definiálhatjuk a félegyeneset, szakaszt, félsíkot, háromszöget, szögtartományt, stb. Értelmezhetjük a sugársor fogalmát. A B-L geometriában háromféle sugársor van. A metsző sugársort egy ponton átmenő egyenesek alkotják, a párhuzamos egyenesek egyik vége azonos. A nem metsző sugársort alkotó hiperbolikus egyenesek síkjai az $\mathbb{R}^3$ térben síksort alkotnak, ahol a tartóegyenest nem metszi a félgömböt (2. ábra).



3. ábra



4. ábra

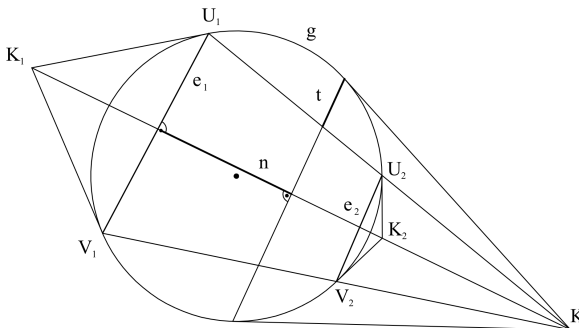
Értelmezzük a tengelyes tükrözést. Legyen t hiperbolikus egyenes Γ -n, végei U és V . Ha t nem fél főkör, akkor tekintsük a t -hez tartozó érintőkúpot. Legyen ennek csúcsa K . A K pont a g határkör síkjában van. Legyen P a t -re nem illeszkedő pont Γ -n. A KP euklideszi félegyenes még egy P_1 pontban metszi Γ -t, ezt nevezzük a P

pont t -re vonatkozó tükörképének (3. ábra). Ha t fél főkör, akkor a t -re vonatkozó tükrözés a t kör síkjára való tükrözés az euklideszi térben. A t hiperbolikus egyenes pontjai fixpontok. A tengelyes tükrözés a gömbfelületen egy körre vonatkozó tükrözés, amely szögtartó és körtartó [9]. Ebből következik, hogy az egyenesre vonatkozó tükrözés a modellen egyenestartó. A PP_1 hiperbolikus egyenes képe önmaga.

Két alakzat egybevágó, ha az egyik véges sok tükrözés egymásutánjával a másikba vihető át és megfordítva. Így $PTV_{\angle} = P_1TV_{\angle}$. A Γ gömbfelületen $PTV_{\angle} = \pi/2$. Ha a $PTV_{\angle}$ -höz a modellen is $\pi/2$ -t rendelünk, akkor bizonyítható, hogy tetszőleges szög euklideszi és hiperbolikus mértéke azonos, azaz a modellen a szögmérika euklideszi. Mivel $PT = P_1T$, a T pont a PP_1 szakasz felezőpontja. (A P_1 és a T pont szerkesztése a 3. ábrán látható.)

Gyakran fogjuk használni azt, hogy ha adott két különböző pont Γ -n, akkor létezik tengelyes tükrözés, mely a két pontot egymásba viszi. Legyen adott két pont, A és B , merőleges vetületeik a g határkör síkjára A' és B' (4. ábra). Forgassuk az AB egyenes síkját $A'B'$ körül a g határkör síkjába. A leforgatott pontokat zárójellel jelöljük. Legyen $K = A'B' \cap (A)(B)$. K -ból érintőket szerkesztünk a g határkörhöz, az érintési pontok egy t egyenes végei. A szerkesztésből adódik, hogy t -re tükrözve az A pont a B pontba megy át és megfordítva. Az $F = t \cap AB$ pont az AB szakasz felezőpontja.

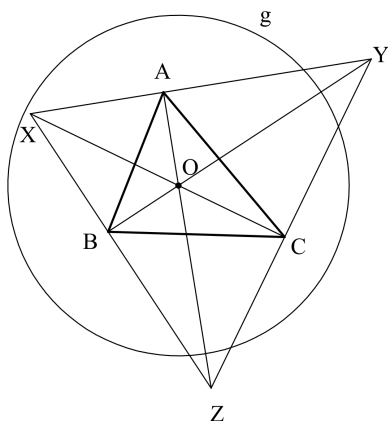
Két egyenes kölcsönös helyzete lehet metsző, párhuzamos és nem metsző. Metsző esetben a két egyenesnek két szimmetriatengelye, párhuzamos és nem metsző esetben egy-egy szimmetriatengelye van. Ennek belátásához felhasználhatjuk, hogy tükrözésnél egy egyenes végei a tükörkép egyenes végeibe mennek át, így könnyen szerkeszthető a tükörtengelyhez tartozó kúp csúcsa és ebből a tükörtengely. (Ennek részletes átgondolását az Olvasóra bízunk.) Az 5. ábrán az e_1 és e_2 nem metsző egyenesek t szimmetriatengelye látható vetületben az E -síkon, $n \perp e_1$, $n \perp e_2$.



