POLYGON
XXI/1–2. szám, 2013. jan.

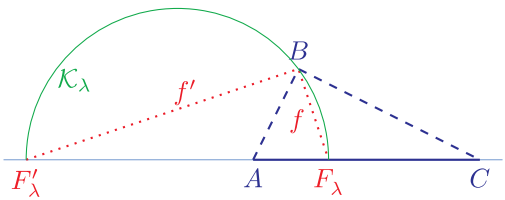
Szakaszok ekvioptikusai: Apollóniosz tételének általánosítása

Kurusa Árpád

1. Bevezető

Apollóniosz tétele szerint azon B pontok halmaza, melyek valamely rögzített A és C pontoktól való távolságainak $\delta_{AC}(B)$ aránya egy $0 < \lambda \neq 1$ állandó, a két rögzített pont egyenesére szimmetrikus (λ-paraméterű) *Apollóniosz-féle* kör.

E tétel szokásos bizonyítása abból indul ki, hogy az $ABC\triangle$ háromszög B ponton átmenő f belső és f' külső szögfelező egyenese az $\overline{AC}$ oldal egyenesét rendre olyan F és F' pontokban metszik, melyekre $\delta_{AC}(F) = \delta_{AC}(F')$ éppen az $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$ oldalak hosszainak aránya. Mivel az ugyanazon csúcshoz tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, ebből következik, hogy azon B pontok halmaza, melyekre $\delta_{AC}(B)$ egy $0 < \lambda \neq 1$ állandó, éppen az $\overline{F_\lambda F'_\lambda}$ szakaszra emelt $\mathcal{K}_\lambda$ Thalész-kör, ahol az F_λ és F'_λ pontokat a $\delta_{AC}(F_\lambda) = \delta_{AC}(F'_\lambda) = \lambda$ és $F'_\lambda \notin \overline{AC} \ni F_\lambda$ feltételek határozzák meg.



A λ-paraméterű Apollóniosz-körhöz vezető levezetésből kiolvasható e körnek az a tulajdonsága is, hogy pontjaiból az $\overline{AF_\lambda}$ és $\overline{F_\lambda C}$ szakaszok (és persze ugyanígy az $\overline{AF'_\lambda}$ és $\overline{F'_\lambda C}$ szakaszok is) azonos szög alatt látszanak. Hasonló helyzetre, vagyis ahol különböző szakaszok egy körív pontjaiból megegyező szög alatt látszanak, a látószög-tétel is példával szolgál: a látószög-tétel szerint egy húrnégyszög egyforma hosszúságú oldalai a körülírt kör néhány ívén egyforma vagy kiegészítő (konstans) szög alatt látszanak.

A síkban két konvex tartományt azonos szög alatt látó pontok halmazának lezártját *ekvioptikusnak* nevezzük. Azon pontok halmazának lezártját pedig, amelyekből a két konvex tartomány kiegészítő szögek alatt látszik, *kompoptikusnak* nevezzük. Az Apollóniosz-kör tehát a szakaszok ekvioptikusának részhalmaza, a [3] cikk szerint pedig az origó középpontú $\sqrt{a^2+b^2}$ sugarú kör részhalmaza az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenletű ellipszisek ekvioptikusának.

E cikkben kiderítjük, hogy szakaszok ekvioptikusa *pontosan* mikor tartalmaz kört vagy körívet.

2. Szakaszok ekvioptikusai és az Apollóniosz-görbék

Világos, hogy ha két szakasz egybeesik, akkor ekvioptikusuk a teljes sík, és ugyanez a helyzet, akkor is, ha mindkét szakasz elfajuló. Az is nyilvánvaló, hogy ha csak az egyik szakasz elfajuló, akkor az ekvioptikusuk a nem elfajuló szakasz egyenesének része, ezért a továbbiakban — ha kifejezetten nem is írjuk — a *vizsgált szakaszok különbözőek és nem elfajulók.*

Egy ponthalmazt a síkban *algebrainak* nevezünk, ha pontosan azon pontok tartoznak hozzá, melyek koordinátái valamely polinom-egyenlet megoldásai. Ilyenek az egyenesek, melyek elsőfokú polinom-egyenletek megoldás-halmazai, a kúpszeletek, melyek másodfokú polinom-egyenletek megoldás-halmazai, és ilyenek a kúpszeletek izoptikusai is, melyek negyedfokú polinom-egyenletek megoldás-halmazai [3].

A továbbiakban a síkot mindig a térben, az ott adott ortogonális koordinátarendszer $z=0$ egyenletű síkjaként tekintjük. Ennek a síknak a normálisa az $\mathbf{m}=(0,0,1)$ vektor.

2.1. Tétel. *Két különböző szakasz ekvioptikusa két harmadrendű $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ algebrai görbe bizonyos íveinek uniója. Az $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ nem az ekvioptikushoz tartozó íveinek uniója a két szakasz kompoptikusa.*

Bizonyítás. A $\times$ vektoriális szorzás és a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzások definíciója alapján világos, hogy az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok azon X pontokban látszanak egyenlő szög alatt, melyekre

$$(\overrightarrow{XA}\times\overrightarrow{XB})\,\langle\overrightarrow{XC},\overrightarrow{XD}\rangle=\varepsilon(X)\,(\overrightarrow{XC}\times\overrightarrow{XD})\,\langle\overrightarrow{XA},\overrightarrow{XB}\rangle, \tag{2.1}$$

ahol

$$\varepsilon(X)=\begin{cases}+1, & \text{ha } |\overrightarrow{XC}\times\overrightarrow{XD}|(\overrightarrow{XA}\times\overrightarrow{XB})=|\overrightarrow{XA}\times\overrightarrow{XB}|(\overrightarrow{XC}\times\overrightarrow{XD}),\\ -1, & \text{egyébként.}\end{cases} \tag{2.2}$$

Nyilvánvaló, hogy az $\varepsilon(X)$ függvény konstans $+1$ vagy -1 az AB és CD egyenesek félsíkjainak metszetein, és mindannyiszor előjelet vált, amikor az X pont az AB és CD egyenesek másik félsíkjára kerül.

