

**$\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ – tovább is van, mondjam még?
A komplex számok bevezetése és néhány geometriai
alkalmazása a középiskolában**

HUSZÁR KRISTÓF–MARCZIS GYÖRGY –PÁLINKÁS ISTVÁN

Ez a cikk a dr. Pintér Lajos 80. születésnapja tiszteletére, a SZTE Bolyai Intézete által 2009. október 16-17-ig szervezett konferencián elhangzott azonos című előadás alapján készült. Akkor egy PP bemutató segítségével vázoltuk a komplex számok bevezetésének egy lehetséges változatát, ami egyértelműen a szemléletes-ségre alapozott. A teljes diasorozat bemutatása helyett az előadás legfontosabb elemeit megemlítve, most kiegészítésként a komplex számok geometriai alkalmazásának néhány lehetőségét villantjuk fel.

Az általános és középiskolában nagyon fontos feladat a számfogalom felépítése. Mindvégig a szemléletesség, a gyakorlati példák felhasználásával, a mindennapi életben tapasztalt problémák felvetésével érhető el a legjobban, hogy a tanulók az életkoruknak megfelelően fokozatosan bővítsék a számhalmazokat (hideg-meleg, torták felszeletelése, egységnégyzet átlója, stb.). Ezzel az alapelvvel eljutunk a valós számhalmaz megismeréséhez. Középiskolában is csak szakkörökön, speciális csoportokban érdemes a valós számok halmazát tovább bővíteni. Elsősorban azért, hogy az alkalmazások lehetőségeit megismerhessék a tanulók.

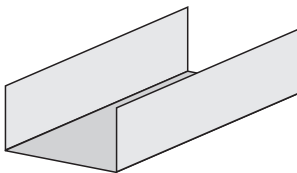
Hol kínálkozik először a valós számok bővítésének lehetősége? Nézzünk egy példát!

A hídépítés komoly dolog – de lehet-e a semmiből is hídát építeni?

1. feladat. *Egy megszállott hídépítő, aki úgy sejtette, hogy lehet, ellenőrzésképpen hidak építésébe fogott. A rendelkezésére álló alapanyagok: egy darab x méterszer x méteres négyzet alakú bádoglep és elegendő mennyiségű piros és zöld festék. A hídépítő a bádoglep két széléből egy-egy méternyit felhajtott, ez lett a korlát. A híd járólapját zöldre festette felül, a korlátokat pedig kívül-belül pirosra, ahogy a mellékelt ábra mutatja. A járólap alsó, nem látható felére nem került festék.*

Két hídát épített. Az egyik híd esetében a járólap festésekor 16 m^2 -rel nagyobb felületet, míg a másik híd esetében 10 m^2 -rel kisebb felületet kellett befesteni, mint

a korlátok festésekor. Mekkora volt a bádoglepünk oldala az egyes esetekben? Melyik híd készült a „semmiből”? ([1])



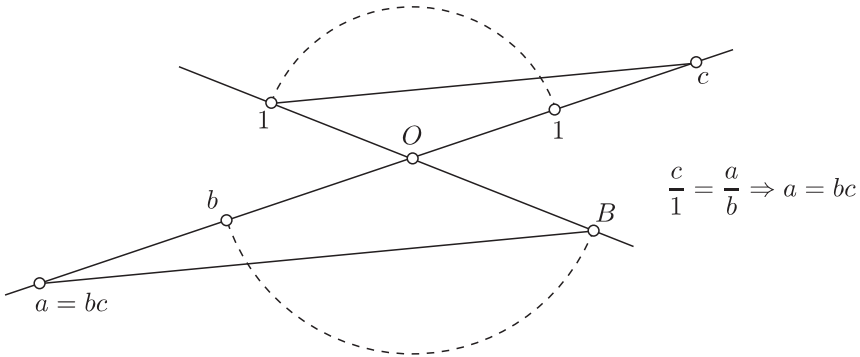
Megoldás. Mind a két esetben egy $x^2 - 6x + c = 0$ alakú másodfokú egyenletet kell megoldani. Az első esetben $c = -16$, a másodfokú egyenlet megoldó képletét felhasználva két valós megoldás: $x_1 = 8$ m és $x_2 = -2$ m adódik. Nyilván a második készült a „semmiből”. A második esetben $c = 10$, akkor a másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, nincs valós megoldás, a későbbiekben megtudjuk, hogy a szóba jöhető oldalhosszak $3 + i$ és $3 - i$. Ezek a hidak is a „semmiből” készültek, de melyik híd épült inkább a „semmiből”: a negatív vagy a komplex oldalhosszúságú négyzetből szerkesztett?

