

MŰHELYSAROK

Probléma a tenispályán*

KOZMA JÓZSEF

1. Bevezetés

E nyár utolsó szombat reggelén teniszeccset játszottam zenész ismerőssémmel. A találkozó szokásosan baráti mederben zajlott. Az első játszma vége felé egy térfélcserénél a következő problémával fordult felém.

– Ugye te fizikus is vagy, és talán megoldást adsz egy problémára. Megfigyeltem, hogy a magammal hozott és a táskám mellé a padra kitett vizespalack stabilitása csökken, ahogyan fogy belőle a víz, és ha nagyobb a szél, egy idő után fel is dől. Elgondolkodtam azon, hogyan változik a súlypont magassága és ezzel a palack borulékonyasága a benne lévő víz mennyiségétől függően. Az számomra is nyilvánvaló, hogy ahogyan elkezdem kortyonként kiinni a vizet, a súlypont is elkezd leszállni. De az is nyilvánvaló, hogy a teli és az üres palacknak ugyanott van a súlypontja. Tehát az kézenfekvő, hogy a súlypont magassága egy darabig csökken, majd újra növekszik. No de hogyan függ a palack és a víz tömegétől ez a változás?

A játszma végére készen álltam egy válasszal a leíró függvény jellegét illetően, a részletes kalkulációhoz azonban papírt és tollat kellett elővennem. A kérdés lekötötte a figyelmemet, így a meccs ráment, de egyáltalán nem bántam, hiszen partnerem felvetése újabb bizonyítékkal szolgált arra, hogy környezetünkben akárhol, még a tenispályán is találkozhatunk a matematika segítségével jól tárgyalható és egészen könnyen megoldható problémával. Természetesen kell hozzá egy jó megfigyelő, a fizikai és matematikai fogalmakkal tisztában lévő muzsikuss...

* Köszönettel tartozom Lendvai Györgynek, aki ezt az érdekes problémát felvetette. Külön köszönöm Kurusa Árpádnak a hasznos beszélgetéseket, a tartalmi és módszertani tanácsokat a probléma kibontása és a válasz megkeresése során!

2. A probléma fizikai és matematikai megfogalmazása

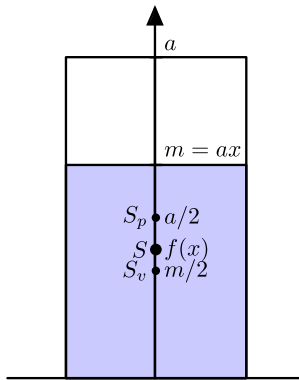
A probléma lényegét nem érinti, ha a palackot szabályos hengernek vesszük, amelynek magassága a . A henger palástja, alap- és fedőlapja legyen egyenlő falvastagságú, így a tömegközéppontja a henger szimmetriaközéppontjában, a forgástengelyen, az alaplaptól $a/2$ magasságban van. A hengerben lévő víz magassága legyen $m = xa$ ($x \in [0, 1]$). Mivel a víz alakja maga is henger, mégpedig az előző henger része, az m magasságú víz henger tömegközéppontja a hengerek közös szimmetriatengelyén, az alaplaptól $m/2$ távolságra van. Legyen a palack tömege t , a palackot teljesen kitöltő víz henger tömege T . Akkor az m magasságú víz henger tömege xT .

A palackból és a benne lévő vízből álló rendszer S tömegközéppontját a palack S_p és a víz henger S_v tömegközéppontja, valamint az ezekhez rendelt tömegek határozzák meg. Ha $x = 0$, akkor a víz tömege 0, és az S tömegközéppont megegyezik S_p -vel, de $x = 1$ esetén (vagyis amikor még nem hiányzik a vízből) $S_v = S_p = S$.

