

Unalmas analízis?

TOTIK VILMOS

1977 áprilisában egy szép tavaszi napon Pintér Lajos bement Szegeden a IV. éves programtervező matematikusokhoz differenciálegyenlet-gyakorlatot tartani, és az alábbi feladatot diszkutálta.

A sík bizonyos rácspontjaiban (egész koordinátájú pontjaiban) békák vannak, amelyek a következőképpen mozognak: egy béka átugorhat egy mellette álló békát ha a mögötte levő rácspont üres, viszont az átugrott béka ekkor lekerül a síkról. Igazolni kell, hogy ha kezdetben egyetlen béka sincs a felső félsíkon, akkor soha nem juthatnak el 5 magasságba (azaz az $y = 5$ egyenest nem tudják elérni).

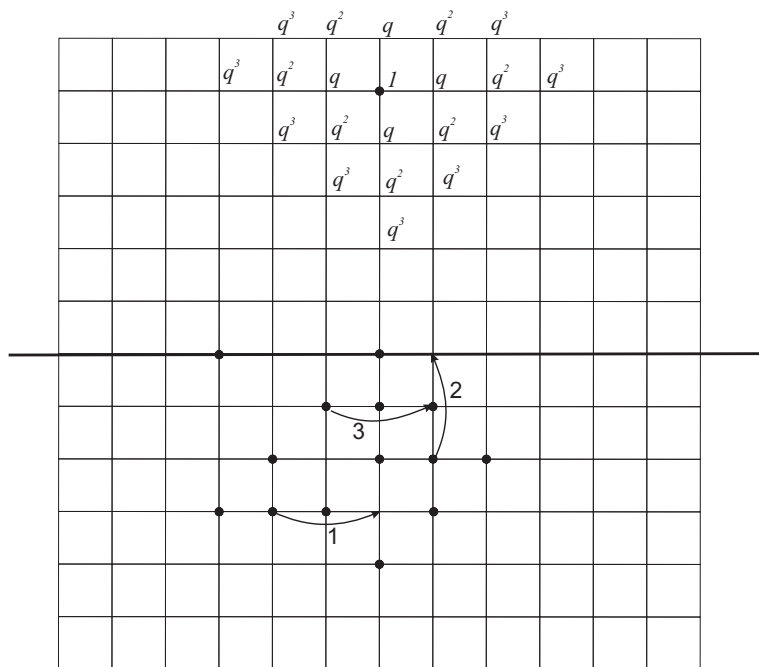
Ez a feladat John Conwaytól származik (nála békák helyett katonák voltak, ld. [2, 154. oldal]), és megoldása, amit Pintér tanár úr az órán elmondott, a következő. Azt igazoljuk, hogy pl. a $(0, 5)$ pontba nem lehet békát eljuttatni. Ehhez legyen $q = (\sqrt{5} - 1)/2$ (az aranymetszés arányszáma), és az (i, j) pontba helyezzük el a $q^{|i|+|j-5|}$ súlyt (ld. az 1. ábrát).

Itt a kitevő az a szám, ahány (minimális számú) lépéssel a $(0, 5)$ pontból eljuthatunk az (i, j) pontba. Azt fogjuk vizsgálni, hogy azon mezők összszűlya hogyan változik, amelyeken béka áll. Ehhez vegyük észre, hogy $q + q^2 = 1$ (ezért választottuk q -t annak aminek), így ha egy ugrás során, pl. az (i, j) pontból az $(i + 2, j)$ pontba ugorva, közeledünk a $(0, 5)$ ponthoz (azaz $i < -1$), akkor az összszűly változása:

$$q^{|i+2|+|j-5|} - q^{|i+1|+|j-5|} - q^{|i|+|j-5|} = q^{|i+2|+|j-5|}(1 - q - q^2) = 0$$

