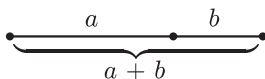


Az arany metszés és a Fibonacci számok mindenütt

TUZSON ZOLTÁN

Arany metszésről beszélünk, amikor egy mennyiséget, illetve egy adott szakaszt úgy osztunk két részre, hogy a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobbik rész az egészhez.



Tehát

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{és legyen} \quad \frac{a}{b} = x,$$

így

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Az egyenlet pozitív gyöke

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033988 \dots$$

Használatos még a $\varphi = \frac{1}{\Phi}$ arány is, vagyis $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618034\dots$ és a két számra teljesül, hogy $\varphi \cdot \Phi = 1$. Tehát $a = \Phi \cdot b$ illetve $b = \varphi \cdot a$ ugyanazt fejezik ki, így ezért emlegetik mindkét számot aranyszámnak. Mi a továbbiakban az arany metszés száma alatt az $\frac{a}{b} = \Phi$ számot értjük. Az arany metszés különböző szerkesztéséről [11]-ben és [26]-ban olvashatunk.

Az arany szám végtelen lánc tört formájában, illetve végtelen gyök formájában is előállítható a következőképpen:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}, \quad \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}, \quad \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}, \quad \dots \quad \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

illetve

$$\Phi = \sqrt{1 + \Phi}, \quad \Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}, \quad \Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}}, \quad \dots$$

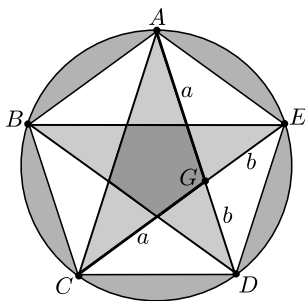
$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

A két összefüggés alapján a következő rekurziós képleteket állapíthatjuk meg:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad \text{illetve} \quad y_1 = 1, \quad y_{n+1} = \sqrt{1 + y_n},$$

és láttuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \Phi$.

Az ötágú csillagot, az aranymetszés jellegéből adódóan fontos jelképként használták. A Pentagramma szó a görög pentagrammon szóból származik, amely „öt vonal” szót jelentett. A pentagramma ősidők óta fontos szimbólum, amelynek mágikus vonásokat tulajdonítottak, a Pitagoreusok is ezt használták szimbólumként. A pentagrammában számos aranymetszési szakasz, és aranyháromszögek is megtalálhatók (lásd később).

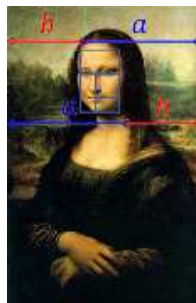


A 16-ik században Heinrich Agrippa filozófus, egy széttárt karú embert rajzolt a körbe, kezei és lábai széttárva, és a feje meg a két keze éppen egy szabályos ötszög csúcsait alkották. Mindez a pentagrammal és a benne levő aranymetszetekkel kapcsolatos.

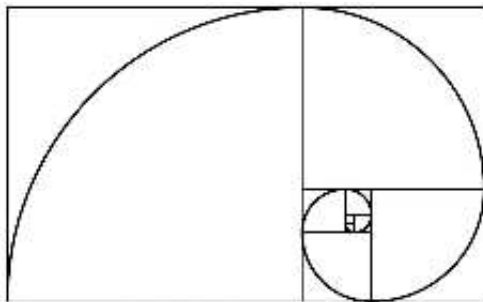
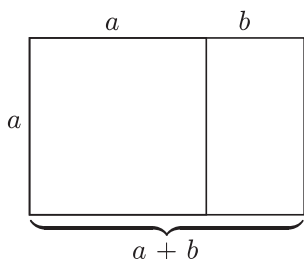
Az aranymetszés egy olyan matematikai arány, amely egyaránt megtalálható az építészetben, a festészetben, a zenében, de nem csak az emberi alkotásokban, hanem a természetben is.