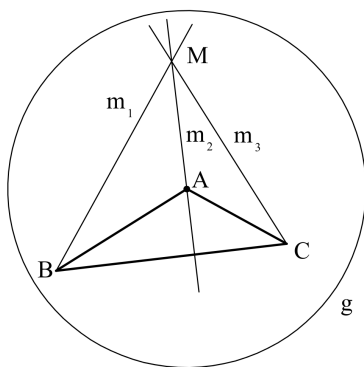
5. ábra

1. Néhány elemi tétel bizonyítása a Poincaré-féle félgömbmodellel.

1.1. A háromszög belső szögfelezői egy ponton mennek át. Felhasználjuk azt, hogy ha a szimmetriatengely átmegy a modell pólusán, akkor a határkör síkjára merőleges vetületekre is fennáll a szimmetria euklideszi értelemben. Vegyük az A és a B csúcsokhoz tartozó belső szögfelezőket, metszéspontjuk legyen O (6. ábra). Tükrözzük O -t a pólusba. A két szögfelező metszéspontja a modell pólusa, tehát a hiperbolikus ABC háromszög merőleges vetületében, az $A'B'C'$ háromszögben a szögfelezők vetületei az E -síkon szögfelezők. Ezek egy ponton mennek át. Ezért a modell ABC háromszögében is egy ponton (O) mennek át a belső szögfelezők.



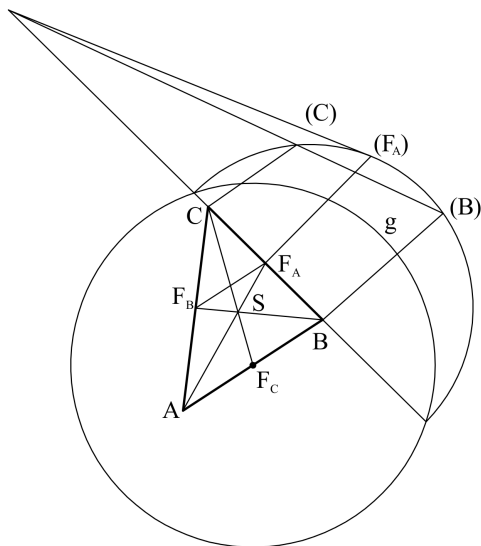
6. ábra



7. ábra

1.2. Igaz az is, hogy két külső és a harmadik csúcsához tartozó belső szögfelezők is egy sugársort alkotnak. Ennek bizonyításához felhasználjuk, hogy ha egy egyenes átmegy a póluson, akkor a rá merőleges egyenesek merőleges vetületben is merőlegesek euklideszi értelemben az E -síkon. A sugársor lehet metsző, párhuzamos és nem metsző, mindhárom eset előfordulhat, ha g határkört változtatjuk.

1.3. A háromszög magasságvonalai sugársort alkotnak. A háromszög A csúcsát (7. ábra) a pólusba tükrözzük. A tükrözés a merőlegességet megtartja, azaz magasságvonalakból magasságvonal lesz. Mivel A a modell pólusában van, a vetületi háromszögben $A'C'$, $A'B'$ és m'_a átmérők, ezért $m'_b \perp A'C'$, $m'_c \perp A'B'$ és $m'_a \perp B'C'$ euklideszi értelemben az E -síkon. Az E -síkon tudjuk, hogy a háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át, így a B-L geometriában a magasságvonalak egy sugársort alkotnak. Ez lehet metsző, párhuzamos, vagy nem metsző sugársor.