A fenti, szokatlan formában megfogalmazott feladat szeretné illusztrálni, hogy a komplex számok megjelenése bizonyos egyenletek megoldása során semmivel sem természetlenebb, mint mondjuk a negatív számok megjelenése. Egyben figyelmeztet arra, hogy a matematikai modellek adta eredményeket alaposan vizsgálni kell a való életbeli alkalmazás előtt.

Tehát, ha a „semmiből hidat akarunk építeni”, szükség van a valós számok halmazának bővítésére. A vezérelv a permanencia elve. Ami eddig jó volt, maradjon ezután is az, ha lehet (nem minden maradhat, mert pl. $<$, $>$ reláció nincs a $\mathbb{C}$ -n)!

Nagyon fontos, hogy szemléletes is legyen a kiterjesztés. Középiskolában éppen ezért célszerű a „vektoros” módszert választani. (A testbővítés nem olyan szemléletes.) Ha a valós számokon végzett összeadást és kivonást a számegyenesen az origóból a számhoz mutató vektorokkal a vektoroknál tanult módon definiáljuk, lehetőség van az általánosításra, a bővítésre. (A szorzást és az osztást a disztributivitás felhasználásával definiáljuk.) A vektor hosszával definiálható a valós szám abszolútértéke is.

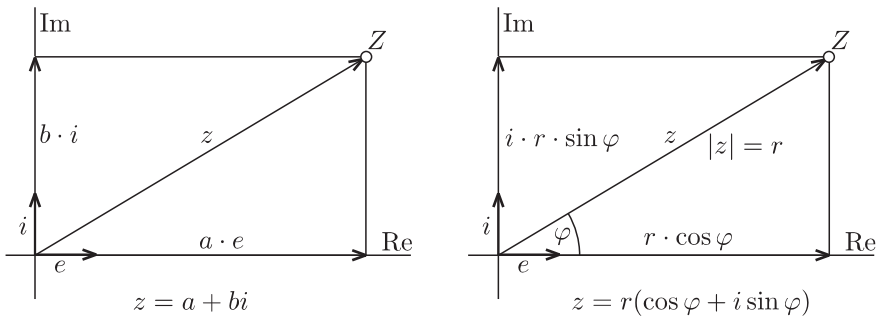
A szorzás eredménye szintén megszerkeszthető számegyenesek segítségével a következő módon. Legyen b és c két tetszőleges valós szám. Az egységet, a b -t és c -t vegyük fel az egymást metsző két számegyenesre az alábbi ábra szerint! A c -ből 1-be húzott szakasszal B -ből húzott párhuzamos egyenes a hasonlóságot figyelembe véve kimetszi az $a = bc$ szorzatot a másik számegyenesből (szaggatott szakasz). ([2])



1. ábra

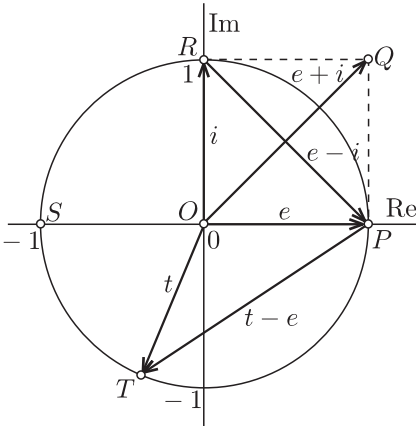
Hol ábrázolhatjuk a komplex számokat? Mivel a számegyenesen a valós számok kitöltik ($\mathbb{R}$ az összeadásra és szorzásra nézve test, rendezett és teljes), így a komplex számok már csak a számegyenesen „kívül” lehetnek (Gauss-sík). Itt megemlíthető az a nagyon izgalmas és elsőre meglepő tény, hogy a kétdimenziós síknak és egy benne fekvő egyenesnek ugyanannyi pontja van. Ez egy ügyes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel igazolható (halmazok számossága).

A 2. ábra szemlélteti a komplex számok algebrai és trigonometriai alakját.



