

Négyzetszámok számtani sorozatai

MAKAY GÉZA

Kérdés. *Van-e három olyan négyzetszám, amelyek számtani sorozatot alkotnak? (Természetesen a triviális megoldásokat (n^2, n^2, n^2) nem vesszük most figyelembe.)*

A kérdésre viszonylag egyszerű válaszolni: rövid próbálkozással megtalálhatjuk az $1^2, 5^2, 7^2$ számokat, amelyek számtani sorozatot alkotnak. Persze ha találunk egy nemtriviális megoldást, akkor végtelen sokat is találtunk, hiszen a "jó" négyzetszám-hármasok négyzetszámszorosai (mondjuk k^2 -szeresei) is számtani sorozatot fognak alkotni. És fordítva is igaz: könnyen belátható, hogy ha a három szám közül kettő osztható k^2 -el, akkor a harmadiknak is oszthatónak kell lennie k^2 -el.

Ne álljunk meg itt. Kérdezzük meg magunktól, hány nemtriviális négyzetszám-hármas van, amelyek (páronkénti) legnagyobb közös osztója 1 és számtani sorozatot alkotnak. Ehhez jó lenne sokkal több példa (már ha van egyáltalán még példa, természetesen). Ez tipikusan egy számítógépnek való feladat: az gyorsan végig tud vizsgálni akár több millió számot, és kikeresni a megfelelő számhármasokat. Egy ilyen programmal találhatjuk meg például a következő megoldásokat (a négyzetre-emelést nem írjuk ki):

(1, 5, 7)	(1, 29, 41)	(1, 169, 239)	(1, 985, 1393)
(7, 13, 17)	(7, 17, 23)	(7, 73, 103)	(7, 97, 137)
(17, 25, 31)	(17, 53, 73)	(17, 137, 193)	(17, 305, 431)
(23, 37, 47)	(23, 65, 89)	(23, 205, 289)	(23, 373, 527)
(31, 41, 49)	(31, 109, 151)	(31, 221, 311)	(31, 629, 889)
(41, 85, 113)	(41, 89, 119)	(41, 481, 679)	(41, 505, 713)
(47, 65, 79)	(47, 157, 217)	(47, 353, 497)	(47, 905, 1279)
(49, 61, 71)	(49, 185, 257)	(49, 325, 457)	(49, 1069, 1511)

Szemmel láthatóan elég sok megoldás van. Vajon végtelen sok-e? Úgy tűnik, hogy már az olyan négyzetszám-hármasokból is nagyon sok van, amelyeknek első eleme az 1. Nézzük meg ezeket külön is a program segítségével, számoljunk ki ezekből annyit, amennyit tudunk:

(1, 5, 7)	(1, 29, 41)	(1, 169, 239)
(1, 985, 1393)	(1, 5741, 8119)	(1, 33461, 47321)
(1, 195025, 275807)	(1, 1136689, 1607521)	(1, 6625109, 9369319)
(1, 38613965, 54608393)	(1, 225058681, 318281039)	(1, 1311738121, 1855077841)

Próbáljunk meg ebben valami szabályosságot találni. Nézzük akár a második, akár a harmadik számát a számhármasoknak. Elég feltűnő szabályosság, hogy a számok mindig kb. 6-szorosukra nőnek. Ha pontosabban kiszámoljuk (kiszámoltatjuk

a számítógéppel), akkor ez az 5.8284271 számot fogja egyre jobban közelíteni, minél nagyobb számokkal számolunk. Első ránézésre aligha lesz ismerős ez a szám, de kísérletezzünk vele egy kicsit. Van rá esélyünk, hogy az exponenciális, logaritmus, négyzet és négyzetgyök függvényekből valahogy előáll ez a szám, hiszen viszonylag egyszerű szabályok esetén is bonyolult számok jönnek elő. Például a Fibonacci sorozat esetén az aranymetszés aránya jön elő: a Fibonacci sorozatot a $(\sqrt{5}-1)/2$ és a $(\sqrt{5}+1)/2$ számok hatványainak megfelelő lineáris kombinációjaként kaphatjuk meg. Játszadózva egy kicsit egy számológéppel azt kapjuk, hogy az 5.8284271 négyzetgyöke 2.4142135, és ez már ismerősebb kell legyen: ez a $\sqrt{2}+1$, tehát az eredeti számunk a $(\sqrt{2}+1)^2$. A Fibonacci sorozatban tapasztaltak alapján nem meglepő sejtés, hogy az 1-el kezdődő számhármassokat a következő alakban keressük:

$$\left(1, \quad a(\sqrt{2}+1)^{2k} + b(\sqrt{2}-1)^{2k}, \quad c(\sqrt{2}+1)^{2k} + d(\sqrt{2}-1)^{2k}\right)$$