(valóban, (i, j) -ben és $(i + 1, j)$ -ben állt egy-egy béka, és helyettük az ugrás után $(i + 2, j)$ -ben lesz egy béka). Hasonlóan látható, hogy ha egy ugrás során nem közeledünk a $(0, 5)$ ponthoz, akkor az összszűly csökken (pl. ha a fenti összegben $i \geq 0$, akkor az összszűly-változás

$$q^{i+2+|j-5|} - q^{i+1+|j-5|} - q^{i+|j-5|} = q^{i+|j-5|}(q^2 - q - 1) < 0).$$



1. ábra. 3 egymásutáni megengedett béka-lépés

Mármost egyszerű számolás adja, hogy a teljes alsó félsíkon (beleértve a száme-
gyenest is) levő súlyok összege 1, így a kezdeti konfigurációnál a teljes összsúly
legfeljebb 1. Márpedig a békák ugrálása során az összsúly nem nő, így az nem
lehetséges hogy végül olyan konfigurációhoz érkezzünk amelyben béka áll a $(0, 5)$
pontban, hiszen csupán ehhez a békához rendelt súly 1 (és vagy eleve 1-nél kisebb
összsúlyunk volt ha az alsó félsík nem minden mezején állt eredetileg béka, vagy
pedig ha minden mezőn állt egy, akkor a végállásban is lesznek az alsó félsíkon
békák, hiszen e végállásig véges sok lépést tettünk meg).

Természetesen a fenti feladatnak semmi köze nem volt a differenciálegyenlet-
gyakorlaton egyébként vett anyaghoz, viszont a hallgatókban érdeklődést váltott
ki, és figyelmesen követték a diszkussziót. Pintér Lajos máskor is élt az oktatói
szabadság illetően való alkalmazásával, és gyakran hallottunk tőle érdekes feladato-
kat, levezetéseket. Ez annyira megmaradt bennem, hogy későbbi tanári pályámon
magam is gyakran folyamodtam a figyelemfelkeltésnek ehhez az eszközhöz; mind
a mai napig szinte mindig mondok olyan feladatokat ill. a matematika története-
téből olyan eseményeket, példákat, amelyek az éppen tárgyalt anyagrészről jutnak
eszembe, még ha azok szigorúan nem is részei a tárgyalt anyagnak. Gyakran azon-
ban még erre sincs szükség, kis odafigyeléssel sokszor az éppen tárgyalt területen

is találhatunk olyan feladatokat, amelyek a hallgatók érdeklődését felkelthetik ill. fenntarthatják. Az alábbiakban néhány ilyen feladatot tárgyalok az analízis területéről.

A matematikai analízis a matematika valószínűleg leghatékonyabb módszere, amely Newton és Leibniz óta hihetetlen mértékben átalakította a tudományokat és igazi sikertörténet. Viszont ennek elsajátítása csak rendkívül sok gyakorlással lehetséges; differenciálni vagy integrálni csak úgy lehet megtanulni, ha az ember megcsinál sok-sok tucat deriválást és integrálást. Ezt gyakran a hallgatók (és sokszor maguk az oktatók is) unalmasnak, rutinszerűnek tartják, és ha egy csoporttal már 4-5 alkalommal differenciálunk vagy integrálunk, elkerülhetetlenül lankad a figyelem, és a gyakorlat sem éri el célját. Ilyenkor sokat segíthet egy-egy olyan feladat, amely a szokásostól kicsit eltér és megmozgatja a hallgatók fantáziáját.

Annak illusztrálására, hogy a Pintér tanár úrtól ellesett módszernek igenis van jogosultsága az oktatásban elég megemlíteni, hogy én azt már régen elfelejtettem milyen feladatokat tárgyaltunk 1977 tavaszán differenciálegyenlet-gyakorlatokon, viszont a békás feladatra és annak megoldására máig emlékszem.

1. Oroszlán és szelídítője

Ez a feladat a

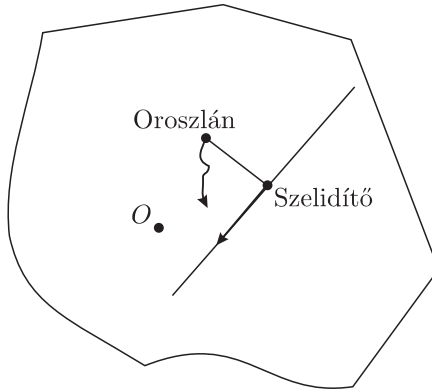
$$\sum \frac{1}{n} = \infty, \quad \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

összegek alkalmazását illusztrálja. A feladatot először valószínűleg szintén Pintér Lajostól hallottam, eredetileg Richard Rado egy problémája volt.