3. Az S tömegközéppont helyét leíró függvény meghatározása

Amint az ismert, az S tömegközéppont az S_p és S_v tömegközéppontokat összekötő szakaszon van, és azt a tömegek arányában osztja, vagyis

$$(1) \quad \frac{\overline{SS_p}}{\overline{S_vS}} = \frac{xT}{t}.$$



1. ábra. A rendszer tömegközéppontja

Eszerint az S tömegközéppont távolsága az alaplaptól az x függvénye. Jelölje ezt a keresett függvényt $f(x)$. (Lásd az 1. ábrát.)

Az S_v az S_p alatt van a szimmetriatengelyen (csak $x = 1$ esetén egyeznek meg), S pedig a kettő között, ezért

$$(2) \quad d(S_v, S) + d(S, S_p) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right) a.$$

Az (1) egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$d(S, S_p) = \frac{xT}{t} d(S_v, S),$$

amit behelyettesítve a (2) egyenlőségbe

$$d(S_v, S) \left(1 + \frac{xT}{t} \right) = (1 - x) \cdot \frac{a}{2}$$

adódik. Ugyanez rendezve

$$d(S_v, S) = \frac{\frac{a}{2}(1-x)}{1 + \frac{xT}{t}} = \frac{\frac{a}{2}(1-x)}{\frac{t+xT}{t}} = \frac{a}{2} \frac{t}{T} \frac{1-x}{\frac{t}{T} + x}.$$

Jól látszik, hogy nem a két tömeg külön-külön, hanem csak azok aránya játszik szerepet. Ha bevezetjük az arányra az $\tau = t/T$ jelölést (és megjegyezzük, hogy ez az érték mindig pozitív), akkor behelyettesítéssel a keresett $f(x)$ érték

$$f(x) = \frac{m}{2} + d(S_v, S) = \frac{xa}{2} + \frac{a}{2} \tau \frac{1-x}{\tau + x};$$

vagy ugyanez egy kissé átalakított formában

$$(3) \quad f(x) = \frac{a}{2} \left[(\tau + x) + \frac{\tau(\tau + 1)}{\tau + x} \right] - \tau a.$$

4. A függvény vizsgálata

Az f függvényt a $[0, 1]$ intervallumon értelmezzük. Láthatjuk, hogy a bevezetésben említettnek pontosan megfelelően $f(0) = f(1) = 1/2$.

Alapvető függvénytani megállapítás, hogy mivel f a $[0, 1]$ zárt intervallumon folytonos, ezért felveszi szélsőértékeit. Mi a fizikai kép alapján már tudjuk, hogy az S tömegközéppont nem lehet magasabban mindkét S_p , S_v tömegközéppontnál, így a maximum értéke éppen $a/2$, és f ezt az értéket veszi fel az intervallum végpontjaiban. Ugyancsak látható, hogy a tömegközéppont minden más értékre lejjebb lesz, hiszen S_v lejjebb lesz, S pedig a palack és a víz tömegközéppontja között van.

Keressük meg a lehetséges szélsőértékek helyét először a rutin eljárással. Deriváljuk a függvényt (3) alapján:

$$(4) \quad f'(x) = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\tau(\tau + 1)}{(\tau + x)^2} \right).$$

Az $f'(x) = 0$ feltételből azt kapjuk, hogy

$$(\tau + x)^2 = \tau(\tau + 1),$$

vagyis

$$x_{1,2} = -\tau \pm \sqrt{\tau^2 + \tau}.$$

Mivel x nem negatív, és τ pozitív, csak az

$$(5) \quad x_1 = \sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau$$

gyök lehetséges. Ellenőriznünk kell, hogy ez a $[0, 1]$ intervallumba esik-e. Ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy $0 \leq x_1 \leq 1$ legyen, vagyis

$$0 \leq \sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau \leq 1,$$

átrendezve

$$\tau \leq \sqrt{\tau(\tau + 1)} \leq \tau + 1.$$

A pozitív $\sqrt{\tau(\tau + 1)}$ értékkel osztva ez ekvivalens azzal, hogy

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau + 1}} \leq 1 \leq \sqrt{\frac{\tau + 1}{\tau}},$$