Fellelhető a növények részeinek bizonyos arányaiban, állatok testrészeinek arányaiban, építészeti remekművek arányaiban, festményeken és nem utolsósorban az emberi test különböző arányaiban. A következő képek magukért beszélnek:



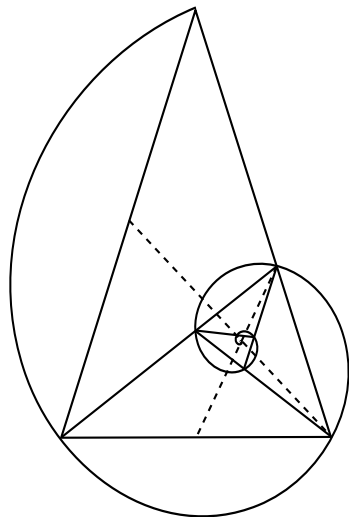


Az aranymetszés fogalmával szoros kapcsolatban van az úgynevezett aranytéglalap. Ez egy olyan téglalap, amelynek az oldalainak az aránya éppen az aranymetszés száma, hiszen $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$. Ennek a téglalapraknak érdekes tulajdonsága az, hogy ha levágjuk a maximális oldalú négyzetet, szintén aranytéglalap adódik. Ezt megismételve, ismét aranytéglalap adódik, és így tovább.



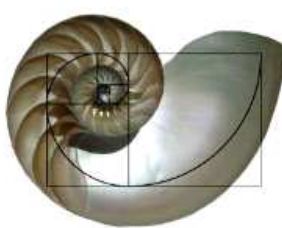
Pontosan ez a szerkesztési eljárás segít hozzá az úgynevezett aranyspirál megszerkesztéséhez. A mellékelt ábrán látható, hogy a levágott legnagyobb négyzetben egy negyed körívet húzhatunk. Ezután a következő levágott négyzetben húzunk ismét egy negyedkört, és az eljárást a végtelenségig folytathatjuk. Az így kapott aranyspirált nevezik még Fibonacci-spirálnak is, noha a kettő nem éppen ugyanaz. Az aranyspirál egy sajátos logaritmikus spirál, aminek a távulási faktora az arányszámhoz kötődik. Egyedi módon, egy aranyspirál a Φ faktorával szélesedik, vagy kerül távolabb kezdőpontjától minden negyedkör után, amit megtesz. A poláris egyenlete $r = a \cdot c^\theta$, ahol a egy tetszőleges pozitív állandó, és $c = \Phi^{\frac{2}{\pi}} \approx 1,358....$ a logaritmikus spirál esetén pedig $c = e^b$ ([23], [24]).

Ugyancsak az aranymetszéshez kapcsolódik az úgynevezett aranyháromszög. Ez olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek a csúcsánál levő szög 36° -os, az alapon fekvő szögei pedig 72° -osak. Az aranyháromszög elnevezése abból adódik, hogy ha meghúzzuk az egyik alapon fekvő szögének a szögfelezőjét, akkor ez, az egyik szarát aranymetszési arányban osztja. És még van egy érdekes tulajdonsága, ugyanis, a meghúzott szögfelező az eredeti háromszögből egy olyan háromszöget vág le, ami az eredetivel hasonló, tehát az is aranyháromszög. Éppen ez teszi lehetővé, az előző mintájára, egy újabb spirál szerkesztését, ami egyben logaritmikus spirál. Ennek a szerkesztési folyamata a mellékelt ábrán látható. Úgy az aranyspirál mint a kapott logaritmikus spirál mindenütt jelen van a természetben.