2. ábra

Az egyik legizgalmasabb kérdés az imaginárius egység, az i értéke. Az egységni abszolútértéken kívül milyen tulajdonsággal kell még bírnia? A szorzás disztributivitására és a számok abszolútértékének szorzási szabályára ($|ab| = |a| \cdot |b|$) nézve kövessük a permanencia-elvet:



3. ábra

$$|i^2| = |i||i| = 1 \cdot 1 = 1$$

$$t := i^2$$

$$(e + i)(e - i) = e^2 - i^2 = e - i^2$$

$$|e + i||e - i| = |e - i^2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$|e - i^2| = 2 \Rightarrow |e - t| = 2$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

$$S = T \Rightarrow i^2 = -1$$

Ezután értelmezhetjük mindkét alakban a különböző műveleteket. A legfontosabb műveleti szabályok a szokásos jelölésekkel:

$$z \pm z' = (a \pm a') + (b \pm b')i$$

$$z \cdot z' = (a \cdot a' - b \cdot b') + (ab' + ba')i$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}i$$

$$z \cdot z' = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$z^n = r^n \cdot [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n} \right) \right], \quad k = 0; 1 \dots, (n-1)$$

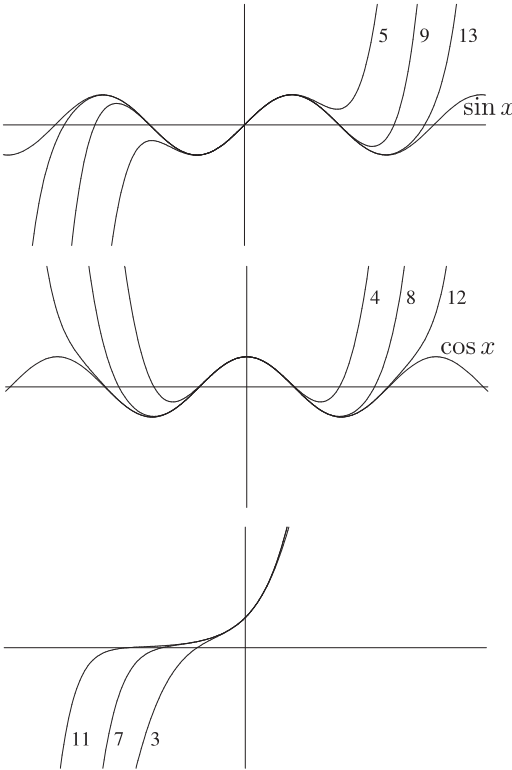
A sok „mechanikus” és összetettebb számolás feladat után eljuthatunk-e a matematikairodalom talán legszebb (ez szubjektív) összefüggéséhez? Ehhez a végtelen hatványsorok alapjait is kell ismernünk (természetesen másképpen is lehet). Középiskolában itt is hagyatkozhatunk a szemléletességre. Közelítsük a függvényeket hatványfüggvényekkel! A 4. ábra ezt szemlélteti (az egyes grafikonok melletti számok azt mutatják, hogy a sort milyen kitevőjű tagig tekintjük a közelítésnél). [3]

Rövid, de nem olyan bonyolult számolás után észrevehetjük, hogyha a $\cos x$ sorához hozzáadjuk a $\sin x$ sorának i -szeresét, éppen az e^{ix} -et kapjuk:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{exponenciális alak})$$

Az x helyére π -t helyettesítve, rendezés után kapjuk Euler híres formuláját:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \text{ vagy } e^{i\pi} = -1 \quad (\text{Euler-féle formula})$$



$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

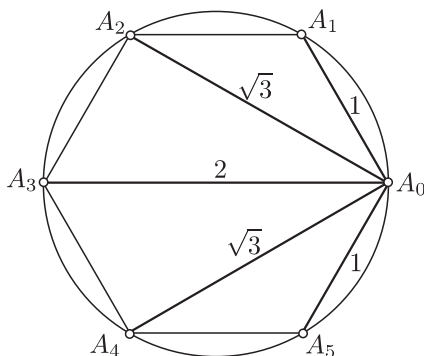
4. ábra

Középiskolában a komplex számok bevezetése után legfontosabb dolog az, hogy a diákok biztosan tudjanak azokkal műveleteket végezni, vagy olyan egyenleteket megoldani, amelyeknek komplex gyökei vannak. Ha tanulóink ezen a téren már otthonosan mozognak, komolyabb feladatokat is tűzhetünk ki számukra. Ezek közül talán a legszebbek a geometriai alkalmazások, amikor is egy geometriai feladatot a komplex számok segítségével sokszor a hagyományos módszertől lényegesen egyszerűbben meg tudunk oldani.