Rögzítsünk most egy O pontot a síkban és legyen $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ és $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XA} \times \overrightarrow{XB} &= (\mathbf{a}-\mathbf{x}) \times (\mathbf{b}-\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times (\mathbf{a}-\mathbf{b}) + \mathbf{a} \times \mathbf{b},\\ \langle \overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB} \rangle &= \langle \mathbf{a}-\mathbf{x}, \mathbf{b}-\mathbf{x} \rangle = |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}+\mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle,\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XC} \times \overrightarrow{XD} &= (\mathbf{c}-\mathbf{x}) \times (\mathbf{d}-\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times (\mathbf{c}-\mathbf{d}) + \mathbf{c} \times \mathbf{d},\\ \langle \overrightarrow{XC}, \overrightarrow{XD} \rangle &= \langle \mathbf{c}-\mathbf{x}, \mathbf{d}-\mathbf{x} \rangle = |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{c}+\mathbf{d} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle,\end{aligned}$$

amely azonosságokat az (2.1) egyenletünkbe helyezve és azt skalárisan megszorozva az $\mathbf{m}$ normálissal az

$$\begin{aligned}&|\mathbf{x}|^2\langle \mathbf{x}, (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{c}+\mathbf{d} \rangle +\\ &\qquad + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle ((\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{c}+\mathbf{d}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle\\ &= \bar{\varepsilon}(\mathbf{x})(|\mathbf{x}|^2\langle \mathbf{x}, (\mathbf{c}-\mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c}-\mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}+\mathbf{b} \rangle +\\ &\qquad + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{c}-\mathbf{d}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)\end{aligned} \tag{2.3}$$

egyenlethez jutunk, ahol $\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\varepsilon}(\overrightarrow{OX}) := \varepsilon(X)$. Ez máris bizonyítja tételünk első állítását, hiszen elvégezve a szorzásokat, az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$ vektor koordinátái legfeljebb harmadik hatványon fordulnak elő az (2.3) egyenletben.

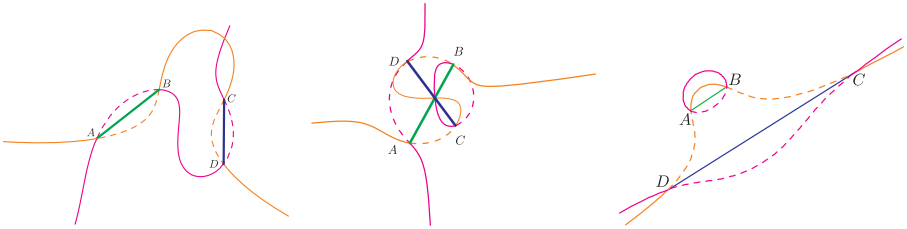
A tétel második állításának bizonyításához csak azt kell észrevennünk, hogy fenti bizonyításunk ugyanúgy elvégezhető, mindössze a kiindulási (2.1) egyenlet jobboldalát annak ellentettjére kell módosítani, mert a kiegészítő szög koszinusza az eredeti szög koszinuszának ellentettje. ■

A (2.3) egyenlet megoldáshalmaza része a két

$$\begin{aligned}&|\mathbf{x}|^2\langle \mathbf{x}, (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{c}+\mathbf{d} \rangle +\\ &\qquad + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle ((\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{c}+\mathbf{d}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle\\ &= \pm(|\mathbf{x}|^2\langle \mathbf{x}, (\mathbf{c}-\mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c}-\mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}+\mathbf{b} \rangle +\\ &\qquad + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{c}-\mathbf{d}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle),\end{aligned} \tag{2.4}$$

egyenletek megoldás-halmazának. A (2.4) egyenletek definiálják az *Apollóniosz-görbéket*[1] nevezzük. Az ugyanazon szakaszpárhoz tartozó Apollóniosz-görbékre azt mondjuk, hogy *egymás párjai*.

[1] Ezekről sok érdekes algebrai és geometriai tulajdonság szerepel a [8] és [9] cikkekben, ahol többször is *tévesen* nevezik őket izoptikusoknak.



Három konfiguráció két-két Apollóniosz-görbéje és egy-egy ekvi- és kompoptikusa (folytonos illetve szaggatott vonalak). A jobbszélső konfiguráció M_0 pontja ideális.

Tekintsük a párhuzamos egyeneseket úgy, mint amelyek egymást az ideális pontjukban metszik. Az (eszerint) esetleg ideális

$$M_0 := AB \cap CD, \quad M_+ := AC \cap BD \quad \text{és} \quad M_- := AD \cap BC$$

pontokat *ekvioptikus pontoknak* nevezzük, mert természetesen az ekvioptikuson vannak. Minthogy az ekvioptikust és a kompoptikust is zárt halmaznak definiáltuk, ugyancsak az ekvioptikuson van az A, B, C, D pontok mindegyike is.

Az A, B, C, D és M_0 pontok mindkét Apollóniosz-görbén rajta vannak, hiszen bármelyikbe helyezve az O pontot, a (2.3) egyenlet konstans tagja eltűnik. Az $M_\pm$ pontok viszont általában pontosan egy-egy különböző Apollóniosz-görbére illeszkednek, mégpedig arra, amelyben szereplő előjel éppen a pont indexe.[2]

Egy Apollóniosz-görbe (2.4) egyenlete akkor és csak degenerálódik alacsonyabb rendűvé, ha a harmadrendű tagja eltűnik, vagyis

$$\langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle = \pm \langle \mathbf{x}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle$$

minden $\mathbf{x}$ vektorra. Ez pontosan akkor következik be, ha $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \pm(\mathbf{c} - \mathbf{d})$, ami azt jelenti, hogy az A, B, C és D pontok paralelogrammát alkotnak, melynek O a középpontja. A degenerálódott egyenletű Apollóniosz-görbéket *elfajultnak* mondjuk. Vegyük észre, hogy egy párnak nem lehet mindkét eleme egyszerre elfajult.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen egy elfajult Apollóniosz-görbe! Előbbiek szerint ekkor az $ABCD$ négyszög egy paralelogramma, így az O pontot ezen paralelogramma egy átlójának felezőpontjába érdemes helyezni. Ekkor $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ és $\mathbf{b} = -\mathbf{d}$, így a (2.4) egyenletek az

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \\
&\qquad + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m}) + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\
&= \pm (|\mathbf{x}|^2 \langle \mathbf{x}, (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle |\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{x}, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \\
&\qquad + \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ((\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{m}) - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle),
\end{aligned}$$

[2] Vegyük észre, hogy az itt megadott előjelek, és így az $M_\pm$ pontok indexelése sem invariáns a szakaszokra, hiszen az előjel a (2.4) egyenletben az A és B pontok cseréje esetén éppen az ellenkezőjére változik.

