

Egy szám számjegyeinek számáról és összegéről

SÁNDOR JÓZSEF

1. Az n természetes szám tízes számrendszerbeli alakja a következő:

$$n = \overline{a_k \dots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

ahol $0 < a_k \leq 9$, $0 \leq a_i \leq 9$ ha $0 \leq i \leq k-1$. Vezessük be az

$$s(n) = a_k + \dots + a_1 + a_0$$

és

$$v(n) = k + 1$$

jelöléseket, azaz $v(n)$ az n szám számjegyeinek számát jelenteni, míg $s(n)$ az n számjegyeinek az összegét.

Ha 10 helyett q alapú számrendszert tekintünk ($q \geq 2$), akkor az

$$n = a_k \cdot q^k + \dots + a_1 \cdot q + a_0$$

felírással minden megismételhető (és a továbbiakban következő vizsgálat is könnyen elvégezhető q alapú számrendszerek esetén. Pld. a sokat szereplő 9-es szám helyett $q-1$ -gyel).

Mivel $10^k \leq n < 10^{k+1}$, logaritmálással $k \log 10 \leq \log n < (k+1) \log 10$ (ahol $\log n$ a természetes logaritmust jelöli). Tehát

$$k \leq \frac{\log n}{\log 10} < k+1,$$

ahonnan a

$$(1) \quad k+1 = 1 + \left[\frac{\log n}{\log 10} \right] = v(n)$$

képletet nyerjük. (Itt $[x]$ jelöli az x szám egész részét.)

Legyen most $p \geq 0$ természetes szám. Mivel

$$(2) \quad \frac{n}{10^p} = \sum_{j=0}^{p-1} a_j \cdot 10^{j-p} + \sum_{j=p}^k a_j \cdot 10^{j-p}$$

és $p \geq 1$ esetén a (2)-beli első összeg

$$\begin{aligned} &\leq 9 \cdot (10^{-p} + 10^{-p+1} + \dots + 10^{-1}) = \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{p-1}}\right) = \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^p}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^p} < 1, \end{aligned}$$

úgy, mivel a (2) második tagja egész szám, (2)-ből

$$(3) \quad \left[\frac{n}{10^p} \right] = \sum_{j=p}^k a_j \cdot 10^{j-p}.$$

Megjegyezzük, hogy (3) a $p = 0$ esetén nyilvánvalóan igaz. A (3) képlet alapján

$$(4) \quad 10 \cdot \left[\frac{n}{10^{p+1}} \right] = \sum_{j=p+1}^k a_j \cdot 10^{j-p},$$

és így (3) és (4)-ből

$$(5) \quad a_j = \left[\frac{n}{10^j} \right] - 10 \cdot \left[\frac{n}{10^{j+1}} \right].$$

Tehát

$$\begin{aligned} s(n) &= a_0 + a_1 + \dots + a_k = \\ &= n - 10 \left[\frac{n}{10} \right] + \left[\frac{n}{10} \right] - 10 \left[\frac{n}{10^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{10^k} \right] - 10 \left[\frac{n}{10^{k+1}} \right] = \\ &= n - 9 \left[\frac{n}{10} \right] - 9 \left[\frac{n}{10^2} \right] - \dots - 9 \left[\frac{n}{10^k} \right], \end{aligned}$$

mivel $\left[\frac{n}{10^{k+1}} \right] = 0$ (ugyanis $n < 10^{k+1}$). Innen nyerjük az

$$(6) \quad s(n) = n - 9 \cdot \sum_{j=1}^k \left[\frac{n}{10^j} \right]$$

képletet, ahol $k = v(n) - 1$.

Sajátosan, (6)-ból visszkapjuk a jólismert

$$(7) \quad n - s(n) \equiv 9 \pmod{n}$$

kongruenciát, melyet sokat alkalmaznak a számok oszthatósági vizsgálatainál is. (pld. a „9-es próbánál”). Egy alkalmazást a páros tökéletes számoknál is mutattunk (lásd [2]).