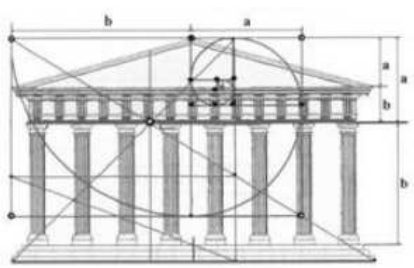


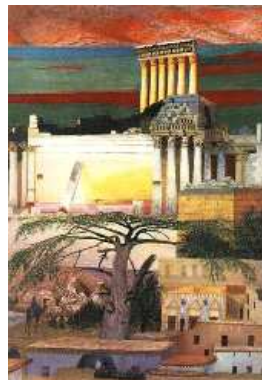
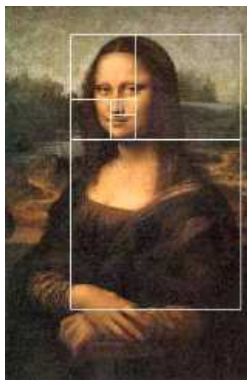
Megfigyelték az egyes virágok lapiinak az elrendeződésében, a virágok szirmainak az elrendeződésében, a napraforgó magjainak az elhelyezkedésében, a fenyőto-

bozokon, brokkolin, kaktuszféléken, meg egyéb növényen is, de jelen van a Nautilus csigaházon, a légörvényekben, a fraktálokban, a galaxis rendszerben, és még sok sok más helyen. Ezekből néhány képes ízelítőt mutatunk:

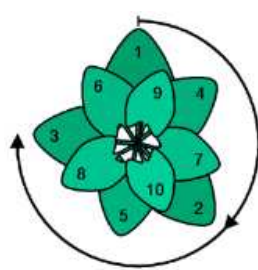
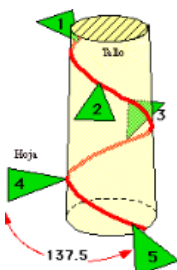
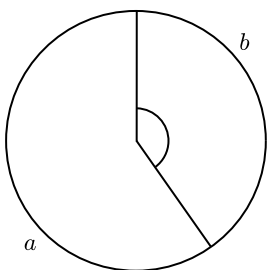


Az arany metszés aránya valamint az arany téglalap jelen van olyan építészeti remekművekben mint a Római Pantheon, de számos művészeti alkotásban mint például a Leonardo da Vinci Mona Lisa-ja, vagy Csontváry Kosztka Tivadar, Baalbek festménye, az aranyspirál pedig a mai modern épületek külsején és belsejében, például a csigalépcsőkben.





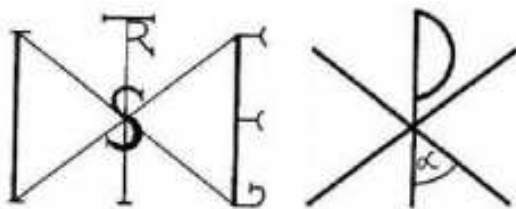
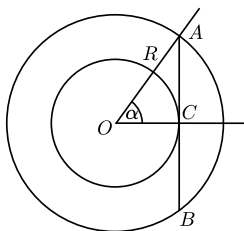
Az arany metszés fogalmához szorosan kapcsolódik az úgynevezett arany szög is. A megszerkesztése érdekében itt is az arany metszési eljárásából indulunk ki. Az $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ aránypár alapján: $\frac{360^\circ}{360^\circ - \alpha} = \frac{360^\circ - \alpha}{\alpha}$ ahonnan $\alpha = 360^\circ \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 137,508^\circ$. A szakirodalom zömében ezt a szöget nevezik arany szögnek, lásd például a [27]-ben. Ez a szög különös fontossággal bír a növények levélállásának a tanulmányozásában, amivel a phyllotaxis foglalkozik (lásd például az [5]-ben és a [14]-ben).



A szakemberek megfigyelték, hogy az egyes levelek a törzsön úgy helyezkednek el egy spirál mentén, hogy az egymás utáni levelek $137,5^\circ$ -os szöget zárnak be egymással. Ez gyakran érvényes a virágszirmok elhelyezkedésére is.