alakot veszik fel, amiből a két görbe egyenletére

$$(-) \qquad |\mathbf{x}|^2\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{m}\rangle + \langle \mathbf{x},(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{m}\rangle\langle \mathbf{x},\mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle + \langle \mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{m}\rangle\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = 0,$$
$$(+) \quad |\mathbf{x}|^2\langle \mathbf{x},(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{m}\rangle + \langle \mathbf{x},(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{m}\rangle\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle + \langle \mathbf{x},\mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{m}\rangle = 0$$

adódik. Mivel $\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{m}\rangle = \langle \mathbf{a},(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times\mathbf{m}\rangle$, összevonásokkal rendre az

$$\langle |\mathbf{x}|^2\mathbf{a} - \langle \mathbf{x},\mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle\mathbf{x} + \langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\mathbf{a},(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times\mathbf{m}\rangle = 0,$$
$$\langle |\mathbf{x}|^2\mathbf{x} + \langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\mathbf{x} - \langle \mathbf{x},\mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle\mathbf{a},(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{m}\rangle = 0$$

egyenletekhez jutunk. Válasszuk úgy a koordináta-tengelyeket, hogy $\mathbf{b}-\mathbf{a} = (1,0,0)$ és $a_2 \geq 0$ legyen. Ekkor $(b_1,b_2,0) = \mathbf{b} = \mathbf{a} + (1,0,0) = (a_1+1,a_2,0)$ és $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times\mathbf{m} = (0,1,0)$, így előbbi formuláink koordinátás alakja rendre

$$(2.5) \qquad a_2(x_1^2 - x_2^2) - (2a_1+1)x_1x_2 + (a_1^2+a_2^2+a_1)a_2 = 0,$$
$$(2.6) \qquad (x_1^2+x_2^2)x_2 + (a_1^2+a_1-a_2^2)x_2 - (2a_1+1)a_2x_1 = 0.$$

2.2. Tétel. *Egy Apollóniosz-görbe akkor és csak akkor elfajult, ha a szakaszok egy (esetleg elfajuló) paralelogramma szemközti oldalai. Az elfajult Apollóniosz-görbe egy merőleges aszimptotájú hiperbola, mely két merőleges egyenessé fajulhat.*

Bizonyítás. A tétel első állítását már beláttuk, a második igazolásához a másodrendű (2.5) egyenletet kell megvizsgálnunk!

Közismert [4], hogy az ilyenek megoldáshalmaza az elfajuló esetektől eltekintve kúpszelet, melynek típusát az együtthatók mátrixának szignatúrája határozza meg. Ebből adódik, hogy a megoldáshalmaz egy hiperbola, de ennél többet tudunk meg, ha az

$$s = x_1\sqrt{\frac{\sqrt{4a_2^2+(2a_1+1)^2}+(2a_1+1)}{2}} + x_2\sqrt{\frac{\sqrt{4a_2^2+(2a_1+1)^2}-(2a_1+1)}{2}}$$
$$t = x_1\sqrt{\frac{\sqrt{4a_2^2+(2a_1+1)^2}-(2a_1+1)}{2}} - x_2\sqrt{\frac{\sqrt{4a_2^2+(2a_1+1)^2}+(2a_1+1)}{2}}$$

helyettesítést alkalmazva az $-(a_1^2+a_2^2+a_1)a_2 = st$ alakhoz jutunk. Ez az egyenlet azt mutatja, hogy ha $(a_1^2+a_2^2+a_1)a_2 \neq 0$, akkor a hiperbola aszimptotái merőlegesek, ha pedig $(a_1^2+a_2^2+a_1)a_2 = 0$, akkor a hiperbola két merőleges egyenessé fajul. ■

2.3. Megjegyzés. A fenti bizonyítás szerint az elfajult Apollóniosz-görbe pontosan két esetben fajul el két merőleges egyenessé:

(1) $a_2 = 0$: ekkor mindkét szakasz az első koordináta-tengelyen van, és a második tengelyre nézve egymás tükörképei,
(2) $a_2 \neq 0$: ekkor $0 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, vagyis az $ABCD$ paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, és az Apollóniosz-görbét éppen ezen átlók egyenesei alkotják.

Most vizsgáljuk meg az elfajult Apollóniosz-görbe párját!

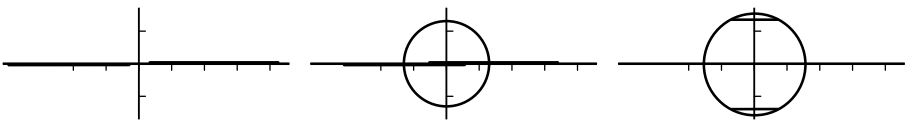
2.4. Tétel. *Elfajult Apollóniosz-görbe $\mathcal{A}$ párja nem elfajuló, és pontosan akkor áll elő alacsonyabb rendű görbék uniójaként, ha*
(a) *a szakaszok paralelogrammája elfajuló, mely esetben*
  (a1) *ha a szakaszok nem metszik egymást, akkor $\mathcal{A}$ a szakaszok egyenese,*
  (a2) *ha pedig a szakaszok metszik egymást, akkor $\mathcal{A}$ a szakaszok egyenesének és a szakaszok paralelogrammájának középpontja körüli valamely körnek az uniója,*

vagy
(b) *a szakaszok paralelogrammája téglalap, mely esetben $\mathcal{A}$ a téglalap köré írt körének és a szakaszokkal párhuzamos középvonalának az uniója.*

Bizonyítás. Az elfajult Apollóniosz-görbe egyenlete megfelelő koordináta-rendszerben (2.5), és ebben a koordináta-rendszerben az $\mathcal{A}$ párjának egyenlete a nem degenerálódott (2.6).

Tegyük először fel, hogy a (2.6) egyenletben $(2a_1+1)a_2 = 0$. Ekkor az $x_2((x_1^2 + x_2^2) - (a_2^2 - a_1^2 - a_1)) = 0$ egyenlethez jutunk.

Ha $a_2 = 0$ és $a_1 \in [-1, 0]$, akkor az első tengely és az origó középpontú $\sqrt{-a_1^2 - a_1}$ sugarú kör a megoldás. Ha $a_2 = 0$ és $a_1 \notin [-1, 0]$, akkor csak az első tengely a megoldás. Ha $(2a_1 + 1)a_2 = 0$ és $a_2 \neq 0$, akkor $a_1 = -1/2$ és így az első tengely és az origó középpontú $\sqrt{a_2^2 - a_1^2 - a_1} = \sqrt{a_2^2 + a_1^2}$ sugarú kör a megoldás.



Most azt tegyük fel, hogy a (2.6) egyenletben $(2a_1 + 1)a_2 \neq 0$.

