POLYGON
XX. köt. 1. szám, 2011. okt.

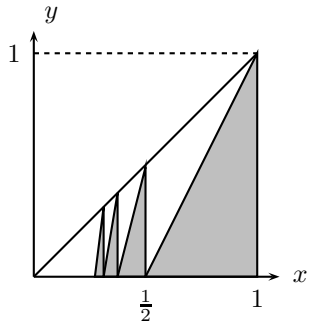
Egy fűrészfog és Wallis formulája az órán

Hraskó András—Pataki János

A Maya játék táblájának és szabályainak módosításával Pataki János egy solitaire-t készített, és feltárta annak érdekes tulajdonságait. János solitairét vizsgáltuk a Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban 2009-ben végzett speciális matematika tagozatos osztállyal és az év őszén is elővettük az iskola matektáborában, ahol a 2010-ben végzős tagozatosok is jelen voltak. A játék elemzése egy külön cikket érdemel, itt csak az analízis témakörébe tartozó kiegészítő órai vizsgálatokat elevenítjük fel, amelyek a Wallis formulával kapcsolatosak.

A játékhoz természetesen kapcsolódó algoritmus aszimptotikájának vizsgálata vezetett az alábbi feladathoz:

1. feladat (Fűrészfog integrál.) *Alább egy „fűrészfogat" vizsgálunk, amely végtelen sok „fog"-ból áll. A fogak az x tengely $[0;1]$ intervalluma és az $y = x$ függvény grafikonja között találhatók. A fogak derékszögű háromszögek, melyek két befogója vízszintes illetve függőleges az ábra szerint. A háromszög átfogója az origó felé haladva egyre meredekebb. A legnagyobb, az $(1;1)$ pontban végződő fűrészfog bal oldala 2 meredekségű, a következő fog bal oldala már 4 meredekségű, majd 6 meredekségű fog következik, és így tovább.*



a) *Mutassuk meg, hogy a fogazat (a ferde átfogók x tengellyel alkotott metszéspontjai) tartanak az origóhoz ($x = 0$-hoz)!*

b) *Határozzuk meg a háromszögek területének összegét!*

Előzetes vizsgálatok. Jelölje az i-edik fűrészfog x tengelyre eső jobb oldali sarkát a_{i-1}, a bal oldalit a_i, a területét t_i, az első n fog területösszegét T_n, tehát pl $1 = a_0 > \frac{1}{2} = a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, $t_1 = T_1 = \frac{1}{4}$ stb. Az a_i-től ($i > 0$) jobbra következő fog bal oldalának meredekségéből

$$\frac{1}{2i} = \frac{a_{i-1} - a_i}{a_{i-1}} = 1 - \frac{a_i}{a_{i-1}}, \tag{1}$$

amiből egyrészt

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{2i-1}{2i}, \tag{2}$$

másrészt

$$t_i = \frac{(a_{i-1} - a_i)a_{i-1}}{2} = \frac{a_{i-1}^2}{4i}. \tag{3}$$

Az $a_0 = 1$ kezdeti érték és a (2) rekurziós formula alapján

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$$

és indukcióval igazolható, hogy

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}. \tag{4}$$

a) I. megoldás. A bizonyítandó $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ összefüggés ekvivalens azzal, hogy a

$$b_n = \ln \frac{1}{a_n} = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{4}{3} + \ln \frac{6}{5} + \ldots + \ln \frac{2n}{2n-1} \tag{5}$$

sorozat végtelenhez tart. Vegyük észre, hogy

$$\ln \frac{2i}{2i-1} = \ln \left(1 + \frac{1}{2i-1}\right) = \frac{1}{2i} \ln \left(1 + \frac{1}{2i-1}\right)^{2i} > \frac{1}{2i} \ln e = \frac{1}{2i},$$

azaz b_n végtelenhez tart, hiszen nagyobb, mint a harmonikus sor megfelelő részletösszegének fele.

a) II. megoldása (*Kornis Kristóf*) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton fogyó és 0 egy alsó korlátja, így van egy x nemnegatív határértéke. Indirekten igazoljuk, hogy $x = 0$.

Tegyük fel, hogy x pozitív. Akkor az i-edik háromszög y-tengellyel párhuzamos oldala nem rövidebb x-nél, így az x-tengellyel párhuzamos oldala legalább $\frac{x}{2i}$ hosszúságú. Az alapok összege így

$$\frac{x}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right),$$

ami tetszőlegesen nagy lehet, hiszen a zárójelben a végtelenhez tartó harmonikus sor áll.

a) III. megoldása. (*Balogh Máté*) Igazoljuk teljes indukcióval, hogy $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, amiből következik a feladat állítása! $n = 1$-re $a_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ valóban fennáll. Másrészt $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+2}}$, így ha az állítás igaz $n = k$-ra, akkor $n = k+1$-re is fennáll.

a) IV. megoldása. (*Tomon István*) Tekintsük a_n mellett a

$$b_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1}. \tag{6}$$

sorozatot is.