Az arany szöget illetően, egyes források szerint másképpen is értelmeznek (lásd például a [18]-ban) úgynevezett arany szöget. Arany szögnek nevezik azt a szöget, melynek koszinusza az arany metszés hányadosa, vagyis $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618034 \dots$. Ez is szorosan kapcsolódik az arany metszéshez, és a szerkesztése például így történik: tekintsünk két koncentrikus kört, amelyek sugarainak az aránya legyen éppen az arany metszési hányados. Legyen AB egy olyan húr a nagy körben, amelyik a kis kört a C pontban érinti. Ekkor $\cos \alpha = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ahonnan azt kapjuk, hogy $\cos \alpha \approx 0,618034 \dots$ és ez akkor teljesül, ha $\alpha \approx 51^\circ 49' 43''$. Látható, hogy az így értelmezett arany szög nincsen semmilyen kapcsolatban az előbbi módon értelmezett arany szöggel, de a nyomait ennek is fellelhetjük a természetben és

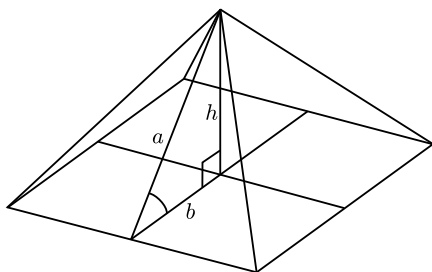
a művészetben is.



Az így értelmezett aranyszöggel számos egyéb, jelképet hordozó relikvián, emléken találkozunk. Aranyszöget zárnak be az ismert Krisztus-monogram X jelének szárai a P betű szárával, és aranyszöget fedezhetünk fel Szent István királyunk REX ST (*Rex Stephanus*) betűjeleket tartalmazó ligatúrák kézjegyen is

Az aranymetszéssel kapcsolatosan még értelmeznek úgynevezett aranyrombuszt is. Ez olyan rombusz, amelynek az átlóinak az aránya éppen az aranymetszés hányadosa. (lásd [20]).

A további rokon fogalmak közül különös helyet foglal el az aranygúla. Ez olyan négyzet alapú egyenes gúla, amelyben az apotéma az alap hosszának a felének a Φ -szerese, vagyis $a = \Phi \cdot b$ (lásd például a [19]-ban).



Legyen az alaplap és az oldallap lapszöge α , így

$$\cos \alpha = \frac{1}{\Phi} = \varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

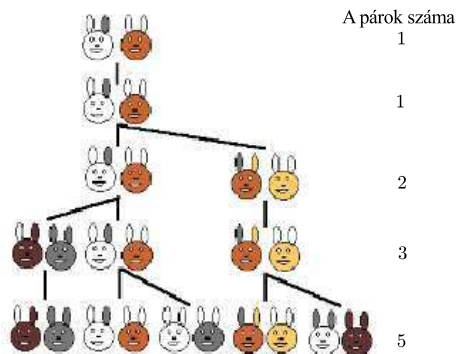
vagyis α éppen az aranyszög, ami $\alpha \approx 51^\circ 49' 38''$. Nagyon meglepő egyezés, hogy az egyiptomi Gízai Nagy piramis esetén $a = 219,13$; $b = 115,18,9$; $h = 186,42$ és így $\frac{a}{b} \approx \Phi$, ezért a piramis arany gúla és az oldallap és az alaplap szöge $52^\circ 20' - 51^\circ 52'$ között van, ami nagy pontossággal közelíti meg az aranyszöget.

Az aranymetszéshez szorosan kapcsolódnak a Fibonacci számok is, ezek elválaszthatatlanok egymástól. Leonardo Pisano (1170-1250) olasz kereskedő-matematikus, a századfordulón egyike volt azoknak, akik a tízes alapú, helyi értékes rendszerre épülő számírási módot Európában meghonosították. Leonardo, ismertebb

nevén Fibonacci, kora matematikai ismereteit Liber Abaci címen ismert munkájában foglalta össze. E híres munkájában található a következő probléma, amit Fibonacci nyulaiként is gyakran emlegetnek:



Tegyük fel, hogy egy mezőn él egy újszülött nyúl pár, egy hím és egy nőstény. A nyulak egy hónapos korukra lesznek ivarérettek, így a második hónap végén már megszülethetnek az első kicsinyek. Tegyük fel, hogy a mi nyulaink *soha nem halnak meg* és hogy a nőstények *mindig* új párt ellenek (1 hímét és 1 nőstényt) minden hónapban, a második hónaptól kezdve. Fibonacci problémája: hány pár nyúl lesz egy éven belül?