Válasszunk egy olyan $c > 0$ számot, melyre $d := a_2^2 - a_1^2 - a_1 + c > 0$. A (2.6) egyenletnek minden x_1 esetén legfeljebb három és legalább egy megoldása van. Legyen ezen megoldások legnagyobbika x_2 és tegyük fel, hogy $x_2 > \sqrt{d}$. Mivel az x_2^3 együtthatója pozitív, bármely elegendően kicsi $\varepsilon > 0$ esetén $x_2 > \sqrt{d} + \varepsilon$ és

$$0 > (x_1^2 + (x_2 - \varepsilon)^2 + a_1^2 + a_1 - a_2^2)(x_2 - \varepsilon) - (2a_1 + 1)a_2 x_1$$

teljesül, amiből $x_2 > \varepsilon$ miatt $0 > (x_1^2 + c)(x_2 - \varepsilon) - (2a_1 + 1)a_2x_1$, vagyis $x_2 < \varepsilon + (2a_1 + 1)a_2x_1/(x_1^2 + c)$ következik. Csakhogy ez biztosan nem teljesül ha $|x_1|$ elegendően nagy és $\varepsilon < \sqrt{d}/2$, tehát *elegendően nagy* x_1 *esetén* feltételezésünkkel ellentétben $|x_2| < \sqrt{d}$ *teljesül.*

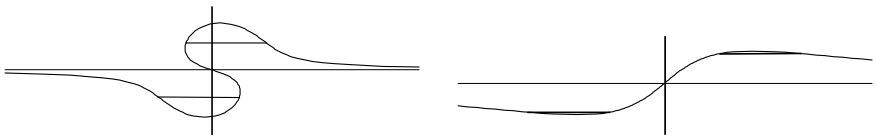
Ugyanezt a gondolatmenetet a legkisebb gyökre alkalmazva, azt kapjuk, hogy *a görbe a második koordinátában korlátos.*

Mivel a (2.6) egyenletben az x_2 korlátos, azonnal látszik, hogy amennyiben $x_1 \to \pm\infty$, az x_2 nagyjából az x_1 reciprokával $(2a_1+1)a_2$-arányosan tart a nullához.

Mivel a legfeljebb másodrendű görbék közül csak az egyenes, a parabola és a hiperbola nem korlátos [4], de ezek közül mindössze az egyenes férhet el egy egyenes sávban, az $\mathcal{A}$ Apollóniosz-görbe csak egyenes lehetne. Ez az egyenes az aszimptoták miatt csakis az első koordináta-tengely lehet, de ez ellentmond annak, hogy az $\mathcal{A}$ Apollóniosz-görbe pontosan csak az origóban metszi az első tengelyt, mert a (2.6) egyenletnek $x_2 = 0$ mellett kizárólag $x_1 = 0$ a megoldása.

Eszerint a $(2a_1 + 1)a_2 \neq 0$ feltétel mellett az $\mathcal{A}$ Apollóniosz-görbe nem tartalmazhat legfeljebb másodrendű görbét, ami tételünket bizonyítja. ■

Az $\mathcal{A}$ Apollóniosz-görbe a második tengelyt az $x_2(x_2^2+a_1^2+a_1-a_2^2) = 0$ egyenlet megoldásaiban metszi, amiből már látható, hogy az Apollóniosz-görbe *nagyjából* a következő ábrán bemutatott két görbe egyikét mintázza az $a_1^2 + a_1 - a_2^2$ előjelétől függően.



Világos, hogy a 2.4. tétel (a) esetében a kör (ha létezik) a kompoptikus része (a második tengellyel vett metszete egyben az ekvioptikusnak is része), míg a (b) esetben, a körnek a téglalap csúcsai által kijelölt négy íve közül csak a középvonalat metszők az ekvioptikus részei (a másik két ív a kompoptikus része).

3. Körívek nem elfajuló Apollóniosz-görbékben

Az elfajuló Apollóniosz-görbéket *nem* eredményező konfigurációknak az előző szakaszban végzetthez hasonló részletességű feltérképezése igen nagy munka lenne, de célunk ebben a cikkben mindössze azon konfigurációk meghatározása, amelyekhez tartozó Apollóniosz-görbék uniója körívet tartalmaz.

3.1. Tétel. *Ha két szakasz nem elfajuló $\mathcal{A}$ Apollóniosz-görbéje tartalmaz egy kört, akkor $\mathcal{A}$ ezen kör és egy egyenes uniója.*

Bizonyítás. Legyen a két szakasz $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$, a kör pedig $\mathcal{C}$. Válasszuk a (2.4) egyenletben az O pontot úgy, hogy az a $\mathcal{C}$ középpontjába essen, és tegyük fel, hogy a „$-$” jelhez tartozó egyenlet adja az $\mathcal{A}$ Apollóniosz-görbét. A „$+$” esetén a bizonyítás analóg módon végezhető, ezért az érdeklődő olvasóra marad.

Legyen $p_{\mathcal{A}}$ a „$-$” jelhez tartozó (2.4) egyenlet nullára rendezésével nyert polinom. Ekkor a $\mathcal{C}$ kör minden $\mathbf{x}$ pontjára $p_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = 0$, amiért a

$$\begin{aligned}
&p_{\mathbf{u}}(\lambda)\\
&:=p_{\mathcal{A}}(\lambda\mathbf{u})\\
&=\lambda^3\langle\mathbf{u},(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{m}\rangle+\lambda^2\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{m}\rangle-\lambda^2\langle\mathbf{u},(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{u},\mathbf{c}+\mathbf{d}\rangle+\\
&\quad+\lambda\langle\mathbf{u},\langle\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle((\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{m})-\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{m}\rangle(\mathbf{c}+\mathbf{d})\rangle+\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle+\\
&\quad+(\lambda^3\langle\mathbf{u},(\mathbf{c}-\mathbf{d})\times\mathbf{m}\rangle+\lambda^2\langle\mathbf{c}\times\mathbf{d},\mathbf{m}\rangle-\lambda^2\langle\mathbf{u},(\mathbf{c}-\mathbf{d})\times\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{u},\mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle+\\
&\qquad+\lambda\langle\mathbf{u},\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle((\mathbf{c}-\mathbf{d})\times\mathbf{m})-\langle\mathbf{c}\times\mathbf{d},\mathbf{m}\rangle(\mathbf{a}+\mathbf{b})\rangle+\langle\mathbf{c}\times\mathbf{d},\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle).
\end{aligned}\tag{3.1}$$

polinomnak gyökei a ±1 számok minden $\mathbf{u}$ egységvektorra. Vezessük be az

$$\begin{aligned}
e&=\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle+\langle\mathbf{c}\times\mathbf{d},\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle,\\
\mathbf{f}&=(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d})\times\mathbf{m},
\end{aligned}\tag{3.2}$$

és az $f = |\mathbf{f}|$ jelöléseket.

A (3.1) polinomra alkalmazva a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket[3], azt látjuk, hogy e polinom harmadik λ_3 gyökére $1\cdot(-1)\cdot(-\lambda_3)\cdot\langle\mathbf{u},\mathbf{f}\rangle = e$ teljesül.

Ha $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a}+\mathbf{c} = \mathbf{b}+\mathbf{d}$, vagyis a szakaszok paralelogrammát alkotnak, így $\mathcal{A}$ párja elfajuló, amiért tételünk állítását a 2.4. tétel igazolja.