2. Ha az (x_n) és (y_n) valós számsorozatokra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, jelöljük ezt

$$x_n \sim y_n \quad (n \rightarrow \infty)\text{-nel.}$$

Mivel (1) alapján

$$\frac{\log n}{\log 10} < v(n) \leq 1 + \frac{\log n}{\log 10},$$

azonnal látható, hogy

1. Tétel.

$$(8) \quad v(n) \sim \frac{\log n}{\log 10} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Másfelől a $v(n)$ sorozat középértéke is könnyen vizsgálható, hiszen az előbbi egyenlőtlenségekből

$$\sum_{n=1}^m \frac{\log n}{\log 10} < \sum_{n=1}^m v(n) \leq m + \sum_{n=1}^m \frac{\log n}{\log 10}.$$

Azonban $\sum_{n=1}^m \log n = \log m! \sim m \log m$ ($m \rightarrow \infty$) ismert összefüggés alapján, ezért

$$\frac{\log m!}{\log 10} < \sum_{n=1}^m v(n) \leq m + \frac{\log m!}{\log 10}$$

felhasználásával, mivel $\frac{m}{m \log m} \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), írhatjuk, hogy:

2. Tétel.

$$(9) \quad \sum_{n=1}^m v(n) \sim \frac{m \log m}{\log 10} \quad (m \rightarrow \infty).$$

3. Az (s_n) sorozatra már nehezebben írhatók fel hasonló eredmények.

Először is vegyük észre, hogy $s(n) \geq 1$ és $s(n) = 1$ ha $n = 10^k$ alakú szám. Másfelől, mivel $s(n) \leq 9(k+1) = 9v(n)$, úgy

$$(10) \quad s(n) \leq 9 \left(1 + \left\lceil \frac{\log n}{\log 10} \right\rceil \right)$$

(lásd (1) képletet). Azonban az $n = 10^q - 1$ választással $s(n) = 9q$, ahol $q = \frac{\log(n+1)}{\log 10}$, tehát

$$(11) \quad s(n) = 9 \cdot \frac{\log(n+1)}{\log 10} \sim \frac{9 \log n}{\log 10} \quad (n \rightarrow \infty).$$

A fentiek figyelembevételével az alábbiakat állíthatjuk:

3. Tétel.

$$(12) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} s(n) = 1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} s(n) = +\infty,$$

$$(13) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n)}{\log n} = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n)}{\log n} = \frac{9}{\log 10}.$$

Itt (12) majdnem nyilvánvaló, (13) baloldala következik (12) baloldalából; míg (13) jobboldala (10) és (11) következménye.

1. Megjegyzés. (10)-ből sajátosan az is következik, hogy

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n)}{n} = 0.$$

Az $(s(n))$ középvértékének (1)-hez hasonló felírásához kissé más megközelítést kell választanunk.

$\sum_{n=1}^m s(n)$ úgy is felfogható, hogy először összeadjuk 0-tól m -ig az összes szám utolsó számjegyeit (legyen ezek összege s_0), utána az összes szám utolsó előtti számjegyeit (legyen ez az összeg s_1), ..., a jobbról i . helyen levő számjegyeket (legyen ez az összeg s_i), ..., egész a legelső számjegyig (legyen ez az összeg s_{k+1}).

Az s_0 megvizsgálása érdekében írjuk a számokat 10-es blokkokba a következőképpen:

$$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ 9 \mid 10 \ 11 \ 12 \ \dots \ 19 \mid 20 \ 21 \ 22 \ \dots \ 29 \mid \dots \mid 80 \ 81 \ 82 \ \dots \ 89 \mid 90 \ \dots$$

Az utolsó számjegyek összeadásánál $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2}$ szerepel és annyiszor, ahány ilyen csoport található m -ig. Ismert, hogy $\left[\frac{m}{10}\right]$ darab szám van m -ig, amelyek oszthatók 10-zel, és az utolsó éppen $10 \cdot \left[\frac{m}{10}\right] \leq m$.