Egyrészt

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \qquad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \qquad \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1},$$

így $a_n < b_n$, másrészt

$$a_n b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \to 0.$$

Mivel $0 < a_n^2 < a_n b_n \to 0$, így $a_n \to 0$.

a) V. megoldása. (*Bóra Eszter és Farkas Márton*) Ismeretes (Wallis formula, lásd később), hogy a

$$J_n = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \tag{8}$$

sorozat $\frac{\pi}{2}$-höz tart. Vegyük észre, hogy

$$a_n^2 = \frac{1}{(2n+1) \cdot J_n} \longrightarrow 0,$$

tehát az $\{a_n\}$ sorozat is 0-hoz tart.

A tanórán ezzel párhuzamosan foglalkoztunk a nevezetes *Wallis formulá*val. Ezt Pintér Lajos tagozatos Analízis II. tankönyvének 100. oldalán található egyik példája inspirálta, amit alább kissé kibővítve elevenítünk fel.

2. feladat. (Szinusz és Wallis.)

a) *Számítsuk ki az* $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ *integrált!*

b) *Mutassuk meg, hogy az* $\{I_n\}$ *sorozat monoton fogyó!*

c) *Igazoljuk, hogy a* (7) *sorozatra* $\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

A példa megoldását az Olvasóra hagyjuk, szükség esetén megtalálhatja pl. T. Sós Vera „Analízis" tankönyvsorozatának „Integrálszámítás" című kötetében [3]. Pintér Lajos 80. születésnapi konferenciájára készülve akadtam rá Mark Reeder remek cikkére [2], amelyből sok más érdekesség mellett az is megérthető miképp jött rá Wallis a formulára. A 2010-ben végzős tagozatosokkal már ezen a módon „fedeztük újra fel" a formulát.

„Arithmetica Infinitorum" című 1656-ban megjelent nagy hatású művében Wallis sok görbe alatti területet – mai szóval: integrált – meghatározott. A dátumra pillantva jegyezzük fel, hogy Wallis Pascal kortársa volt, és tekinthetjük őt Newton egyik elődjének.

A π az egységkör területe. Tehát, mai jelöléssel:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx. \tag{8}$$

Wallis módszerei, az amúgy ismert terület meghatározására, itt nem működtek. A vizsgált (8) integrálhoz hasonló alakú

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx \tag{9}$$

integrálok p és q egész értékeire viszonylag könnyen meghatározhatók. Például

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} dx = \left[x - \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^1 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5} = \frac{1}{10}.$$

Wallis számos ilyen integrált meghatározott.

3. feladat. (Wallis táblázata.) *Számítsuk ki és rendezzük táblázatba a*

$$w_{p,q} = \frac{1}{\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx} \tag{10}$$

értékeket, ha $0 \le p, q \le 5$.

A feladat nem nehéz – a megoldást itt nem is részletezzük –, de az összesen 36 integrál természetesen túl sok egy embernek. Ezért a „mezőket" kiosztottam

kisebb adagokban a diákok között úgy, hogy ellenőrizni is tudják egymást. Ahogy elkészültek és össze is vetették egymás eredményeit, a diákok egyesével kijöttek és beírták az eredményeket a táblára rajzolt üres táblázatba. A fokozatosan kialakuló eredmény meglepetést okozott.

p/q	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3	1	4	10	20	35	56
4	1	5	15	35	70	126
5	1	6	21	56	126	252

Igen,

$$w_{p,q} = \binom{p+q}{p}, \tag{11}$$

mint ahogy előbbi konkrét példánkban

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right)^2 dx = \frac{1}{w_{3,2}} = \frac{1}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}.$$

A (11) összefüggést nemnegatív egész p, q számokra mai módszereinkkel egyszerűen igazolhatjuk.

4. feladat. *Állítsunk fel rekurzív összefüggést a $w_{p,q-1}$, $w_{p,q}$ értékek között!*

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét, a $\int uv' = uv - \int u'v$ összefüggést, az $u = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q$, $v = x$ függvényekre:

$$\frac{1}{w_{p,q}} = \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q \cdot 1 dx = \left[\left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q \cdot x\right]_0^1 + \frac{q}{p} \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^{q-1} x^{\frac{1}{p}} dx,$$

azaz mindkét oldalhoz $\frac{q}{p} \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx$-t adva

$$\frac{p+q}{p} \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx = \frac{q}{p} \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^{q-1} dx,$$

tehát

$$w_{p,q} = \frac{p+q}{q} w_{p,q-1}. \tag{12}$$

5. feladat. *Igazoljuk a (11) összefüggést!*

Megoldás. Vegyük észre, hogy (12)-höz hasonlóan

$$\binom{p+q}{p} = \frac{p+q}{q}\binom{p+q-1}{p}. \tag{13}$$

Másrészt $x \in (0,1)$ miatt

$$\lim_{p \longrightarrow 0+} x^{\frac{1}{p}} = 0, \qquad \text{így} \qquad w_{0,q} = 1 = \binom{0+q}{0}. \tag{14}$$

Ebből az összefüggésből indulva (12) ill. (13) alapján teljes indukcióval adódik a (11) reláció.