Ha $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, akkor $\lambda_3 = e/\langle\mathbf{u},\mathbf{f}\rangle$, amiből

$$p_{\mathbf{u}}(\lambda) = (\lambda^2-1)(\lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{f}\rangle - e) \quad (\text{és így } p_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = (|\mathbf{x}|^2-1)(\langle\mathbf{x},\mathbf{f}\rangle - e) \text{ is})\tag{3.3}$$

következik.

Eszerint az $\mathcal{A}$ Apollóniosz-görbe az origón $\mathbf{u}$ irányba áthaladó egyenest a $\pm\mathbf{u}$ pontokon kívül még pontosan a

$$P_{\mathcal{A}}(\mathbf{u}) := \frac{e}{\langle\mathbf{u},\mathbf{f}\rangle}\mathbf{u}$$

[3] Viète formulák

pontban metszi, kivéve az $(\mathbf{f} \times \mathbf{m})/f$ irányt, melynek egyenesét nem metszi. Minthogy ezen pontokra $\langle P_{\mathcal{A}}(\mathbf{u}), \mathbf{u}_f \rangle f = e$ teljesül, ahol $\mathbf{u}_f = \mathbf{f}/f$, látható, hogy a $P_{\mathcal{A}}$ pontok éppen az $\mathbf{u}_f$ vektorra merőleges, a $P_{\mathcal{A}}(\mathbf{u}_f) = \frac{e}{f}\mathbf{u}_f$ ponton áthaladó egyenesre illeszkednek. Ez bizonyítja a tétel állítását. ■

3.2. Tétel. *Ha két szakasz nem elfajuló Apollóniosz-görbéje egy kör és egy egyenes uniója, akkor az egyenes átmegy a kör középpontján.*

Bizonyítás. Amennyiben a szakaszok paralelogrammát alkotnak, akkor az Apollóniosz-görbe párja elfajuló, így a 2.4. tétel szerint az (1) állítás teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy a szakaszokból alkotott négyszög nem paralelogramma, amiből az is következik, hogy a másik Apollóniosz-görbéjük sem elfajuló.

Legyen a két szakasz $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$, a vizsgálandó nem elfajuló Apollóniosz-görbéjük pedig $\mathcal{A}$, mely a $\mathcal{C}$ kört és az ℓ egyenest tartalmazza.

A következőkben az A, B, C és D pontok elhelyezkedése szerinti esetekre bontva vizsgáljuk a bizonyítandó állítást. Mivel az A, B, C és D pontok mindegyike rajta van az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok mindkét Apollóniusz-görbéjén, három esetet fogunk vizsgálni:

(a) valamelyik szakasz az ℓ egyenesre esik;

(b) valamelyik szakasz végpontjai a $\mathcal{C}$ körre esnek;

(c) mindkét szakasz végpontjainak egyike az ℓ egyenesre, másika a $\mathcal{C}$ körre esik;

Ezek együttesen teljesen lefedik a lehetséges konfigurációkat.

(a) *valamelyik szakasz az ℓ egyenesre esik*:

Ekkor a másik szakasznak is az ℓ egyenesre kell esnie, hiszen az Apollóniusz-görbe minden pontjából ugyanakkora, vagy kiegészítő szög alatt kell látszania, mint az ℓ egyenesre eső szakasznak. Ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög szimmetrikus az ℓ egyenesre, amiért a $\mathcal{C}$ körnek is ilyennek kell lennie.

(b) *valamelyik szakasz végpontjai a $\mathcal{C}$ körre esnek*:

Mondjuk $A, B \in \mathcal{C}$. Ekkor a C és D pontoknak is a $\mathcal{C}$ körre kell esnie, hiszen az Apollóniusz-görbe minden pontjából ugyanakkora, vagy kiegészítő szög alatt kell látszania az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszoknak, és ez a szög a körön konstans, tehát $\mathcal{C}$ a $\overline{CD}$ szakasznak is látóköre.

Ez azt jelenti, hogy $ABCD$ egy olyan húrnégyszög a $\mathcal{C}$ körön, melyben az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok hossza megegyezik.

Ha az $M_0 = AB \cap CD$ pont a $\mathcal{C}$ körön van, akkor az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok egy-egy végpontja egybe esik az M_0 ponttal. Amennyiben $A = C$, akkor $O \in \ell$, mert előbbi 3.1. tételünk (3.2) formulája szerint $e = 0$. Amennyiben $A = D$, akkor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ és (3.2) szerint $\mathbf{f} = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \times \mathbf{m} = |\mathbf{c} - \mathbf{b}|\mathbf{a}$, valamint kicsit több számolással $e = |\mathbf{c} - \mathbf{b}|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Ez azt jelentené, hogy $\ell = BC$, de ez csak akkor

fordulhat elő, ha a (3.3) szerinti $p_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = 0$ egyenletben és a (2.4) képletek $(-)$ előjelű egyenletében a megfelelő első- és másodfokú tagok együtthatói megegyeznek. Csakhogy a másodfokúak együtthatói ugyan megegyeznek, de az elsőfokúak nem, tehát ez az eset nem fordulhat elő.

Ha az $M_0 = O$ a $\mathcal{C}$ kör középpontja, akkor előbbi 3.1. tételünk (3.2) formulája szerint $e = 0$, vagyis az ℓ egyenes átmegy az O ponton.

Ha $M_0 \notin \mathcal{C} \cup \{O\}$, akkor a konfiguráció szimmetrikus az OM_0 egyenesre, ezért vagy $\ell = OM_0$, ami igazolja tételünk állítását, vagy $\ell \perp OM_0$, amit a továbbiakban feltételezünk. Ugyanakkor $M_0 \notin \mathcal{C}$ miatt $M_0 \in \ell$ is következik, tehát $M_0 \in \ell \perp OM_0$. Tekintettel a konfiguráció OM_0 egyenesre való szimmetriájára, ekkor az M_0 pont kis környezetében az ℓ egyenes pontjaiban csakis úgy teljesülhet az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok látószögeinek azonossága vagy egymás kiegészítése, ha az AB és CD egyenes is merőleges az ℓ egyenesre. Minthogy ez ellentmond a szakaszok különbözőségének, ez az eset nem fordulhat elő, ami teljessé teszi a tétel állításának igazolását a (b) esetben.

(c) *mindkét szakasz végpontjainak egyike az ℓ egyenesre másika a $\mathcal{C}$ körre esik*: Előbbi 3.1. tételünkből tudjuk, hogy az $\mathbf{f} = (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m}$ vektor merőleges az ℓ egyenesre, így az

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{f} \rangle &= \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, (\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times \mathbf{m} \rangle \\ &= \langle (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{d}), \mathbf{m} \rangle = -\langle \mathbf{c} - \mathbf{d}, \mathbf{f} \rangle \end{aligned} \tag{3.4}$$

egyenlőség igazolja, hogy a szakaszok merőleges vetületei az ℓ egyenesre ortogonális irányba azonos hosszúságúak.