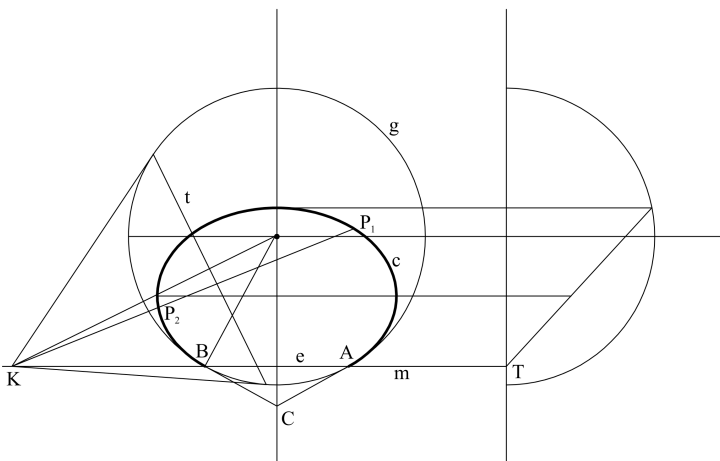
8. ábra

1.4. A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át. A bizonyítás egyszerű, ha az AB oldalhoz tartozó felezőpontot a pólusba tükrözzük (8. ábra). Ebben az esetben az AB oldalhoz, tartozó középvonal vetületben euklideszi értelemben párhuzamos AB -vel [3], [8]. Ezek után felhasználjuk azt, hogy az E -síkon a trapéz átlóinak és szárainak metszéspontjait összekötő egyenes felezi az alapokat.

1.5. A Γ modell síkmetszetét ciklusnak (c) nevezzük. Háromféle ciklus van. Ha c nem metszi a g határkört, akkor körnek nevezzük. Ha c érinti g -t, akkor paraciklusról, ha pedig c metszi g -t hiperciklusról beszélünk. Mindhárom típusú ciklusnak végtelen sok szimmetria tengelye van, ezek egy sugársorhoz tartoznak.

Mindhárom esetben meghatározzuk a ciklus szimmetria tengelyeit. Ha a kör síkja párhuzamon g síkjával, akkor a kör síkjával párhuzamos érintősík a Γ modellt a pólusában érinti. Ebben az esetben a kör merőleges vetülete is kör, melynek szimmetria tengelyei az E -síkon g átmérői. A modell fenti körének szimmetria tengelyei a póluson mennek át. Ha a kör síkja metszi g síkját egy m egyenesben, akkor az m egyenes T pontján át vegyünk fel m -re merőleges síkot. A kör síkjának erre a merőleges síkra való merőleges vetülete egyenes (9.a ábra). Illesszünk m -re Γ -t érintő síkot. Legyen C az érintési pont. Belátjuk, hogy a c ciklusnak végtelen sok szimmetria tengelye van, melyek a C ponton mennek át. Legyen K az m egyenes tetszőleges pontja. A KC egyenes a gömb érintője, így a K -hoz tartozó hiperbolikus t egyenes átmegy C -n. A c ciklus P_1 pontját K -val összekötő egyenes még

Hiperciklus esetén legyenek a ciklus végei A és B . (Ezek a hiperciklus síkjának g -vel való metszéspontjai.) Legyen e az A és a B végekhez tartozó egyenes, az e -hez tartozó érintőkúp csúcsa C (9.c ábra). Legyen $K \in m$ tetszőleges, a határkör külső pontja. A K érintőkúp csúcshoz tartozó hiperbolikus egyenes legyen t . A t egyenesre tükrözve az e egyenest, képe önmaga, így $e \perp t$ hiperbolikus értelemben. Ezért t síkja átmegy C -n. Ebből az előzőekhez hasonlóan következik, hogy t szimmetriatengelye a c ciklusnak.



9.c ábra

1.6. A 1.5.-ben elmondottak egyszerű következménye, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei sugársort alkotnak. Ugyanis a háromszög csúcsai által meghatározott síknak Γ -val való metszete lehet kör, paraciklus vagy hiperciklus. Így az oldalfelező merőlegesek metsző, párhuzamos, vagy nem metsző sugársort alkotnak.

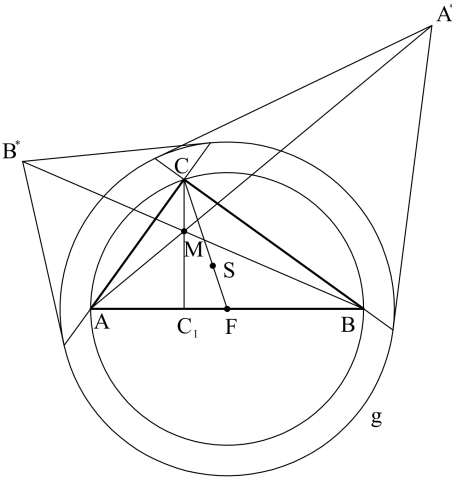
2. Ellenpéldák

A következőkben egy-egy konkrét példával igazoljuk, hogy az euklideszi síkon érvényes tétel a hiperbolikus síkon nem teljesül.