Nézzünk két ilyen, egy könnyebb és egy nehezebb geometriai alkalmazást!

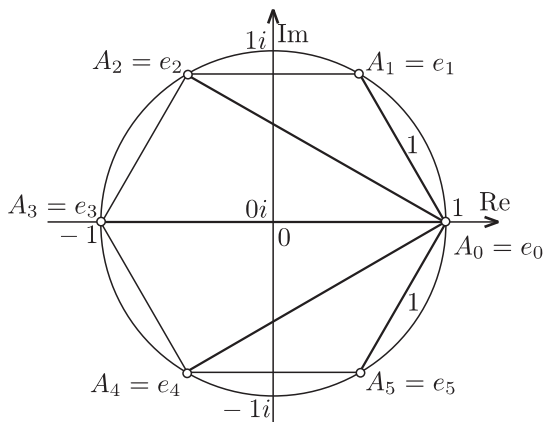
2. feladat. *Igazolja, hogy az egységsugarú körbe írt szabályos hatszög öt csúcsának a hatodik csúcstól mért távolságát összeszorozva 6-ot kapunk!* [4]

1. megoldás (elemi geometriai). Az 5. ábra alapján egyszerű trigonometriai összefüggéseket és a szabályos hatszög tulajdonságait kihasználva könnyen adódik az állítás: $1 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = 6$



5. ábra

2. megoldás (komplex számokkal). Az általánosítás megszorítása nélkül legyen a szabályos hatszög hatodik csúcsa A_0 , az $e_0 = 1$ komplex számmal megadott csúcs. Továbbá legyen a hatszög többi csúcsa $A_k = e_k = \sqrt[6]{1}$ (hatodik egységgyökök, $k = 1; 2; 3; 4; 5$).



6. ábra

Ekkor $A_k - A_0 = e_k - 1$. Használjuk fel, hogy a szorzat abszolútértéke egyenlő a tényezők abszolútértékének szorzatával! Így azt kellene belátnunk, hogy:

$$|(e_1 - 1)(e_2 - 1)(e_3 - 1)(e_4 - 1)(e_5 - 1)| = 6$$

Tudjuk, hogy

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

igaz minden x -re. Az egyenlőség jobb oldalán lévő szorzat második tényezője egy egész együttthatós ötödfokú polinom, ez tehát felbontható gyöktényezőinek szorzatára. E polinomnak azonban a gyökei éppen e_1, e_2, e_3, e_4 és e_5 . Ezért

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - e_4)(x - e_5)$$

igaz minden x -re. Ha most az x helyére 1-et helyettesítünk, és a szorzat abszolútértékét vesszük, éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

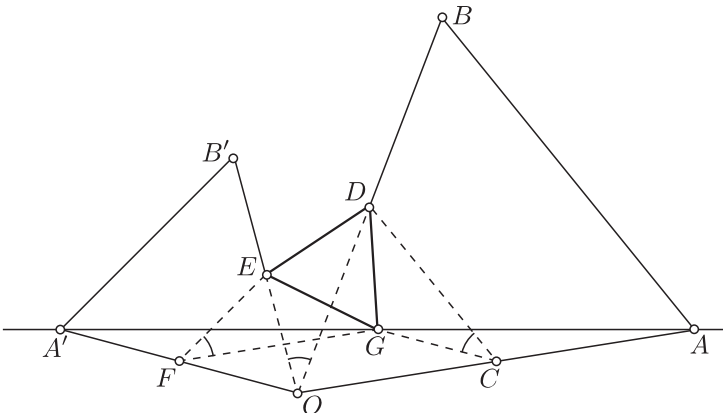
Általánosítás (2. feladat). *Igazolja, hogy az egységsugarú körbe írt szabályos n -szög $n - 1$ csúcsának az n -edik csúcstól mért távolságát összeszorozva n -et kapunk!*

Megjegyzés. A komplex számos bizonyítás az $n = 6$ esetre nehezebb és bonyolultabb, mint a geometriai, de sugallja az általánosítás lehetőségét, ötletet ad annak bizonyításához (fokozatosság). A komplex számok „ereje” ekkor mutatkozik meg igazán, hiszen a geometriai módszernél általános esetben nagyon nehéz lenne a trigonometrikus összefüggésekkel dolgozni.