Egy megvadult oroszlán és szelídítője egyforma maximális sebességgel tudnak mozogni egy ketrecben. A feladat az, hogy a szelídítő hogyan kerülheti el, hogy az oroszlán valaha is elkapja (mindkettőt pontszerűnek tételezzük fel).

A feladat egyszerű lenne ha az egész sík a szelídítő rendelkezésére állna, hiszen akkor az oroszlánnal átellenes irányban maximális sebességgel futva egy egyenes mentén a szelídítő, az oroszlán soha nem érhetné utol őt. A nehézség abból ered, hogy a ketrec behatárolja a mozgásukat.

A megoldás a következő. Feltehető, hogy mindkettejük maximális sebessége 1. Legyen kezdetben a szelídítő az origóban, és tegyük fel, hogy az origó körüli R sugarú körlap is még a ketrecben van. Mármost egy kis r pozitív számot választva a szelídítő $n = 1, 2, 3, \dots$ -ra rendre menjen r/n ideig merőlegesen az őt az oroszlánnal összekötő szakaszra maximális sebességgel úgy, hogy az origóhoz a lehető legközelebb kerüljön (ez utóbbi feltétel kijelöli a mozgás irányát a kettejüket összekötő szakaszra merőleges egyenesen). Pontosabban, itt ütemezéssel $n = 1, 2, \dots$ lépésről



2. ábra.

beszélünk, és az n -edik lépésben mozogjon a szelídítő arra a szakaszra merőlegesen, amely őt az előző lépés megtétele után köti össze az oroszlánnal (ld. 2. ábra).

Az biztos, hogy az oroszlán nem fogja semelyik lépésben elkapni a szelídítőt, hiszen ha ez nem történt meg n lépés után, akkor kettejük távolsága pozitív, és mivel a szelídítő az $(n+1)$ -edik lépésben egy, az őt az oroszlánnal összekötő szakaszra merőlegesen egyenesen mozog, távolságuk pozitív lesz az $(n+1)$ -edik lépés után is. Eszerint ha a fenti stratégia alkalmazható úgy, hogy a szelídítő soha nem ütközik a ketrec falába, akkor elkerüli azt, hogy az oroszlán elkapja, hiszen a fenti lépések során eltelt idő

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n} = r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Azt kell tehát csak igazolnunk, hogy a fenti stratégiával soha nem ütközik a szelídítő a ketrec falába, és ehhez elég megmutatni, hogy az origótól vett távolsága mindig kisebb R -nél. Legyen d_n az origótól vett távolsága n lépés után; d_0 a kezdeti távolság. Ekkor $n = 0, 1, 2, \dots$ -re vagy $d_n \leq r$ és így $d_{n+1} \leq d_n + r/(n+1) \leq 2r$, vagy pedig $d_n > r$ és ekkor, mint azt elemi geometriai megfontolás mutatja,

$$d_{n+1} \leq \sqrt{d_n^2 + (r/(n+1))^2} \leq d_n + r^2/2d_n(n+1)^2 \leq d_n + r/2(n+1)^2.$$

Tehát mindenképpen

$$d_n \leq 2r + \frac{r}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2},$$

ami R -nél kisebb ha r elég kicsi (felhasználva, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2,$$

adódik, hogy az $r = R/3$ választás megfelelő).

Egy másik megoldásra ld. [1], 1. feladatát.

2. Csigá és a gonosz fiú

Ez a feladat az

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \rightarrow \infty \quad \text{ha } x \rightarrow \infty$$

illusztrálására szolgál.

Egy 1 m hosszú gumiszalag egyik vége rögzített, és ebben a végében van egy csiga, amely 1 m/h sebességgel tud mászni. A szalag másik végében a csiga számára valami ínycsalat van elhelyezve, amit a csiga szeretne megkaparintani. Viszonyt egy gonosz fiú elkezd húzni a szalag szabad végét 10000 m/h sebességgel. A kérdés az, hogy végül a csiga hozzájut-e az ínycsalathoz, azaz eléri-e a szalag másik, mozgó végét?