1. Az első hónap végén még csak 1 pár van.
2. A második hónap végén születik 1 új pár, így most már 2 pár van.
3. A harmadik hónap végén az eredeti nősténynek születik a második pár nyula, így már 3 pár lesz.
4. A negyedik hónap végén az eredeti nősténynek lesz újabb kicsinye, a második hónapban született nőstény most elli az első kicsinyeit, így összesen már 5 pár nyúl van, és így tovább.

Az egyes hónapok végén levő nyulpárok számát a következő sorozat tagjai adják:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

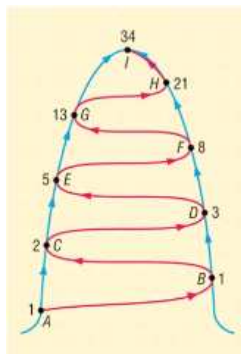
Ez az úgynevezett Fibonacci-sorozat, ami valószínűleg a legismertebb matematikai sorozat. (Sok más információt is lásd például a [15]-ben).

Észrevehető, hogy a sorozat tagjaira fennállnak a következő összefüggések: $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$, $13 = 5 + 8 \dots$ ezért érvényes a következő rekurziós összefüggés:

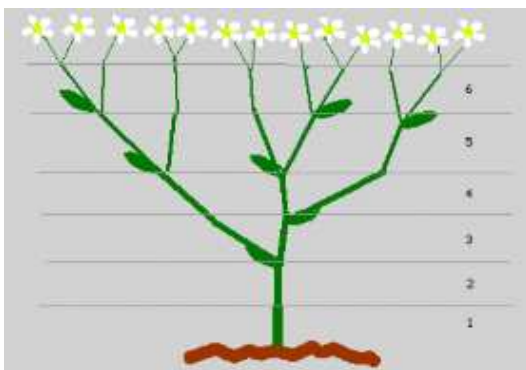
$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1 \quad \text{és} \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \text{minden } n \in \mathbb{N}^* \text{ esetén.}$$

Számos más olyan probléma van, amelyek ugyancsak a Fibonacci-sorozathoz vezetnek.

Például, a mellékelt ábrán ha az A pontból indulunk, és csak a nyilak mentén haladhatunk, akkor hányféle képen juthatunk el rendre a B, C, D, E, F, G, H és I pontokba. Belátható, hogy akkor ismét a Fibonacci-számokat kapjuk, ugyanis a B pontba csak az A -ból juthatunk, a C pontba akár az A -ból, akár a B -ból eljuthatunk, a D pontba a B pontból egy úton, a C -ből pedig két úton juthatunk el, az E pontba a D pontból egy úton és a C pontból két úton, és így tovább.



A nyulak problémájával és az előbbi problémával is rokon a következő probléma: Tegyük fel, hogy egy fa úgy növekszik, hogy minden ág, a létrejöttét követő évben csak növekszik, ezután minden évben egy új ágat hajt. Hány ága lesz a fának 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... év múlva, amit éppen most ültettünk.



Az ültetéskor egy ága van a fának, és ez az első évben is igaz, hiszen ekkor még nem hajt új ágat. A második évben hajt egy új ágat, ekkor két ága lesz. A harmadik évben az új ág még nem, de a régi ág hajt egy új ágat, így három ága lesz. Minden évben a legalább kétéves ágak hajtanak új ágat, az egyévesek nem. Így az n -edik évben a fának annyi van több ága, mint amennyi az $(n-1)$ -edik évben volt, ahány ága kétéves, vagyis ahány ága az $(n-2)$ -ik évben volt. Belátható, hogy az egyes években az ágak száma megint a Fibonacci-sorozat tagjai. Az ábrán a hatodik esztendő végén az ágak végére egy-egy virágot rajzoltunk.