A sejtés alapján bizonyítani már könnyű: egyszerűen helyettesítsük be a $k=1$ (az (1, 5, 7) megoldás) és a $k=2$ (az (1, 29, 41) megoldás) eseteket: négyismeretlenes (de két különálló kétismeretlenes egyenletrendszerre bomló) lineáris egyenletrendszert kapunk, amiből

$$a = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad b = \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \quad c = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad d = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Már ez a számolás sem túl szép, ha az ember kézzel csinálja, de ezután még azt is ellenőriznünk kell, hogy az így kapott

$$\left(1, \quad \frac{2+\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}+1)^{2k} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}-1)^{2k}, \quad \frac{1+\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)^{2k} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)^{2k}\right)$$

számhármassok négyzetre emelve számtani sorozatot alkotnak minden k -ra, és hogy persze egész számok. Itt ismét segítségül hívhatjuk a számítógépet: a computer algebra rendszerek (mint például a Mathematica, Maple, Mupad, Maxima) megkönnyítik számunkra a számolást, és kiderítik, hogy ezek tényleg megfelelő megoldások.

Persze nem csak 1-el kezdődő számhármassokat szeretnénk találni. Keressük a megoldásokat a következő alakban:

$$(1) \quad \left(n, \quad a(\sqrt{2}+1)^{2k} + b(\sqrt{2}-1)^{2k}, \quad c(\sqrt{2}+1)^{2k} + d(\sqrt{2}-1)^{2k}\right)$$

Írjunk fel egy egyenletrendszer, az (1) egyenletet a $k = 1, 2, 3, 4$ speciális esetekre és oldjuk meg (vagy oldassuk meg egy computer algebra rendszerrel) az a, b, c, d ismeretlenekre az n paraméterrel. A következő eredményt kapjuk:

$$a = \frac{n^2}{4\sqrt{2}d}, \quad b = \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad c = -\frac{n^2}{4d}, \quad d = \text{tetszőleges}$$

(Kapunk egy másik megoldást is, amikor a -ban és b -ben van még egy negatív előjel is, de ez lényegében nem különbözik ettől, hiszen úgyis négyzetre emeljük a számokat, és az előjel eltűnik.) Visszahelyettesítve ellenőrizhető, hogy a

$$(2) \quad \left(n, \quad \frac{n^2}{4\sqrt{2}d}(\sqrt{2}+1)^{2k} + \frac{d}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)^{2k}, \quad -\frac{n^2}{4d}(\sqrt{2}+1)^{2k} + d(\sqrt{2}-1)^{2k} \right)$$

számok négyzetre emelve valóban számtani sorozatot alkotnak. De természetesen az nem várható, hogy ez d minden értékére egész számokat adjon.

Megkapjuk-e vajon így az összes pozitív egészeket tartalmazó megoldást (tehát a triviálisokat is), az n -et és a d -t megfelelően megválasztva? Legyen (n_1, n_2, n_3) a keresett számhármast $(n_1 \leq n_2 \leq n_3)$. Az n kiválasztásán nem kell sokat töprengenünk, nyilván $n = n_1$. Ha már n adott, akkor ($k = 1$ -et feltételezve) az

$$n_2 = \frac{n^2}{4\sqrt{2}d}(\sqrt{2}+1)^2 + \frac{d}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)^2$$

d -re nézve másodfokú egyenletből d kiszámolható (az eredmény nem túl meglepő módon $A + B\sqrt{2}$ alakú, ahol A és B racionális számok). Valóban, a

$$\frac{n^2}{4\sqrt{2}d}(\sqrt{2}+1)^2 + \frac{d}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)^2$$

kifejezés ($d > 0$ -ra) felülről nem korlátos, a $d = n(\sqrt{2}+1)/(2(\sqrt{2}-1))$ pontban veszi fel a minimumát, és a minimum értéke $(n/\sqrt{2})$ kisebb mint n , tehát az $n_2 \geq n_1 = n$ értéket is fel kell vennie (két helyen is). Ha pedig megvan már d is, akkor (2) alapján az n_3 -nak is egyeznie kell. Vagyis megkapjuk az összes egész megoldást ilyen alakban.