A megoldáshoz legyen a szalag rögzített vége az origóban, a fiú szaladjon az x tengelyen pozitív irányban, és a t időpontban legyen a csiga helyzete az $y(t)$ pontban. Tehát $y(0) = 0$, és a fiú helyzete a t időpontban $1 + 10000t$. Vegyük észre, hogy a csiga valódi sebessége két komponensből áll: egyrészt a saját 1 m/h sebességéből, másrészt abból a sebességből, amivel a mögötte levő szalagrész nyúlik. Arányos nyúlást feltételezve ez $y(t)/(1 + 10000t)$ -szer akkora mint a fiú sebessége, tehát a csiga sebessége

$$1 + 10000 \frac{y(t)}{1 + 10000t} \quad (\text{m/s}).$$

Tudjuk, hogy ez a hely-idő függvény deriváltjával megegyezik, tehát

$$y'(t) = 1 + 10000 \frac{y(t)}{1 + 10000t}.$$

Osszunk végig $(1 + 10000t)$ -vel:

$$\frac{y'(t)}{1 + 10000t} - 10000 \frac{y(t)}{(1 + 10000t)^2} = \frac{1}{1 + 10000t},$$

és vegyük észre, hogy itt a bal oldalon az $y(t)/(1 + 10000t)$ deriváltja áll, míg a jobb oldalon levő kifejezés $\ln(1 + 10000t)/10000$ deriváltja. Tehát

$$\left(\frac{y(t)}{1 + 10000t} \right)' = \left(\frac{\ln(1 + 10000t)}{10000} \right)'.$$

Mindkét oldalt 0-tól T -ig integrálva és figyelembe véve, hogy $y(0) = 0$ és $\ln 1 = 0$, kapjuk, hogy

$$\frac{y(T)}{1 + 10000T} = \frac{\ln(1 + 10000T)}{10000}$$

(ez a formula integrálás nélkül is adódik abból, hogy ha két függvény deriváltja egyenlő, akkor ők csak konstansban különböznek). A bal oldalon éppen a csiga ill. a fiú (T időpillanbeli) origótól vett távolságának a hányadosa áll, és az eredeti kérdés az, hogy ez valamikor lesz-e 1. Mármost a jobb oldal folytonosan nő 0-tól a végtelenig mialatt T befutja a $[0, \infty)$ intervallumot, így lesz egy olyan T időpont (ez éppen $T = (e^{10000} - 1)/10000$), amikor az értéke éppen 1. Tehát ebben az időpillanatban a csiga utoléri a szalag másik végét.

3. Körlap fedése sávokkal

Ez a feladat az alábbi formula alkalmazására szép példa: ha adott egy nemnegatív $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon és a görbét megforgatjuk az x tengely körül, akkor az így kapott forgásfelszín

$$(1) \quad 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Igazolandó, hogy egy 100 sugarú körlapot nem lehet 199 db 1 szélességű sávval lefedni.

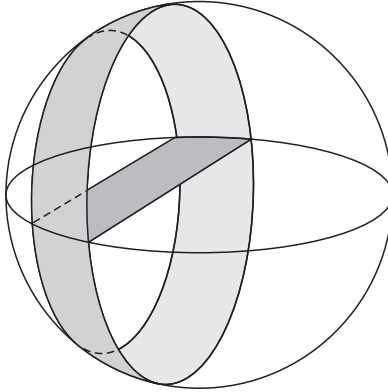
Jegyezzük meg, hogy 200 db 1 szélességű sávval könnyű lefedni pl. az origó körüli 100 sugarú körlapot; ehhez nem kell mást tennünk, mint hogy az $x = j$, $j = -100, -99, \dots, 99, 100$ egyenesek által meghatározott sávokat tekintjük.

Általában az eredmény, amit igazolunk, az az, hogy ha $d_1, \dots, d_k$ szélességű sávokkal lefedhető egy R sugarú körlap, akkor

$$2R \leq d_1 + \dots + d_k.$$

Az igazoláshoz legyen az R sugarú D körlap középpontja az origó, és képzeljünk el egy G gömbfelületet ezen körlap fölé (pontosabban, a körlap határa legyen a gömbfelület egy főköre). Ha van egy d szélességű S sávunk, akkor ennek D -vel vett metszetét vetítsük fel az G gömbfelületre (ld. a 3. ábrát).