3. feladat. *Az OAB és $OA'B'$ ellentétes körüljárású szabályos háromszögek O csúcsa közös. Bizonyítsuk be, hogy egyrészt az AA', OB, OB' ; másrészt a BB', OA, OA' szakaszok felezőpontjai szabályos háromszögeket határoznak meg! [5]*

1. megoldás (elemi geometriai). A feladatot először klasszikus, síkgeometriai módon oldjuk meg, hogy a két módszer közötti különbségeket, eltéréseket itt is szemléltessük.

Tekintsük először a 7. ábrát! Célunk annak igazolása, hogy DEG háromszög szabályos.



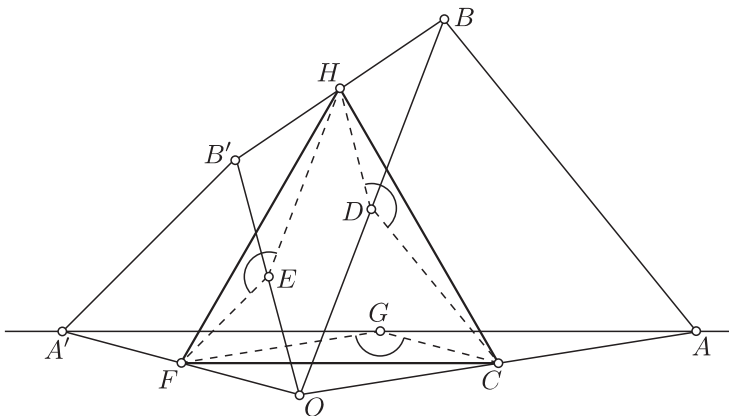
7. ábra

Ehhez megmutatjuk, hogy az FEG , OED és CGD háromszögek egybevágók. FE az $A'B'O$ háromszögben középvonal, így $FE \parallel A'B'$ és $FE = \frac{A'B'}{2}$. Hasonlóképp $CG \parallel A'O$ és $CG = \frac{A'O}{2}$. Végül E a $B'O$ szakasz felezőpontja, így $EO = \frac{B'O}{2}$. Mivel $A'B'O$ háromszög szabályos, ezért adódik, hogy $FE = CG = EO$. Hasonlóképpen kapjuk, hogy $FG = CD = OD$.

Vegyük észre, hogy az FG egyenest 60° -kal (pozitív irányba) elforgatva OD -vel párhuzamos egyenest kapunk! Ugyanakkor az FE szakaszt E pont körül 60° -kal (pozitív irányba) elforgatva OE szakaszt kapjuk. Emiatt $\angle EFG = \angle EOD$. Hasonló megfontolással azt kapjuk, hogy $\angle EFG = \angle EOD = \angle GCD$.

Mindezekből már következik, hogy az EFG , OED és CGD háromszögek egybevágók. Ez pedig azt jelenti, hogy $GE = ED = DG$, ami éppen a DEG háromszög szabályosságát igazolja.

Megjegyzések. A 8. ábrán látható eset az előző esethez teljesen hasonló módon bizonyítható.

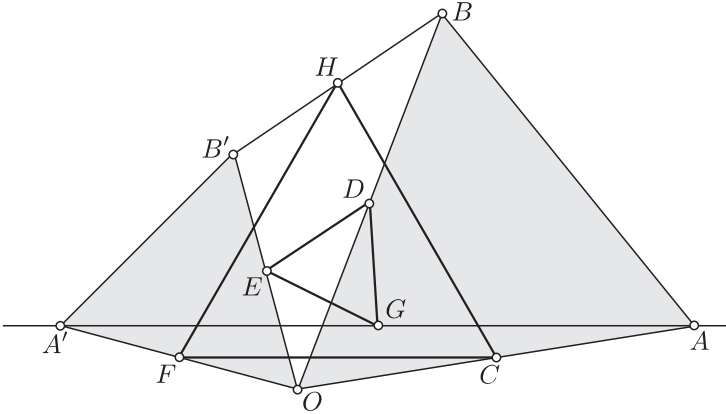


8. ábra

A most bemutatott megoldás azonban, sajnos, nem teljes. Kihasználtuk, hogy az ábra „úgy van, ahogy látjuk”. Azt azonban nem vizsgáltuk meg, miként változhat a feladat, ha pl. az $A'B'O$ és ABO háromszögek (részben) fedik egymást. Hátra van tehát a diszkusszió, és előfordulhat, hogy néhány esetet még a legalaposabb munka esetén is kihagyunk. Ha a feladatot a komplex számok segítségével oldjuk meg, akkor ezeket a kellemetlenségeket elkerülhetjük, hiszen algebrailag biztosan csak egy esetet kell megvizsgálnunk.