Az előbbieken láttuk, hogy a Fibonacci-sorozatot eddig csak rekurziós összefüggéssel adtuk meg. Számos próbálkozás született arra, hogy a Fibonacci számokat képlettel adják meg. Ebből a célból írjuk fel a rekurziós összefüggés karakterisztikus egyenletét, ami nem más, mint $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, ahonnan megkapjuk az általános tag képletét:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Az összefüggést matematikai indukcióval is bizonyíthatjuk.

Ez a formula összefüggést teremt az aranyszám és a Fibonacci-számok között, ugyanis

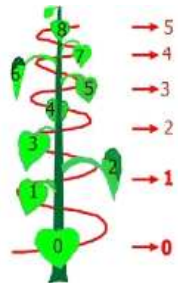
$$f_n = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - (1-\Phi)^n}{\sqrt{5}}$$

A Fibonacci-sorozat egy másik fontos tulajdonsága a következő:

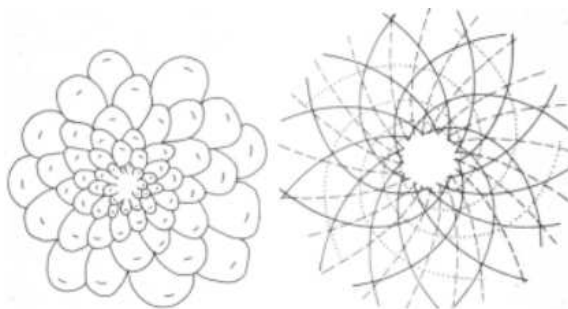
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi, \text{ ahol } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988 \dots$$

éppen az aranymetszés száma. Ennek az aránynak a természetben való előfordulásáról a következőkben beszélünk.

Érdekes megfigyelni különböző növényeknél a közös ágon elhelyezkedő levelek helyzetét. Ezek a levelek általában nem pontosan egymás felett vannak, tehát nem egy egyenes mentén helyezkednek el, hanem kicsit elcsavarodva, egy szabályos csigavonal mentén. A botanikusok úgy találták, hogy létezik egy – az egyes növényfajtákra jellemző – tört, melynek a számlálóját úgy kapjuk, hogy megnézzük, egy levél és egy pontosan felette elhelyezkedő másik levél közé a csigavonal hány periódusa esik (hányszor csavarodik körül a száron), nevezőjét pedig úgy, hogy megszámláljuk, a csigavonal vizsgált részét az ezen belül elhelyezkedő levelek hány részre osztják. Ez a tört a hársfa és a szilfa esetén $\frac{1}{2}$, az éger és bükk esetén $\frac{1}{3}$, a tölgy, sárgabarack és cseresznyefa esetén $\frac{2}{5}$, a jegenye, nyár és a körtefa esetén $\frac{3}{8}$, a fűz és mandula esetén $\frac{5}{13}$. Szembeötlő, hogy ezek nem mások mint az $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ arány tagjai.

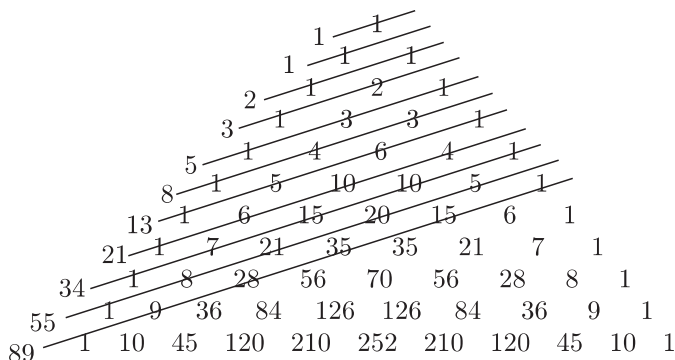


Egy másik szép példa a Fibonacci-számok felbukkanására a fenyőtoboz vagy ananász pikkelyeinek, a napraforgó magjainak elrendeződése, amelyhez hasonló termésszerkezet egy egész csomó növényen megfigyelhető (bogáncsok, fészkesek, kelfélék, kőrózsafélék, kaktuszok, kalászkok, stb.). Ezeken a terméseken a magok (vagy pikkelyek) különböző spirálvonalak mentén helyezkednek el, és ha megszámloljuk, hogy egyfajta spirálból hány darab van, akkor Fibonacci-számokat kapunk. Ezt szemlélteti az alábbi ábra, melyen egy fenyőtoboz felülnézetét látjuk, mellette pedig a szerkezetét meghatározó spirálvonalak összességét.