Így egy gömbgyűrűt kapunk a gömb felületén, amelynek felszínét könnyen kiszámíthatjuk az (1) formulával. Valóban, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az S sáv merőleges az x tengelyre, azaz S azon (x, y) pontokból áll, amelyekre $a \leq x \leq b$ valamely $-R \leq a < b \leq R$, $b - a = d$ számokkal. Ekkor a



3. ábra.

felvetítéssel kapott gömbgyűrű nem más, mint az $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [a, b]$, függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott felület, így ennek felszínét (1) adja az $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ választással. De itt

$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} = R,$$

ezért a kérdéses felszín $2\pi R(b - a) = 2\pi d$. Ami igazán meglepő ebben a formulában az az, hogy a felszín nem függ attól, hogy a gömbgyűrű hol helyezkedik el, a felszín csak a gömbgyűrű magasságától függ (ennek a ténynek az ún. hengeres vetítéssel kapcsolatos következményeire vonatkozóan ld. pl. a [3] dolgozatot). Mármost ha a $d_1, \dots, d_k$ szélességű $S_1, \dots, S_k$ sávok lefedik az R sugarú D körlapot, akkor a megfelelő $S_i \cap D$ metszetek felvetítettjei lefedik a G gömbfelületet, így összfelszínük legalább akkora, mint G felszíne, azaz $4\pi R^2$. A fentiekben láttuk, hogy $S_i \cap D$ felvetítettjének felszíne legfeljebb $2\pi d_i R$ (itt egyenlőség van, ha az S_i sáv mindkét oldala metszi a D körlapot), ezért végkonklúzióként felírhatjuk, hogy

$$2\pi d_1 R + \dots + 2\pi d_k R \geq 4\pi R^2,$$

amiből az állítás $2\pi R$ -rel való osztással adódik.

Végezetül megemlítünk még két hasonló feladatot.

4. Téglalaplefedés

Ez az $(e^z)' = e^z$ azonosság egy alkalmazására lehet példa.

Ha egy téglalap felbontható olyan téglalapokra, amelyek valamelyik oldalhossza egész szám, akkor az eredetinek is valamelyik oldalhossza egész szám.

Ehhez integráljuk az $e^{i2\pi(x+y)}$ függvényt a fenti téglalapokon, és használjuk fel az $(e^z)' = e^z$ azonosságot (valós ill. képzetes részeket véve elkerülhető a komplex függvények használata, de ekkor a megoldás kevésbé elegáns. Több más megoldás található a [4] cikkben).

5. Afrikai szafári

Ez a feladat függvénytranszformációkkal kapcsolatban említhető meg.

Valahány oázisban annyi üzemanyag van elhelyezve, amely éppen elég egy körútra közöttük. Ekkor valamelyik oázisból elindulva a körút megtehető.

A megoldás abból áll, hogy kiindulunk valamelyik oázisból, felrajzoljuk a „kocsiban levő üzemanyag”–„megtett út” grafikont, és észreveszük, hogy más oázisból elindulva a megfelelő grafikon az eredetinek egy transzformáltja. Mármost a feladat az, hogy ez a transzformáció lehet olyan, hogy utána a grafikon minden pontja a „megtett út” tengelyen, vagy a fölött van. Egy másik megoldásra ld. az [1] könyv 7. feladatát.

Irodalom

- [1] B. Bollobás, *The art of mathematics*, Cambridge University Press, 2007.
- [2] Csákány Béla, *Matematikai játékok*, Polygon, 2005.
- [3] Totik Vilmos, Lépjünk ki a térbe!, *Polygon*, **2**(1993), 104–111.
- [4] S. Wagon, Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle, *Amer. Math. Monthly*, **94**(1987), 601–617.

Totik Vilmos, TKI Analízis és Sztochasztika Kutatócsoport, SZTE Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1., totik@math.u-szeged.hu