Most, hogy így lépésenként eljutottunk erre az eredményre, visszanézve mindegyik lépés elég logikusan következett az előzőből, de a végeredményt előre megjósolni szinte lehetetlen lett volna. Jó kérdés például, hogy hogyan is jön be ténylegesen a $\sqrt{2}$ az egészbe, amikor végig egész számokkal szerettünk volna számolni. Nem lehetne valami egyszerűbb szabályt találni, amivel megkaphatjuk a megoldásokat?

Ehhez térjünk vissza egy kicsit az első oldalon megkapott megoldásokhoz. Vegyük szemügyre a számokat, azon belül is elsősorban a számhármast első számát,

merthogy azt a fenti módszerünk kiemelten kezeli. Ezek a következők: 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49 (persze folytatódik a sorozat, de az első oldalon csak eddig írtuk ki). Milyen különlegességet tudnánk találni ezekben a számokban? Prímeknek tűnnek, de vannak kimaradt prímek is, és a végén ott van a 49 is. Kicsit jobban körbenézve a táblázatot azt vehetjük észre, hogy ezek a számok előfordulnak a számhármassokban mint harmadik számok. És (legalábbis 49-ig bezárólag) semmilyen más harmadik szám nem jelenik meg. Mintha az elsőként és utolsóként szereplő számok halmaza ugyanaz lenne. Nem lehetne megkapni mondjuk a 7-esre végződő (1, 5, 7) megoldásból a 7-essel kezdődőket?

Számoljuk ki a fenti módszerrel például a (7, 13, 17) megoldáshoz tartozó n -et és d -t. Nyilván $n = 7$, és ebből $d = (5\sqrt{2} + 1)/2$, és az ezekkel felírt (2) alak már megadja a (7, 73, 103), (7, 425, 601), stb. megoldásokat is. Ugyanígy a (7, 17, 23) megoldáshoz tartozó d a $(5\sqrt{2} - 1)/2$ és ebből megkapjuk a (7, 97, 137), (7, 565, 799), stb. megoldásokat. Ha ebből még nem derül ki, akkor nézzük az (7, 13, 17) megoldást: a (17, 25, 31)-nél $d = (13\sqrt{2} + 7)/2$, a (17, 53, 73)-nál pedig $d = (13\sqrt{2} - 7)/2$. Most már világos a szabályosság, a sejtés: ha (n_1, n_2, n_3) megoldás, akkor a (2) formában az $n = n_3$ és $d = (n_2\sqrt{2} \pm n_1)/2$ értékekkel szintén megoldást kapunk. Ezt már könnyű bizonyítani: egyszerűen be kell helyettesíteni és végigszámolni.

De ezzel a módszerrel vajon mindig egész számokat kapunk-e? Számoljuk ki a (2) formában a $k = 1$ értékhez tartozó megoldásokat és néhány átalakítás után azt kapjuk, hogy ha (n_1, n_2, n_3) megoldás, akkor az $(n_3, 3n_2 - 2n_1, 4n_2 - 3n_1)$ és az $(n_3, 3n_2 + 2n_1, 4n_2 + 3n_1)$ számhármassok is megoldások, és így persze egész számokat kaptunk. De ez csak a $k = 1$ eset volt, nem lehetne a $k > 1$ esetet valahogyan megkapni a $k = 1$ -ből? Igazából csinálhatnánk ugyanazt, mint az előző bekezdésben, abból is megkaphatnánk az eredményt, de most már kiokosodtunk: próbáljunk meg az (n_1, n_2, n_3) megoldásból $(n_1, an_2 + bn_3, cn_2 + bn_3)$ alakú megoldásokat kapni. Nem nehéz végigszámolni és a fentiek alapján nem is meglepő az eredmény: $(n_1, 3n_2 + 2n_3, 4n_2 + 3n_3)$ és ennek következményei is lehetséges megoldások.

Ez utóbbi képlet nagyon hasonlít a bekezdés elején levő második képlethez: csak az n_1 és az n_3 van benne felcserélve. Úgy is mondhatnám, hogy a számok sorrendjét fordítottam meg, amitől persze a négyzeteik még mindig számtani sorozatot fognak alkotni. És az első két képlet is nagyon hasonlít: ott egyszerűen vegyük az első szám ellentettjét (amitől a négyzetek még mindig számtani sorozatot fognak alkotni), és úgy alkalmazzuk a másik képletet. Ráadásul ha kiszámoljuk ezeknek a szabályoknak az inverz műveletét (ld. alább az (5a), (5b) és (6) képleteket), akkor olyan képleteket kapunk, amelyek ugyanúgy kihozhatók a $(n_1, 3n_2 + 2n_3, 4n_2 + 3n_3)$ szabályból, az ellentett képzésből és a számok sorrendjének megfordításából. Mivel ez utóbbi

kettő egészen természetes módon végrehajtható szabály, igazából egyetlen képlettel számolhatunk. De a továbbiakban mégis mindegyik képlettel külön fogok számolni, mert úgy egyszerűbbek lesznek a bizonyítások.