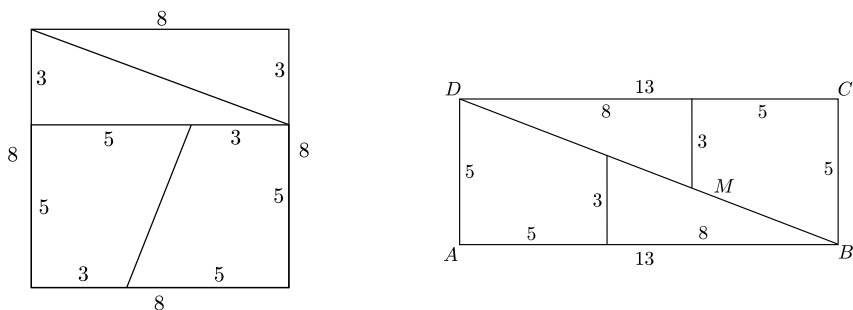
A rajzról leolvasható, hogy a legkisebb görbületű spirálisból (szaggatott vonal) 21 darab van, a következő legkisebb görbületűből (folytonos vonal) 13, a következőből (folytonos vonal) 8 és a legnagyobb görbületűből (pontosított vonal) 5. Más tobozfajtákon 3, 5, 8, 13 spirált találhatunk, a napraforgó tányérján pedig 13, 21, 34, 55, 89 darabot.

A természet formavilágában még sok helyen rábukkanhatunk a Fibonacci-számokra, ellenben a példázattal megállunk itt, és visszatérünk a matematika területére.



A matematikában az $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, ..., $(a + b)^n$ binomok kiszámolásánál fontos szerepet tölt be az úgynevezett Pascal-háromszög, ezek tagjai adják a kifejtésben az együtthatókat. Érdekességgént megjegyezhető, hogy a Fibonacci-számok szoros kapcsolatban vannak a Pascal-háromszög számaival, ugyanis ahogyan a mellékelt ábrán látható, a Fibonacci-számok megjelennek a Pascal-háromszögben, és pedig átlósan.

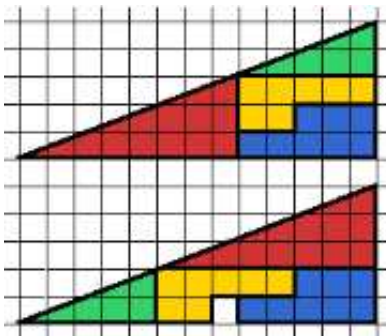
Végül nézzük a Fibonacci-számokkal kapcsolatos érdekes geometriai paradoxont. A mellékelt ábrán látható módon feldarbolunk egy négyzetet az ott látható alakzatokra, amelyek méretei között szerepelnek a 3, 5, 8 Fibonacci számok.



Ezekből az alakzatokból rakjuk ki az ábrán látható $ABCD$ téglalapot, amelynek a méretei szintén Fibonacci számok. Számítsuk most ki a két alakzat területét. Látható, hogy a négyzet területe 64 egység, míg a téglalapé 65. Vajon hol a hiba? Ha alaposan szemügyre vesszük a problémát, akkor rájöhethetünk, hogy a téglalap egyik átlója mentén éppen egy 1 egységnyi rés található, ami szabad szemmel nem érzékelhető, tehát a darabok nem illeszkednek egymáshoz pontosan. Ezt úgy mondjuk, hogy az adott négyzetünk nem darabolható át a téglalapba, mert a területeik nem egyformák (bővebben lásd például a [16]-ban). Érdekes megjegyeznünk, hogy ha a 3, 5, 8 Fibonacci-számok helyett három egymásutáni Fibonacci-számot veszünk, vagyis az f_{n-1}, f_n, f_{n+1} számokat, akkor is érvényes az előbbieken megállapított paradoxon.