A negyedkör területének (8) reciproka fenti jelölésünkkel a

$$w_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \tag{15}$$

formában írható. Az (11) összefüggés lehetőséget ad a Pascal-háromszög kiterjesztésére, pl. mondhatjuk, hogy

$$\binom{1}{\frac{1}{2}} = w_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}. \tag{16}$$

Ez nem csak egy üres értékadás, hanem a (12) reláció azt mutatja, hogy a kiterjesztés rendelkezik a Pascal háromszög bizonyos tulajdonságaival.

6. feladat. *Töltsük ki a 3. feladat táblázatának „feledik" sorát!*

p/q	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
$\frac{1}{2}$								

Megoldás. A (12) képlet szerint

$$w_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} w_{\frac{1}{2},\frac{n-2}{2}} = \frac{n+1}{n} w_{\frac{1}{2},\frac{n-2}{2}}.$$

A $w_{\frac{1}{2},\frac{0}{2}} = 1$, $w_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}$ értékekből kiindulva külön vizsgálva n páros és páratlan értékeit lépésről lépésre haladhatunk a táblázat kitöltésével.

p/q	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\frac{4}{\pi}$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\frac{4}{\pi}$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{4}{\pi}$

7. feladat. *Bizonyítsuk be a Wallis-formulát (2.c feladat)!*

Megoldás. A (10) integrálok p rögzítése mellett q növelésével fogynak, tehát reciprokaik, a $w_{p,q}$ mennyiségek nőnek. Például:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{\pi} < \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6} < \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{4}{\pi},$$

azaz

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\cdot\frac{8}{7}. \tag{17}$$

A $\{J_n\}$ sorozat monoton nő (szorzótényezői 1-nél nagyobbak), és a (17) összefüggéssel analóg általános formula szerint $\frac{\pi}{2}$ felső korlátja e sorozatnak, tehát konvergens. J_n határértéke nem lehet $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb, mert a sorozat elemei egy 1-hez tartó (a (17) jobb oldalán $\frac{8}{7}$-nek megfelelő) tényezővel szorozva már $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb számot adnak. Ezzel Wallis formuláját beláttuk.

Nemrég Johan Wästlund elemi varázslással [1] vezette le a Wallis-formulát, de talán a felfedező út fenti feleleventése sem tanulság nélküli.

Térjünk vissza a fűrészfogakhoz!

Az 1. feladat b) részének megoldása. A (2–3) képletek segítségével kiszámolhatjuk a $\{t_i\}$, $\{T_i\}$ sorozatok elsőt követő néhány további elemét is:

i	1	2	3	4
a_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	
t_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{256}$	$\frac{25}{4096}$
T_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{75}{256}$	$\frac{1225}{4096}$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{9}{8}, \qquad \frac{T_3}{T_2} = \frac{25}{24}, \qquad \frac{T_4}{T_3} = \frac{49}{48},$$

amiből sejthető, hogy

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2-1} = \frac{(2n+1)^2}{2n\cdot(2n+2)}, \tag{18}$$

tehát $n > 1$ esetén

$$T_n = \frac{1}{4}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)\cdot 2n}. \tag{19}$$

A (19) összefüggést indukcióval igazoljuk. A (3), (4) összefüggések összevetéséből

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= \frac{1}{4(i+1)}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2i-1}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2i-1)^2}{(2i-2)\cdot 2i}\cdot\frac{2}{2i\cdot(2i+2)}, \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} T_{i+1} = T_i + t_{i+1} &= \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2i-1)^2}{(2i-2)\cdot 2i}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2i\cdot(2i+2)}\right) \\ &= T_i\cdot\frac{(2i+1)^2}{2i\cdot(2i+2)}. \end{aligned}$$

A T_n sorozat (19) képletében felismerhetjük a Wallis formula J_n sorozatát:

$$T_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{1}{J_n},$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

A fűrészfog alatti terület a π reciproka.

Hivatkozások

[1] Johan Wästlund, An Elementary Proof of the Wallis Product Formula for π, American Mathematical Monthly, 2007, December, 114, 914-917, letölthető a: `http://www.ep.liu.se/ea/lsm/2005/002/lsm05002.pdf` oldalról.

[1] Mark Reeder, From the Wallis formula to the Gaussian distribution, `URL=http://www2.bc.edu/~reederma/105WallisGauss.pdf`

[1] T. Sós Vera, Analízis I/2 (Integrálszámítás), Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, 1995.

Hraskó András, Pataki János, Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Ált. Isk. és Gimnázium, andras@hrasko.com, jsp@freemail.hu