ez pedig igaz, sőt láthatóan a szigorú egyenlőtlenség is teljesül. Tehát x_1 a derivált egyetlen zéróhelye a vizsgált intervallum belsejében. A második derivált a (4) formulából számítható:

$$f''(x) = a \frac{\tau(\tau + 1)}{(\tau + x)^3}.$$

Ennek értéke az $x_1 = \sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau$ helyen

$$f''(\sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau) = \frac{a}{\sqrt{\tau^2 + \tau}}.$$

Mivel τ pozitív, ez az érték is pozitív, tehát f -nek minimuma van x_1 -nél, más szélsőérték pedig nincsen az intervallumban.

Ha nem a rutint követjük, hanem a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk, akkor a minimumot és helyét a következőképpen számolhatjuk ki. Induljunk ki az f függvény (3) alakjából, és végezzük el az alábbi becslést:

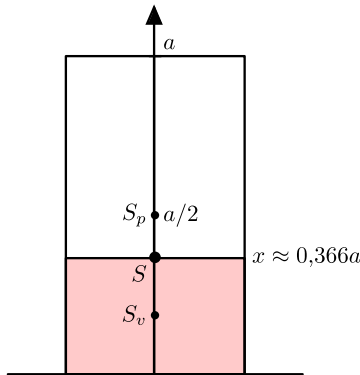
$$(6) \quad \begin{aligned} f(x) &= a \frac{(\tau + x) + \frac{\tau(\tau+1)}{\tau+x}}{2} - \tau a \geq a \sqrt{(\tau + x) \cdot \frac{\tau(\tau + 1)}{\tau + x}} - \tau a \\ &= a(\sqrt{\tau(\tau + 1)} - \tau). \end{aligned}$$

Alsó becslést kaptunk tehát az $f(x)$ -re, amely értéket f pontosan akkor veszi fel, ha a közép két tagja egyenlő, vagyis

$$\tau + x = \frac{\tau(\tau + 1)}{\tau + x},$$

és ebből éppen ugyanazokat a gyököket, illetve ugyanazt a minimum helyet kapjuk, mint az (5) összefüggésben.

Azt kaptuk tehát, amit a fizikai kép alapján gondoltunk: ha a vízszint csökken az $a(\sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau)$ értékig, akkor a tömegközéppont is süllyed, a vízszint további süllyedése esetén azonban újra emelkedik.



2. ábra. A minimum $\tau = 1/2$ esetén, $x \approx 0,366a$

Emeljük ki az előre nem várt, de éppen most kapott eredményt eddigi megfontolásainkból! Azt kaptuk, hogy *a legalacsonyabban lévő tömegközéppont a (6) becslés eredménye szerint éppen az akkor a palackban lévő víz tetejénél van* (ezt mutatja a 2. ábra az $\tau = 1/2$ arány esetére), *akármilyen is a palack és az azt megtöltő folyadék tömegének aránya!* Ennek fizikai magyarázatát is adhatjuk (számolás nélkül is), ha válaszolunk a következő kérdésekre. *Merre mozdul el a tömegközéppont, ha valamely kis mennyiségben még hozzátöltünk, illetve ha még kivesszünk folyadékot? Mi dönti el az elmozdulás irányát?*

5. Vissza a stabilitás problémájához

Meghatároztuk, hogy adott $\tau = t/T$ tömegarány esetén akkor van legmélyebben a tömegközéppont, ha pontosan $a(\sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau)$ magasan van a palackban a víz, és ekkor a tömegközéppont éppen a vízszintre esik.