A szakaszoknak nem az egyenesre eső végpontjait összekötő egyenes merőleges az ℓ egyenesre, mert mindkét ilyen végpont ℓ egyenesre eső merőleges vetületi pontjából mindkét szakasznak derékszög alatt kell látszania.

Két utóbbi megfigyelésünkből következik, hogy a szakaszoknak azon végpontjai, melyek nem az egyenesre esnek, vagy egymásnak az egyenesre vett tükörképei, vagy egybe esnek.

Ha az A és C pontok vannak az ℓ egyenesen, akkor (3.4) egyenletből nyert $\langle \mathbf{a}+\mathbf{c}, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{b}+\mathbf{d}, \mathbf{f} \rangle$ egyenlőség szerint a B és D pontok az ℓ egyenesnek különböző oldalán vannak és az iménti megfigyelésünk miatt a $\overline{BD}$ szakasz merőlegesen metszi az ℓ egyenest. Tehát az ℓ egyenes a $\mathcal{C}$ kör $\overline{BD}$ húrjának szakaszfelező merőlegese, ami igazolja a tétel állítását.

Ha az A és D pontok vannak az ℓ egyenesen, akkor a (3.4) egyenletből nyert $\langle \mathbf{a}-\mathbf{d}, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{b}-\mathbf{c}, \mathbf{f} \rangle$ egyenlőség szerint a B és C pontok az ℓ egyenesnek ugyanazon oldalán vannak, így a vetületeik egybeesése miatt $B = C$. Ha a CD egyenes a C és D pontoktól különböző $C' \in CD \cap \mathcal{C}$ pontban is metszi a $\mathcal{C}$ kört, akkor az $\overline{AB}$ szakasz

nulla vagy 180° fok alatt látszódik a C' pontból is, vagy $C' \in \{A, B\}$. Mivel $B = C$, előbbi esetből a két szakasz egybeesése következik, ami kizárt, tehát $C' \in \{A, B\}$. Minthogy $C' \notin \{C, D\}$ és $B = C$, ebből $C' = A$ adódik, és ez visszavezet a (b) pontban már vizsgált esethez. Tehát a $CD \cap \mathcal{C} \subseteq \{C, D\}$ és ugyanezzel az indoklással $AB \cap \mathcal{C} \subseteq \{A, B\}$. Ha az AB és a CD egyenes is a $\mathcal{C}$ érintője, akkor az $AB = CD$ ellentmondásra jutunk. Ha az AB egyenes a $\mathcal{C}$ érintője, a $\overline{CD}$ szakasz viszont a $\mathcal{C}$ húrja, vagy fordítva, akkor is ellentmondásra jutunk, hiszen a húrt alkotó szakasz látószöge a $\mathcal{C}$ körön állandó, a másik szakasz látószöge viszont nem állandó, így nem lehetnek egyformák. Ha az $\overline{AB}$ és a $\overline{CD}$ szakasz is a $\mathcal{C}$ húrja, akkor ismét visszajutottunk a (b) pontban már vizsgált esethez.

Ezzel a tétel állítását teljesen igazoltuk. ■

3.3. Tétel *Két szakasz nem elfajuló Apollóniosz-görbéje akkor és csak akkor egy kör és egy egyenes uniója, ha a szakaszok*

(1) *egymás tükörképei az egyenesre nézve, vagy*

(2) *az egyenesre szimmetrikus valamely deltoid szemközti oldalai, vagy*

(3) *az egyenesre esnek bizonyos helyzetek egyikében.*

Bizonyítás. Amennyiben a szakaszok paralelogrammát alkotnak, akkor az Apollóniosz-görbe párja elfajuló, így a 2.4. tétel szerint mostani állításunk (1) vagy (3) konfigurációi fordulhatnak elő. Előbbi konfiguráció konkrétan szerepel a 2.4. tételben, utóbbi részletes kalkulációját itt fogjuk megadni.

Legyen a két szakasz $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$, a vizsgálandó nem elfajuló Apollóniosz-görbéjük pedig $\mathcal{A}$, mely a $\mathcal{C}$ kört és az előbbi 3.2. tételünk szerint annak középpontján áthaladó ℓ egyenest tartalmazza. Ahogy eddig, most is a $\mathcal{C}$ kör középpontjába helyezzük az O pontot, de most rögzítsük azt a koordináta-rendszert is, melynek origója O és első ("x"-)tengelye az ℓ egyenes.

Tudjuk, hogy a szakaszok végpontjai az $\mathcal{A}$ Apollóniosz-görbén vannak. Az ezek elhelyezkedései szerinti eseteket külön-külön vizsgáljuk:

(a) valamelyik szakasz az ℓ egyenesre esik;

(b) valamelyik szakasz a $\mathcal{C}$ körre esik;

(c) mindkét szakasz végpontjainak egyike az ℓ egyenesre másika a $\mathcal{C}$ körre esik.

Ahol szükséges, ott tovább bontjuk az eset vizsgálatát aszerint, hogy az ekvioptikus $M_0 = AB \cap CD$ pont az $\mathcal{A}$ Apollóniosz-görbe mely részére esik.

(a) *valamelyik szakasz az ℓ egyenesre esik*:

Ekkor a másik szakasznak is az ℓ egyenesre kell esnie, vagyis $A, B, C, D \in \ell$. Minthogy ekkor az A, B, C, D pontba mutató helyvektorok az $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ egységvektor

valós számmal vett többszörösei, legyenek az a, b, c és d valós számok olyanok, hogy $\mathbf{a} = a\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = b\mathbf{v}$, $\mathbf{c} = c\mathbf{v}$ és $\mathbf{d} = d\mathbf{v}$. Ezekkel a (2.4) egyenlet az

$$\begin{aligned}(a-b)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\times\mathbf{m}\rangle(|\mathbf{x}|^2 - (c+d)\langle \mathbf{x},\mathbf{v}\rangle + cd)\\ = \pm(c-d)\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\times\mathbf{m}\rangle(|\mathbf{x}|^2 - (a+b)\langle \mathbf{x},\mathbf{v}\rangle + ab)\end{aligned}$$

formát ölti. Ebből világos, hogy mindkét Apollóniosz-görbének része az ℓ egyenes. Ha egy Apollóniosz-görbe valamely X pontja nincs az ℓ egyenesen, akkor az

$$\begin{aligned}0 &= (a-b-(c-d))|\mathbf{x}|^2 - 2(da-bc)\langle \mathbf{x},\mathbf{v}\rangle + (a-b)cd - (c-d)ab\\ 0 &= (a-b+(c-d))|\mathbf{x}|^2 - 2(ac-db)\langle \mathbf{x},\mathbf{v}\rangle + (a-b)cd + (c-d)ab\end{aligned}$$

egyenletek egyikét teljesíti.