Foglaljuk tehát össze, hogyan is működik ez az egész. Ha van egy (n_1, n_2, n_3) pozitív és monoton növekvő $(n_1 \leq n_2 \leq n_3)$ megoldásunk, akkor az

$$(3a) \quad (n_3, 3n_2 + 2n_1, 4n_2 + 3n_1),$$

$$(3b) \quad (n_3, 3n_2 - 2n_1, 4n_2 - 3n_1),$$

és az

$$(4) \quad (n_1, 3n_2 + 2n_3, 4n_2 + 3n_3)$$

számhármasok is pozitív és monoton növekvő megoldások.

Most, hogy már ilyen sok megoldást találtunk, felmerül a kérdés megfordítása is. Vajon megkaphatjuk-e egy kiinduló számhármasból (mondjuk a triviális $(1, 1, 1)$ -ből) ezekkel az egyszerű szabályokkal az összes olyan pozitív, monoton növekvő megoldást, amelynél a páronkénti legnagyobb közös osztó 1? Ez egy kicsit bonyolultabb kérdés, de a válasz igenlő.

Vizsgáljuk meg a (3a), (3b) és (4) képleteket. Ezeknek a leképezéseknek az inverzei szintén lineáris leképezések:

$$(5a) \quad (3n_3 - 4n_2, 3n_2 - 2n_3, n_1),$$

$$(5b) \quad (4n_2 - 3n_3, 3n_2 - 2n_3, n_1),$$

és az

$$(6) \quad (n_1, 3n_2 - 2n_3, 3n_3 - 4n_2)$$

Próbáljuk meg alkalmazni ezeknek a leképezéseknek az inverzét mindaddig, amíg pozitív, monoton növekvő megoldásokat kapunk eredményül. Könnyen belátható, hogy az inverzekben szereplő $3n_2 - 2n_3$ és $3n_3 - 4n_2$ mennyiségek nem lehetnek 0-k, mert akkor a négyzetek nem alkothatnak számtani sorozatot (a triviális $(0, 0, 0)$ megoldáson kívül). Mikor akadhatunk el? A (6) képletben előfordulhatna, hogy a $3n_2 - 2n_3 < 0$, de akkor

$$2n_2^2 = n_1^2 + n_3^2 > n_1^2 + \left(\frac{3}{2}n_2\right)^2 > n_1^2 + 2n_2^2,$$

ami ellentmondás. Az is előfordulhatna, hogy a $3n_3 - 4n_2 < 0$, de ekkor az (5b) képlet válik alkalmazhatóvá. Meg kell még válaszolnunk a kérdést, hogy mindig

monoton növekvő megoldásokat kapunk-e az inverzek alkalmazásával. Erre pedig könnyű válaszolni: az (5b) mindig monoton növekvő megoldást ad, és ha az nem alkalmazható, akkor az (5a) és a (6) közül (mivel azokban a számok sorrendje egyszerűen meg van fordítva) az egyik biztosan monoton növekvőt ad. Tehát nem akadhatunk el, valamelyik inverz mindig alkalmazható. Csak az a kérdés, hogy eljutunk-e ezzel a módszerrel az $(1, 1, 1)$ megoldásig? Azt fogjuk bebizonyítani, hogy az inverz alkalmazásával az első és harmadik szám négyzetösszege mindig csökken, kivéve az $(1, 1, 1)$ megoldás esetén.

Valóban, vegyük az $n_1^2 + n_3^2$ -t és hasonlítsuk össze a *bármelyik* inverz alkalmazása után kapott $n_1^2 + (3n_3 - 4n_2)^2$ -el:

$$\begin{aligned} n_1^2 + n_3^2 - (n_1^2 + (3n_3 - 4n_2)^2) &= n_3^3 - (9n_3^2 - 24n_2n_3 + 16n_2^2) \\ &= -8(n_3^2 - 3n_2n_3 + 2n_2^2) \\ &= -8(n_3 - n_2)(n_3 - 2n_2) \end{aligned}$$