Am azonnal felmerül a kérdés: hogyan függ a maximális stabilitás eléréséig kiiható víz mennyisége a τ aránytól? Arra gondolhatunk, hogy minél kisebb a τ , annál inkább a víz tömegközéppontjához van közel az egész rendszer tömegközéppontja, vagyis annál többet kell kiinni a stabilitás érdekében, másszóval a

$$g(\tau) := a(\sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau)$$

függvény talán szigorúan monoton növekvő.

Valóban, egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (7) \quad g(\tau) &= a(\sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau) = a \frac{(\sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau)(\sqrt{\tau^2 + \tau} + \tau)}{\sqrt{\tau^2 + \tau} + \tau} \\ &= a \frac{\tau}{\tau + \sqrt{\tau^2 + \tau}} = a \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\tau}}}, \end{aligned}$$

melyből látható, hogy τ növekedésével ennek a konstans számlálójú, pozitív értékű törtnek a nevezője csökken, tehát a tört növekszik.

Egy kérdés maradt. A $\tau = t/T$ tömegarány növekedésével meddig nő a legstabilabb állapotot (legalacsonyabban lévő tömegközéppontot) adó vízszint a palackban? S ha a τ arány csökken, milyen mélyen lesz a kérdéses vízszint? E kérdésekre a

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g(\tau) \quad \text{és} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} g(\tau)$$

határértékek adják a választ. A (7) formulából azonnal látszik, hogy

$$g(\tau) = a(\sqrt{\tau^2 + \tau} - \tau) = a \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau}} + 1} \rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 = 0, & \text{ha } \tau \rightarrow 0, \\ a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}, & \text{ha } \tau \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Értelmezzük az eredményt! Azt kaptuk, hogy ha a palack t tömege elhanyagolható (nagyon kicsi) a palackot megtöltő teljes vízmennyiség T tömegéhez képest, akkor annál lejjebb van a tömegközéppont, minél több vizet megiszunk. Ha viszont a palack tömege végtelen (nagyon nagy) a vízéhez képest, akkor a tömegközéppont lényegében a magasság felénél marad.

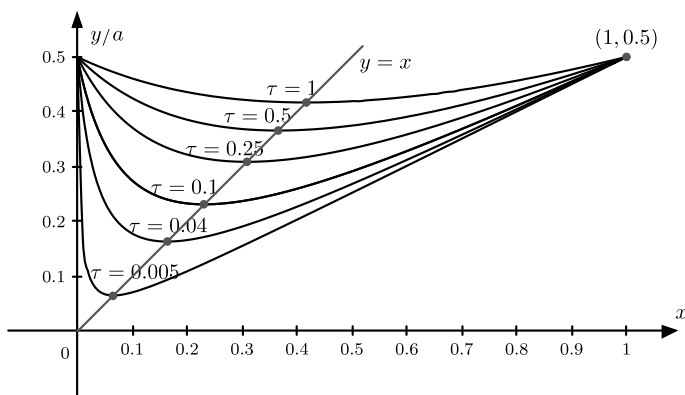
6. A valóságban

A gyakorlati életben milyen τ arányok fordulhatnak elő? Az alábbi táblázat néhány konkrétan előforduló példát foglal össze.

folyadék és palack	palack tömege (g)	folyadék tömege (g)	τ
ásványvíz pillepalackban	19	1500	0,01
ásványvíz kemény műanyagpalackban	50	1000	0,05
üdítő üvegben	541	1500	0,036
tea termoszban	150	600	0,25

Az egyes esetekhez közel álló függvények grafikonjait a 3. ábra mutatja.

Látható, hogy minden egyes τ esetén a tömegközéppont magasságát leíró f függvénynek a $[0, 1]$ intervallumon egy helyen van minimuma, a grafikonja egy-egy hiperbola íve, továbbá a minimum helyének és értékének megfelelő pont az $y = x$ egyenesre esik.



3. ábra. Az f függvény különböző τ értékek esetén és a minimumok egyenese

Modellünk tehát jól működik, eredménye pontosan megegyezik a tapasztalataink szerint elvártakkal.