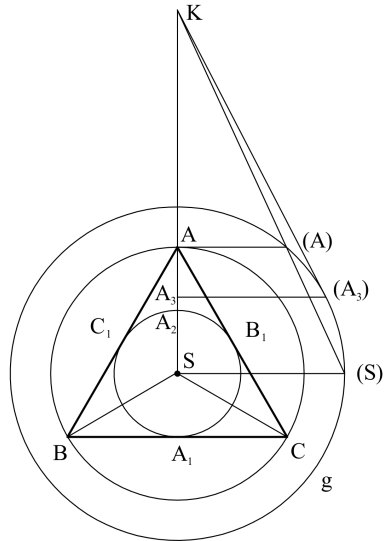
2.1. Az euklideszi síkon a háromszög köré írt körének középpontja, súlypontja és magasságpontja egy egyenesen van, ez az úgynevezett Euler egyenes. A hiperbolikus síkon ez a tétel egyenlő szárú háromszögekre igaz.

Ha a háromszög nem egyenlő szárú, akkor adunk egy példát, amikor ez a tétel nem teljesül. Tekintsünk egy olyan ABC háromszöget, mely nem egyenlő szárú és szögeire $\gamma = \alpha + \beta$ teljesül. Könnyen bizonyítható, hogy ebben az esetben van köré

írt kör és középpontja az AB oldal F felezőpontja. (A Thalesz tétel megfelelője hiperbolikus síkon.) Tükrözzük F -t és vele együtt a háromszöget a modell pólusába. (A transzformált háromszögre is a korábbi jelöléseket használjuk.) Tegyük fel, hogy $AC < BC$. A 10. ábrán látható az ABC háromszög merőleges vetülete a g határkör síkján, mely euklideszi értelemben derékszögű. A CF szakasz a háromszög súlyvonala, erre illeszkedik a háromszög súlypontja. (Nem szerkesztettük meg az ábrán, bár lehetne.) Szerkesszük meg az AC és a BC egyenesekhez tartozó érintőkúpok csúcsait, ezek B^* és A^* . Teljesül $BB^* \perp AC$ és $AA^* \perp BC$, azaz BB^* és AA^* magasságvonalai a háromszögnek. Legyen M ezek metszéspontja. A C csúsból induló magasságvonal euklideszi értelemben is merőleges AB -re, azaz a vetületi háromszögnek is magasságvonala. A hiperbolikus síkon a magasságvonalak sugársort alkotnak, így $M \in C_1C$ és M a háromszög belső pontja, mivel $\gamma = \alpha + \beta$ miatt az ABC háromszög hegyesszögű. (A szögek összege kisebb π -nél.) Az $AC < BC$ egyenlőtlenség miatt az F , az S és az M pontok nincsenek egy egyenesen. (Tetszőleges háromszögre a bizonyítás megtalálható [10] 158-162. old..



10. ábra



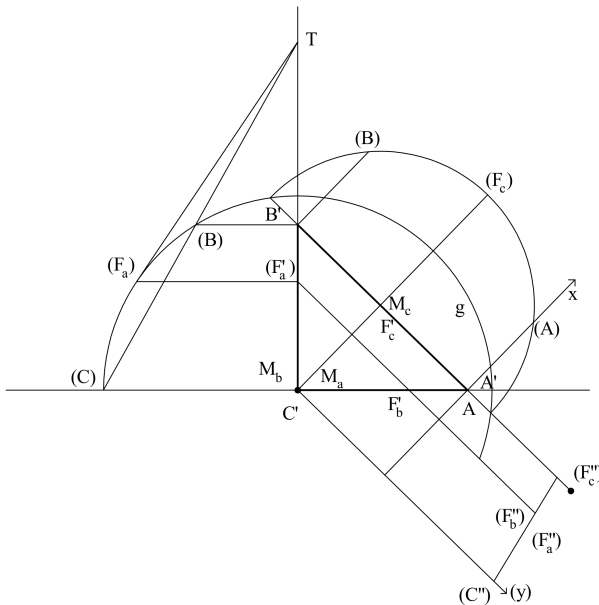
11. ábra

2.2. Az euklideszi síkon jól ismert, hogy a háromszög oldalfelező pontjai, a magasságvonalak talppontjai, valamint a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak. Ez a háromszög Feuerbach köre. Megmutatjuk, hogy a hiperbolikus síkon nem minden háromszögnek van Feuerbach köre.