Így

$$(15) \quad s_0 \geq \left[\frac{m}{10}\right] \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} \text{ és } s_0 < \left(\left[\frac{m}{10}\right] + 1\right) \cdot \frac{9 \cdot 10}{2},$$

ahol egyenlőség akkor van, ha m éppen 10 többszöröse (pld. $m = 90$). Például ha $m = 87$, akkor $\left[\frac{m}{10}\right] = 8$ és az utolsó, be nem fejezett blokk a $|80 \ 81 \ 82 \ \dots \ 89|$, míg az előtte valót meghaladtuk.

s_1 vizsgálatánál már 100-as csoportokat alakítunk ki:

$$\underbrace{00 \ 01 \ 02 \ \dots \ 09}_{\dots} \underbrace{10 \ 11 \ \dots \ 19}_{\dots} \underbrace{90 \ 91 \ \dots \ 99}_{\dots} \mid \underbrace{100 \ 101 \ \dots \ 109}_{\dots} \dots \\ \dots \underbrace{190 \ 191 \ \dots \ 199}_{\dots} \mid \underbrace{200 \ 201 \ \dots \ 209}_{\dots} \underbrace{290 \ 291 \ \dots \ 299}_{\dots} \mid \dots$$

Minden 100-as csoportban a (jobbról) második számjegyek összege

$$10 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 10 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = \frac{10^2 \cdot 9}{2}.$$

Mivel $\left[\frac{m}{100}\right]$ a 100-zal osztható számok száma m -ig, (15)-höz hasonlóan

$$(16) \quad s_1 \geq \left[\frac{m}{100}\right] \cdot \frac{9 \cdot 10^2}{2}, \quad s_1 < \left(\left[\frac{m}{100}\right] + 1\right) \cdot \frac{9 \cdot 10^2}{2}.$$

Hasonló módon folytatva, 10^i -es csoportokat alakítva ki,

$$(17) \quad s_i \geq \left\lfloor \frac{m}{10^{i+1}} \right\rfloor \cdot \frac{9 \cdot 10^{i+1}}{2}, \quad s_i < \left(\left\lfloor \frac{m}{10^{i+1}} \right\rfloor + 1 \right) \cdot \frac{9 \cdot 10^{i+1}}{2}.$$

Mivel $S = \sum_{n=1}^m s(n) = \sum_{i=0}^{k+1} s_i$, ahol $10^k \leq m < 10^{k+1}$, (17) alapján

$$(18) \quad S > \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{k+1} (m - 10^{i+1}) \quad \text{és} \quad S < \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{k+1} (m + 10^{i+1})$$

Mivel

$$\sum_{i=0}^{k+1} 10^{i+1} = \frac{10 \cdot (10^{k+1} - 1)}{9} < \frac{10^{k+2}}{9} \quad \text{és} \quad 10^k \leq m,$$

úgy (18) alapján

$$S > \frac{9m}{2}(k+2) - \frac{10^{k+2}}{2} > \frac{9m}{2}(k+2) - 50m = \frac{9km}{2} - 41m$$

és

$$S < \frac{9m}{2}(k+2) + \frac{10^{k+2}}{2} < \frac{9m}{2}(k+2) + 50m = \frac{9km}{2} + 59m.$$

Azonban

$$k \leq \frac{\log m}{\log 10} \quad \text{és} \quad k \geq \frac{\log m}{\log 10} - 1,$$

úgyhogy (18) alapján

$$(19) \quad \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{9 \log m}{\log 10} - 41 \right) < S < \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{9 \log m}{\log 10} + 59 \right).$$

Innen már könnyen adódik a végeredmény:

4. Tétel.

$$(20) \quad \sum_{n=1}^m s(n) \sim \frac{9}{2 \log 10} \cdot m \log m \quad (m \rightarrow \infty)$$

2. Megjegyzés. Ha $s_q(n)$ jelöli a q -alapú számrendszerben az n szám számjegyeinek összegét, hasonló megfontolásokkal nyerjük a

$$(21) \quad \sum_{n=1}^m s_q(n) \sim \frac{q-1}{2 \log q} \cdot m \log m \quad (m \rightarrow \infty)$$

eredményt. A (21)-hez hasonló (pld. maradék-tagos) bonyolultabb eredményeket megtalálhatjuk például [1]-ben, ahol $s(n)$ és $s_q(n)$ kapcsolata sok más kérdéskörrel meg van vizsgálva.

Hivatkozások

- [1] Sándor József, Borislav Crstici, *Handbook of number theory*, Springer Verlag, 2006.
- [2] Sándor József, Páros tökéletes számok oszthatósági tulajdonságai, *Matlap* 4/2010, 124–126.

Dr. Sándor József, egyetemi docens, Kolozsvár
jjssandor@hotmail.com