Azt szeretnénk, ha ez a mennyiség pozitív lenne, vagyis az n_3 az n_2 és a $2n_2$ közé esne. Mivel csak monoton növekvő megoldásokkal dolgozunk, ezért $n_3 \geq n_2$ kell legyen (ahol egyenlőség csak a számok egyenlősége, tehát az $(1, 1, 1)$ megoldás esetén állhat fenn). Másrészt nyilvánvalóan $2n_2^2 = n_1^2 + n_3^2 > n_3^2$ így, $n_3 < \sqrt{2}n_2$. Tehát a fenti mennyiség nemnegatív és csak akkor nulla, ha az $(1, 1, 1)$ megoldásról van szó. Vagyis: mivel az inverzek mindig alkalmazhatóak, és a két szélső szám négyzetösszege szigorúan csökken az $(1, 1, 1)$ eset kivételével, ezért az inverzek alkalmazása akkor ér véget, amikor elérünk az $(1, 1, 1)$ megoldáshoz. Így tehát minden megoldás előállítható a fenti szabályokkal az $(1, 1, 1)$ megoldásból.

Fogalmazzuk meg állításként a kapott eredményt.

Állítás. Az összes háromtagú, páronként relatív prím, négyzetszámokból álló (n_1^2, n_2^2, n_3^2) számtani sorozat (n_1, n_2, n_3) alapjait megkaphatjuk úgy, hogy a triviális $(1, 1, 1)$ megoldásra alkalmazzuk a következő átalakítási szabályokat:

1. Megfordítjuk a számok sorrendjét: (n_3, n_2, n_1) ;
2. Vesszük a számok bármelyikének ellentettjét:

$$(-n_1, n_2, n_3), (n_1, -n_2, n_3), (n_1, n_2, -n_3);$$

3. Vesszük a következő számhármast: $(n_1, 3n_2 + 2n_3, 4n_2 + 3n_3)$.

A páronként nem relatív prím számtani sorozatok alapjai az így kapott alapok egész számszorosai.

Most, hogy a 3 elemű, négyzetszámokból álló számtani sorozatokat elintéztük, felmerül a következő

Kérdés. *Van-e négy olyan négyzetszám, amelyek számtani sorozatot alkotnak? (Itt sem vesszük figyelembe a triviális megoldásokat.)*

Be fogjuk bizonyítani, hogy ilyen számnégyes nincs. Tegyük fel, hogy (m_0, m_1, m_2, m_3) az a négy pozitív szám $(m_0 < m_1 < m_2 < m_3)$, amelyek négyzetei számtani sorozatot alkotnak, vagyis többek között teljesülni kell annak, hogy $m_0^2 + m_3^2 = m_1^2 + m_2^2$. Ebből az négyesből az (m_1, m_2, m_3) hármas természetesen olyan számok, amelyek négyzetei számtani sorozatot alkotnak, tehát a fent leírt módon keletkeznek az $(1, 1, 1)$ triviális megoldásból. Használjuk a korábban leírt, pozitív számokat tartalmazó megoldásokat generáló (3a), (3b) és (4) képleteket. Három eset lehetséges:

a) Ha a (3a) képlettel keletkezett az (m_1, m_2, m_3) számhármast, akkor $(m_1, m_2, m_3) = (n_3, 3n_2 + 2n_1, 4n_2 + 3n_1)$ valamilyen (n_1, n_2, n_3) megoldásra $(0 < n_1 \leq n_2 \leq n_3)$. Ekkor

$$\begin{aligned} m_0^2 &= m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 = n_3^2 + (3n_2 + 2n_1)^2 - (4n_2 + 3n_1)^2 \\ &= 2n_2^2 - n_1^2 + 9n_2^2 + 12n_1n_2 + 4n_1^2 - 16n_2^2 - 24n_1n_2 - 9n_1^2 \\ &= -5n_2^2 - 12n_1n_2 - 6n_1^2 = -\left(\sqrt{5}n_2 + \sqrt{6}n_1\right)^2 - (12 - 2\sqrt{30})n_1n_2 < 0, \end{aligned}$$

ami ellentmondás.

b) Ha a (4) képlet adja meg az (m_1, m_2, m_3) számhármast, akkor hasonló módon (az n_1 és n_3 szerepét a fenti becslésben felcserélve) ismét ellentmondást kapunk.

c) Ha a (3b) képlet szerint $(m_1, m_2, m_3) = (n_3, 3n_2 - 2n_1, 4n_2 - 3n_1)$, akkor az a; pontbeli számoláshoz képest csak néhány előjel módosul, és kapjuk, hogy

$$m_0^2 = -5n_2^2 + 12n_1n_2 - 6n_1^2.$$