Legyen ABC a félgömbmodell egy szabályos háromszöge, melynek súlypontja S . Az S pontot és vele együtt a háromszöget tükrözzük a modell pólusába, majd vetítsük merőlegesen a határkör síkjára (11. ábra). Az oldalfelező pontok és a magasság talppontok egybeesnek, legyenek ezek az A_1, B_1, C_1 pontok. Az S pont a háromszög középpontja is egyben. Az S középpontú és az A_1, B_1, C_1 pontokon átmenő kör a vetületi háromszög Feuerbach köre, azaz átmegy a magasságpontot (S) a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjain is. Az A_2 pont a vetületben felezi az AS szakaszt, $SA_2 = A_2A$ euklideszi értelemben. Szerkesszük meg SA szakasz felezőpontját a modellen beforgatással. A K pontból érintőt húzunk a g határkörhöz és az érintési pontot merőlegesen rávetítjük az AS szakaszra. Ez a pont A_3 , mely az AA_2 szakasz belső pontja, így nincs rajta az S középpontú, A_1, B_1, C_1 pontokon átmenő körön.

Megjegyezzük, hogy a 11. ábráról közvetlenül leolvasható, hogy a modellen $AS > 2SA_1$. Ez azt jelenti, hogy a súlypont nem harmadolja a súlyvonalat.

2.3. A következőkben arra adunk példát, hogy a háromszög oldalfelező pontjai és a magasság talppontok nincsenek egy körön.



12. ábra

Először a 12. ábrát magyarázzuk meg. A modell félgömbjének sugara 2 egység, C pólusának merőleges vetülete a g határkör síkjára C' , $CC' = 2$. A C' ponton

át vegyünk fel két egymásra merőleges félegyenest. Az A és B pontok a modell azon pontjai, amelyeknek A' és B' vetületei a merőleges félegyeneseken vannak és $AA' = BB' = 1$. Az ABC háromszög a modellen és vetületben is egyenlőszárú derékszögű háromszög. Legyen $T = B'C' \cap (B)(C)$, ahol (B) és (C) a megfelelő pontok határkör síkjába való leforgatottjai a $B'C'$ egyenes körül. Könnyen bizonyítható, hogy $B'C' = B'T = C'A' = \sqrt{3}$. Az ABC háromszög oldalfelező pontjai legyenek F_a , F_b , és F_c , a magasság talppontok pedig M_a , M_b , és M_c . A B pontot $C'T$ körül a határkör síkjába forgatva megszerkesztjük az F_a oldalfelező pont leforgatottját, (F_a) -t, majd ennek F'_a vetületét. A $C'T(F_a)$ derékszögű háromszögből adódik, hogy $C'F'_a = 2/\sqrt{3}$ és $F'_a(F_a) = 2\sqrt{2/3}$, azaz $F_aF'_a = F_bF'_b = 2\sqrt{2/3}$, és M_c az AB oldal F_c felezőpontja. Mivel $A'B' = \sqrt{6}$, ezért $C'F'_c = \sqrt{6}/2$. Pitagorasz tételből $BF'_c = \sqrt{4 - (6/4)} = (1/2)\sqrt{10}$. Így $F'_cF_c = (1/2)\sqrt{10}$.