Ha a szakaszok hosszai megegyeznek, mondjuk $a-b = c-d$, akkor az egyik, jelen feltételezésünk szerint az első Apollóniosz-görbe elfajul. Ennek egyenlete emiatt $2(a-c)\langle \mathbf{x},\mathbf{v}\rangle = ab - cd$ alakúvá válik, ami a szakaszok különbözősége esetén a második koordináta-tengellyel párhuzamos $x_1 = \frac{(ab-cd)}{2(a-c)}$ egyenletű egyenest adja. A második Apollóniosz-görbe egyenlete $0 = (a-b)(|\mathbf{x}|^2 - (c+b)\langle \mathbf{x},\mathbf{v}\rangle + \frac{cd+ab}{2})$ alakúvá válik, ami nem nulla hosszúságú szakaszok esetén a

$$0 = \Big(x_1 - \frac{c+b}{2}\Big)^2 + x_2^2 + \frac{cd+ab}{2} - \Big(\frac{c+b}{2}\Big)^2$$

egyenletű kört adja. Ez akkor és csak akkor esik egybe a $\mathcal{C}$ körrel, ha $c+b=0$ és $-2 = cd+ab = c(d-a) = 2cd$. Eszerint a két azonos hosszúságú szakasz egymás tükörképe az origóra, és az origó úgy osztja őket két részre, hogy a részek hosszainak szorzata a kör sugara, vagyis 1[4].

Ha a szakaszok hosszai nem egyeznek meg, akkor mindkét Apollóniosz-görbe kört tartalmaz az ℓ egyenesen kívül, melyek egyenlete

$$\begin{aligned}0 &= x_2^2 + \Big(x_1 - \frac{da-bc}{h}\Big)^2 + \frac{(a-b)cd-(c-d)ab}{h} - \Big(\frac{da-bc}{h}\Big)^2,\\ 0 &= x_2^2 + \Big(x_1 - \frac{ac-db}{k}\Big)^2 + \frac{(a-b)cd+(c-d)ab}{k} - \Big(\frac{ac-db}{k}\Big)^2,\end{aligned}$$

ahol $h = a-b-(c-d)$ és $k = a-b+(c-d)$. Ezek akkor és csak akkor esnek egybe a $\mathcal{C}$ körrel, ha rendre $da-bc=0$ és $-h = (a-b)cd-(c-d)ab = ad(c+b)-bc(d+a) = bc(c+b-(d+a)) = -hbc$, vagyis $ad = bc = 1$, illetve $ac = bd = 1$. Ezek a feltételek egyszerre csak nulla hosszúságú szakaszok esetén teljesülhetnek, de ezt az esetet kizártuk.

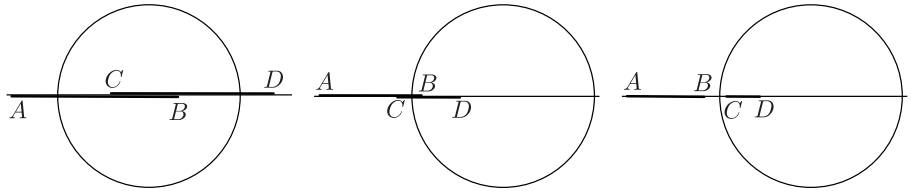
[4] Ez a számítás felfogható a 2.4. tétel (a2) esete részletesebb meghatározásaként

Összefoglalva a találtakat, az ℓ egyenesre illeszkedő szakaszoknak az egyik Apollóniosz-görbéje pontosan akkor tartalmazza a $\mathcal{C}$ egységkört, ha

(a.1) azonos hosszúságúak és $ab = cd = -1$, vagy

(a.2) különböző hosszúságúak és $ad = bc = 1$ vagy $ac = bd = 1$.

Utóbbi esetben a másik Apollóniosz-görbe is az ℓ egyenest, de egy másik kört tartalmaz. ($\Rightarrow$(3))



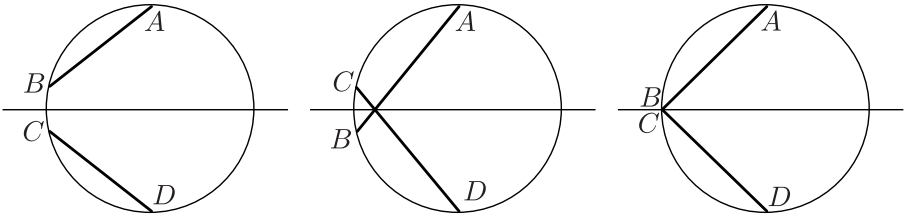
(b) *valamelyik szakasz a $\mathcal{C}$ körre esik*:

Mondjuk $A, B \in \mathcal{C}$. Ekkor a C és D pontoknak is a $\mathcal{C}$ körre kell esnie, hiszen az Apollóniusz-görbe minden pontjából ugyanakkora, vagy kiegészítő szög alatt kell látszania az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszoknak, és ez a szög a kör ívein konstans, tehát $\mathcal{C}$ a $\overline{CD}$ szakasznak látóköre, és a két szakasz a középpontból egyenlő szögek alatt látszik.

Előbbi, 3.2. tételünkből tudjuk, hogy a szakaszoknak a második koordináta-tengelyre vett vetületei azonos hosszúságúak. Mivel hosszuk is egyforma, szakaszainknak az első koordináta-tengelyre vett vetületei is azonos hosszúságúak, tehát egymás tükörképei vagy az ℓ egyenesre (első koordináta-tengely), vagy a $\mathcal{C} \cap \ell$ szakaszfelező $\ell^{\perp}$ merőlegesére (második koordináta-tengely), vagy a $\mathcal{C}$ kör O középpontjára.

Ha az M_0 egy ideális pont, akkor a szakaszok egymás tükörképei az O pontra. Ha $(AB \cap \ell) \notin \{A, B\}$, akkor a $P := AB \cap \ell$ pontban a $\overline{CD}$ szakasz látószöge $0°$ vagy $180°$, amiért $P \in CD$, amiből az AB és CD egyenesek párhuzamossága miatt $AB = CD$ és így az $\overline{AB} = \overline{CD}$ ellentmondás adódik. Tehát $P \in \{A, B\}$ és $Q := (CD \cap \ell) \in \{C, D\}$, és akkor a $\overline{PQ}$ szakasz a $\mathcal{C}$ kör átmérője. Mondjuk $P = B$ és és $Q = C$. Ekkor az A és D pontok ℓ egyenesre eső merőlege vetületei egybe kell essenek, ezért a $\overline{BD}$ szakasznak ℓ a felezőmerőlegese. Eszerint $ABCD$ egy négyzet, így a 2.4. tétel bizonyítja, hogy az ℓ egyenes és a $\mathcal{C}$ kör nem tartozik a szakaszaink ugyanazon Apollóniusz-görbéjéhez, vagyis ez az eset nem fordulhat elő.