2. megoldás (komplex számokkal). Elég az egyik felezőpont-hármasra igazolni

az állítást, a másik ponthármasra teljesen analóg módon történik a bizonyítás. Tekintsük a 9. ábrát!



9. ábra

Helyezzük el az ábrát a komplex számsíkon úgy, hogy az O pont az origóval essen egybe! Legyen $\varepsilon = \cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ$, valamint A helyvektora a , B' helyvektora pedig b . Ekkor B helyvektora $a\varepsilon$, A' helyvektora pedig $b\varepsilon$ lesz. A bizonyításnál kihasználjuk majd, hogy a komplex számok szorzása forgatva nyújtás geometriai transzformációnak felel meg a síkban, valamint azt hogy $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$.

Az AA' , OB , OB' szakaszok felezőpontjai rendre:

$$g = \frac{a + b\varepsilon}{2} \quad d = \frac{a\varepsilon}{2} \quad e = \frac{b}{2}$$

Ebből következik, hogy:

$$g - d = \frac{e + b\varepsilon - a\varepsilon}{2} \quad \text{ill.} \quad e - d = \frac{b - a\varepsilon}{2}$$

Forgassuk el $(e - d)$ -t 60° -kal!

$$(e - d) \cdot \varepsilon = \frac{b\varepsilon - a\varepsilon^2}{2} = \frac{b\varepsilon - a \cdot (\varepsilon - 1)}{2} = \frac{a + b\varepsilon - a\varepsilon}{2} = g - d$$

Ezzel beláttuk, hogy az GDE háromszög szabályos.

A hely szűke miatt természetesen nem vállalkozhattunk a komplex számhal-maz precíz vagy egy másfajta (pl. testbővítés) felépítésére, nem térhettünk ki egyéb alkalmazásokra sem. Említhettük volna pl. a jól ismert addíciós tételeket vagy a fizikai alkalmazásokat is.

A cím második részében feltett kérdést (-tovább is van, mondjam még?) újra feltehetnénk. Lehet-e tovább folytatni a bővítést? Ha igen, meddig? Ez még tovább nyúlik a középiskolás szintnél (Hamilton-féle kvaterniók, ferde test, Frobenius). Érdekes viszont az önálló kutatásra legfogékonyabb diákjainkat ebbe az irányba is elindítani.

Tudománytörténeti szempontból *Cardano*, *Bombelli*, *Euler* és *Gauss* mellett meg kell említeni még a két *Bolyait* is, akik szintén jelentőset alkottak ezen a területen.

„... Ilyen, hogy »négyzetgyök mínusz egy«, nem létezhet.... Csak éppen az az érthetetlen, hogy mégis számolhatunk imaginárius vagy más ilyen képtelen értékekkel, és végül mindennek ellenére reális értéket kapunk eredményül... . Hát nem olyan ez, mint egy híd, amelynek csak első és utolsó pillére van, a pillérek között pedig semmi, és te mégis olyan biztonsággal mégy át rajta, mintha nem kellene a folyóba esned? Én mindenképp csalást szimatolok az ilyen számításban, ahol csak, hipp-hopp, ott legyek, ahol akarok... . És a legkísértetesebb számomra a matematikának ez az ereje, amely csakugyan átvisz minket a nem létező hídon, anélkül, hogy lezuhannánk róla.” (*R. Musil: Törless iskolaévei*) [6]

A cikk szerzőiről: *Marczis György* a gyulai Erkel Ferenc Gimnázium matematikatanára, matematika szaktanácsadó. 2009-ben *Huszár Kristóf* az ELTE első éves matematikus hallgatója, *Pálinkás István* a békéscsabai Gépészeti és Számítástechnikai Szakközépiskola végzős diákja volt.

Felhasznált irodalom

- [1] Wikipédia, *A komplex számok tanítása*.
- [2] Szele Tibor, Bevezetés az algebrába.
- [3] Németh József, Előadások a végtelen sorokról.
- [4] Rácz János, Matematika feladatok – ötletek – megoldások I.
- [5] Reiman István, Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon.
- [6] R. Musil, *Törless iskolaévei*.

Huszár Kristóf, huszar.kristof@gmail.com

Marczis György, marcczisgy@t-online.hu

Pálinkás István, pistvan@pistvan.hu