A magasságvonalak talppontjaira $M_a = M_b = C$ és $M_c = F_c$. Ha a magasság talppontok és az oldalfelező pontok egy körön lennének, akkor ezek a pontok egy síkra illeszkednének. Megmutatjuk, hogy az F_a , F_b , C pontok által meghatározott síkra nem illeszkedik az $F_c = M_a$ pont. Vegyünk fel A' -re illeszkedő, F_aF_b -re merőleges xy síkot. Az x koordinátatengely a határkör síkjában van. A P pont xy síkra való merőleges vetületét P'' -vel jelöljük. Forgassuk be x körül a koordináta síkot a határkör síkjába. A P pont beforgatottját itt is (P) -vel jelöljük. Teljesül, hogy $C''(0, 2)$, $F''_a = F''_b(\sqrt{2/3}, 2\sqrt{2/3})$, $F''_c(\sqrt{6}/2, (1/2)\sqrt{10})$. A $C''F''_a$ egyenes irányításegyezője $m = \frac{2\sqrt{2/3}-2}{\sqrt{2/3}-0} = 2 - \sqrt{6}$, egyenlete $y = (2 - \sqrt{6})x + 2$. Az F''_c pont koordinátáit behelyettesítve megmutatható, hogy

$$\frac{\sqrt{10}}{2} > (2 - \sqrt{6})\frac{\sqrt{6}}{2} + 2,$$

azaz F''_c a 12. ábrának megfelelően helyezkedik el.

2.4. Euklideszi geometriában ismert, hogy ha a háromszög körülírt körének bármely pontjából merőlegest húzunk az oldalak egyenesekre, akkor a merőlegesek talppontjai egy egyenesen, a Simpson egyenesen vannak.

Egy példán keresztül mutatjuk meg, hogy ez nem minden körülírt körrel rendelkező háromszögre teljesül. Vegyünk a Γ félgömbfelületen egy olyan ABC háromszöget, melynek szögeire $\gamma = \alpha + \beta$ és $\alpha = \beta$ teljesül (13. ábra). A körülírt k kör O középpontja az AB oldalfelező pontja. Tükrözzük O -t és vele együtt az ABC háromszöget a modell pólusába. Ezután vetítsük merőlegesen a határkör síkjára. A transzformált háromszög $A'B'C'$ vetülete derékszögű háromszög. A k kör C -vel átellenes pontja P , vetülete P' . Legyen K az AB egyeneshez tartozó érintőkúp csúcsa. Mivel $KP \perp AC$, a T pont lesz a P -ből az AC oldalra húzott merőleges talppontja. Hasonlóan adódik a Q pont, mely P -ből a BC oldalra húzott merőleges

The diagram shows two concentric circles, \$g\$ (outer) and \$k'\$ (inner), with center \$O\$. Points \$A', B', C', P', Q', T', F'\$ are marked on circle \$k'\$. Lines connect \$K\$ to \$A', B', C', P'\$. A horizontal line segment \$A'B'\$ is shown.

13. ábra

A cikk terjedelme miatt ebből a dolgozattól kimaradtak további bizonyítások és szerkesztések. Ezeket a szerzők egy következő dolgozatban tervezik megjelentetni.

Irodalomjegyzék

- [1] Bolyai, J., *Appendix. A tér tudománya, (szerkesztette Kárteszi Ferenc)*, Akadémiai Kiadó, Bp. 1977.
- [2] Drozdyné Schwenner, K., A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában (Beszámoló egy tanítási kísérletről), *A Matematika Tanítása*, XXXIV./1., 1987.
- [3] Horváth, J., Beweise von Satzen mit Hilfe der Modelle der Hyperbolischen Geometrie, *Teaching Mathematics and Computer Science*, 1-2(2003), 159-167.
- [4] Horváth, J., A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában I., *A Matematika Tanítása*, XXVII/6. (1980), 161-168.
- [5] Horváth, J., A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában II., *A Matematika Tanítása*, XXVIII/2. (1981), 52-58.
- [6] Horváth, J., H. Temesvári, Á., Krisztin, I., Az abszolút geometria elemeinek oktatása a főiskolai geometriai képzésben, *Polygon*, XII./1-2, 2003.
- [7] Horváth, J., H. Temesvári, Á., Papp, Gy., *Bolyai János (1802-1860)*, Nyugat-magyarországi Egyetem Kiadó, Sopron, 2010.
- [8] Horváth, J., H. Temesvári, Á., Proofs of elementary theorems using models of hyperbolic geometry, *Math. Pannonica* 23/2(2012), 223-234.

- [9] Kárteszi, F., *Ábrázoló geometria*, Tankönyvkiadó, Bp., 1957.
- [10] Szász, P., *Bevezetés a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriába*, Akadémiai Kiadó, Bp., 1973.

Horváth Jenő, 1191 Budapest, Arany J. u. 26.

*H. Temesvári Ágota, PTE TTK Matematikai és Informatikai Intézet,
7624 Pécs, Ifjúság útja 6.*