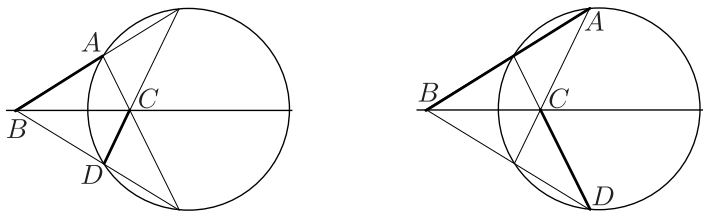
Ha $M_0 \in \ell$, akkor a szakaszok egymás tükörképei az ℓ egyenesre.



Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor ℓ és $\mathcal{C}$ valóban egy Appollóniosz-görbét alkot, ami a korábban már említett elfajuló esettel együtt teljesen bizonyítja tételünk állításának (1) konfigurációban leírt esetét. ($\Rightarrow$(1))

Ha $M_0 \notin \ell$, akkor M_0 a $\mathcal{C}$ körön van, így a két szakasz egy-egy végpontjával esik egybe. Mondjuk $M_0 = B = C$. Ha $(AB \cap \ell) \notin \overline{AB}$, akkor az $AB \cap \ell$ pontban a $\overline{CD}$ szakasz látószöge $0°$ vagy $180°$, amiért $(AB \cap \ell) \in CD$, és így a CD és AB egyenesek két pontban is metszik egymást, vagyis egybeesnek. Ez ellentmond a szakaszok különbözőségének, tehát $(AB \cap \ell) \in \overline{AB}$ és $(CD \cap \ell) \in \overline{CD}$, vagyis $\{A, D\} = \mathcal{C} \cap \ell$. Előbbi 3.2. tétel (b) pontja első esetének bizonyításából tudjuk, hogy ebben a konfigurációban az ℓ egyenes és a $\mathcal{C}$ kör nem ugyanazon Apollóniosz-görbéhez tartozik, tehát ez az eset nem fordulhat elő.

(c) *mindkét szakasz végpontjainak egyike az ℓ egyenesre másika a $\mathcal{C}$ körre esik*: Előbbi 3.2. tételünk szerint ekkor a szakaszok az ℓ egyesre szimmetrikus deltoid szemközti oldalai. Ebből következik, hogy az $M_0 = AB \cap CD$ pont nem lehet az ℓ egyenesen, így a $\mathcal{C}$ körön van. Ugyanakkor az ekvioptikus $M_+ = AC \cap BD$ pont az M_0 tükörképe az ℓ egyenesre, tehát M_+ is a $\mathcal{C}$ körre esik.



Tegyük fel először, hogy M_0 nincs az $\overline{AB}$ szakaszon. Ekkor az M_0, A, D és M_+ pontok négy ívre bontják a $\mathcal{C}$ kört, melyek felváltva az ekvioptikus illetve a kompoptikus részei. Ennek bizonyítása minden íven hasonlóan történik, ezért itt most csak arról az $\widehat{M_+M_0}$ körívről mutatjuk meg, hogy az ekvioptikus része, amelynek nem pontja se A se D.

Legyen $\mathcal{C} \cap \ell = \{S, T\}$, ahol S a B ponthoz közelebbi metszéspont. Az M_0S egyenes felezi a $BM_0C\angle$ szöget, mert az S pont felezi az $\widehat{AD}$ ívet. Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{C}$ kör a $\overline{BC}$ szakasz Apollóniosz-köre. Emiatt tetszőleges $P \in \widehat{M_0M_+}$ pontra $BPS\angle = SPC\angle$, másrészt $APS\angle = SPD\angle$, hiszen az S pont felezi az $\widehat{AD}$ ívet.

Eszerint

$$APB\angle = APS\angle - BPS\angle = SPD\angle - SPC\angle = CPD\angle,$$

ami igazolja, hogy az $\widehat{M_0M_-}$ körív az ekvioptikus része.

Ha $M_0 \in \overline{AB}$, akkor a bizonyítás a fentiekkel analóg módon végezhető. ($\Rightarrow$(2))

A bizonyítást ezzel befejeztük. ■

A bizonyítás (a.1) és (a.2) eredményének fényében felvetődik a kérdés, hogy egy ℓ egyenesen lévő h és k hosszúságú szakaszok milyen elhelyezkedése mellett van olyan kör, melyről a szakaszok azonos vagy kiegészítő szög alatt látszanak. A válasz megkeresése ezúttal az érdeklődő olvasóra marad azzal az utalással, hogy az O pont jó megválasztása alapvetően könnyíti meg a munkát.

A szakaszok ekvioptikusainak vizsgálatát, a kúpszeletek ekvioptikusainak vizsgálata követheti, amely irányba tett lépésekről Odehnal [6] és [7] cikkében lehet tájékozódni.

Végül megemlítjük, hogy tételeink lehetővé teszik a [2] cikkben közölt eredmények analízis nélküli bizonyítását, sőt azok jelentős általánosítását is [5].

Hivatkozások

[1] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[2] Kincses J., Kurusa Á., Felismerhető-e egy alakzat az árnyékképeiből?, *Polygon*, 2(1991), 69–80.

[3] Kurusa Á., Kúpszeletek izoptikusai, *Polygon*, 19:2(2011), 27–46.

[4] Kurusa Á., *Euklidészi geometria*, Polygon, Szeged, 2008.

[5] Kurusa Á., Visual distinguishability of polygons, *Beiträge zur Alg. und Geom.*, (2012), DOI: 10.1007/s13366-012-0121-7.

[6] B. Odenhal, Equioptic curves of conic sections, *J. Geom. Graphics*, 14:1(2010), 29–43.

[7] B. Odenhal, Equioptic points of a triangle, *14th International Conference on Geometry and Graphics*, International Society for Geometry and Graphics, Kyoto, 2010.

[8] P. Pamfilos, A. Thoma, Apollonian cubics: An application of group theory to a problem in Euclidean geometry, *Mathematics Magazine*, 72(1999), 356–366.

[9] P. Pamfilos, *Theory of Isoptic cubics*, Help in Isoptikon software, http://www.math.uoc.gr/∼pamfilos/#iso címen, 1998.

Kurusa Árpád, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1., kurusa@math.u-szeged.hu