Ugyancsak a Fibonacci-számokkal kapcsolatos egy másik érdekes paradoxon, a Curry paradoxonnak a Martin Gardner-féle változata. Az ábrán látható módon daraboljuk fel az 5, 12, 13 oldalhosszú derékszögű háromszöget a látható módon. Figyeljük meg a Fibonacci számokat, a legkisebb háromszög befogói 2 és 5, a középsőé 3 és 8, és a kirakott legnagyobbé pedig 5 és 13, az „L” alakú alakzat hosszúsága illetve szélessége 2 és 5, tehát mind-mind Fibonacci-számok. Ezután rendezzük át az alakzatokat az ábra szerint. Meglepetésünkre most egy kis nézetnyi üres részt kapunk. Hova tűnt el 1 egységnyi terület? A paradoxon kulcsa ezúttal is ugyanaz mint az előbbieken vagyis, az első háromszög nem hézagmentesen van összerakva.

(lásd például a [17]-ben).



Befejezésül megjegyezzük, hogy a Fibonacci-sorozatról csak ízelítőt adtunk, ugyanis a téma jellegéből adódóan, gomba módra szaporodnak az idevágó cikkek, dolgozatot, weboldalak, publikációk, könyvek, hiszen ez a témakör kimeríthetetlenül sok érdekességet és meglepetést tartalmaz úgy a matematikában mint azon kívül.

Irodalom

- [1] Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann, *The Fabulous Fibonacci Numbers* Prometheus Books, 2007.
- [2] Búzás Ferenc, *Az arany metszés vizuális világa*, 2010.
- [3] Dr Ron Knott, *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, 2001.
- [4] Falus Róbert, *Az arany metszés legendája*, Magvető Kiadó, Budapest, 1982.
- [5] H.S.M. Coxeter, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 168–179. old.
- [6] Kobilárscsik György, *Az arany metszés tanításának egyik lehetősége a szakközépiskolában*, *A Matematika Tanítása* 5/1983, 129–132. old.
- [7] Mario Livio, *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*, Broadway 2002.
- [8] Michael Jardine, *New Frontiers in Fibonacci Trading: Charting Techniques, Strategies & Simple Applications*, Marketplace Books, 2003.
- [9] Nikolai N. Vorobev, *Fibonacci Numbers*, Probus Publishing Co. 1961.
- [10] R.A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Company, 1998.
- [11] Selyem Edit, *Arany metszés matematikaórán*, *MatLap* 8/2009, 289–294. old.
- [12] Székely J. Gábor, *Arany metszés*, *Természet Világa* 7/1983, 321–323. old.
- [13] Steven Vajda, *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section*, Dover Publications, 2007.
- [14] Tél Tamás, *Miért Fibonacci-számok? (A növényi szimmetriákról)*, *Természet Világa* 12/1983, 558–560. old.
- [15] Török Judit, *A Fibonacci-sorozat*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

- [16] Tuzson Zoltán, Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat? Ábel Kiadó, 2011. 191.-199. old.
- [17] <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/jigsaw-paradox.html>
- [18] http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/2001/arany/04_sikgeometria.htm
- [19] http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
- [20] http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_rhombus
- [21] [http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_triangle_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_triangle_(mathematics))
- [22] http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_rectangle
- [23] http://hu.wikipedia.org/wiki/Logaritmikus_spir%C3%A1l
- [24] http://hu.wikipedia.org/wiki/Arany_spir%C3%A1l
- [25] <http://www.goldenmeangauge.co.uk/>
- [26] http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/2001/arany/04_sikgeometria.htm
- [27] http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_angle

Tuzson Zoltán, tuzo@extra.ro