

Az $f(x) = 0$ egyenlet gyökének közelítése a húr-, a szelő- és az érintőmódszerrel

MÓRICZ FERENC

1. Bevezetés

Az *algebra alaptétele* szerint tetszőleges $P(x) = 0$ egyenletnek, ahol $P(x)$ n -edfokú polinom valós együtthatókkal:

$$P(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1;$$

a multiplicitásokkal számítva pontosan n *gyöke* van a komplex számok testében, legyenek ezek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Az is jól ismert, hogy a $P(x)$ polinom előállítható az $(x - \xi_k)$ ún. *gyöktényezők* szorzataként:

$$P(x) = a_n \prod_{k=1}^n (x - \xi_k).$$

Továbbá, ha valamely ξ gyök komplex szám, akkor ξ komplex konjugáltja, amit $\bar{\xi}$ -sal szokás jelölni, szintén gyöke a szóbanforgó egyenletnek; ξ és $\bar{\xi}$ multiplicitása is megegyezik.

Emlékeztetünk arra, hogy a $P(x) = 0$ egyenletnek ξ akkor m -szeres *multiplicitású gyöke*, ha $P(x)$ maradék nélkül osztható az $(x - \xi)^m$ gyöktényezővel, de az $(x - \xi)^{m+1}$ tényezővel már nem osztható maradék nélkül. Jól ismert, hogy a $P(x) = 0$ egyenletnek ξ akkor és csak akkor m -szeres multiplicitású gyöke, ha

$$P(\xi) = P'(\xi) = P''(\xi) = \dots = P^{(m-1)}(\xi) = 0, \quad \text{de} \quad P^{(m)}(\xi) \neq 0,$$

ahol $P'(\xi)$ a $P(x)$ polinom

$$P'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

differenciálhányadosa az $x := \xi$ helyen, $P''(\xi)$ a második differenciálhányadosa, $\dots, P^{(m)}(\xi)$ pedig az m -edik differenciálhányadosa.

A $P(x) = 0$ egyenlet megoldását az algebraiban úgy definiálják, mint olyan eljárást, amely az egyenlet $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ gyökeit a $P(x)$ polinom $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ együtthatóiból kizárólag a négy alpművelet (összeadás, kivonás, szorzás és osztás) és pozitív egész kitevőjű gyökvonás véges számú lépésben történő alkalmazásával adja meg. Például, az elsőfokú $ax + b = 0$, $a \neq 0$, egyenlet egyetlen gyöke $\xi = -b/a$; a másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, egyenlet gyökeit a középiskolából jól ismert gyökképlettel számítjuk:

$$\xi_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

amelyben a négy alpművelet mellett még négyzetgyökvonásra is szükség van. Az egyetemi algebra előadásaiból ismerjük, hogy tetszőleges harmadfokú egyenlet gyökeit *Cardano gyökképletével* számíthatjuk ki a négy alpművelet, négyzet- és köbgyökvonás véges számú alkalmazásával. Sőt, *Ferrari módszerével* tetszőleges negyedfokú egyenlet megoldása visszavezethető harmadfokú egyenlet megoldására.

Viszont a híres *Ruffini–Abel tétel* szerint az általános ötödfokú és ennél magasabb fokú egyenletek gyökei már nem minden esetben számíthatók ki a négy alpművelet és egész kitevőjű gyökvonás véges számú lépésben történő alkalmazásával.

Megjegyezzük, hogy már a harmad- és negyedfokú egyenletek algebrai úton történő megoldása is többnyire olyan számítási és egyéb nehézséggel jár, hogy a műszaki- és természettudományi alkalmazásokban egyszerűbb és hatékonyabb numerikus megoldási módszereket használni már ezen egyenletek esetében is. Gondoljunk például a harmadfokú egyenlet azon esetére, ami az irodalomban „*casus irreducibilis*” néven ismeretes. Ebben az esetben a harmadfokú egyenletnek három különböző valós gyöke van, de a valós számok körében maradván, Cardano gyökképletével ezekhez nem lehet eljutni. (Lásd részletesen az [5] tankönyvben.)

A cikkünk címében jelzett három numerikus módszer mindegyike alkalmas tetszőleges fokszámú egyenlet gyökeinek előre megadott pontossággal közelítő meghatározására. Sőt, ezek a numerikus módszerek alkalmasak az ún. *transzcendens egyenletek* megoldására is, például az

$$x - \cos x = 0, \quad e^x - 2x = 0, \quad \log_2 x + \sqrt{x} - 2 = 0$$

egyenletek gyökének kiszámítására. Az egyetemi Kalkulus előadásaiból jólismert, hogy a trigonometrikus-, exponenciális- és logaritmus függvények értékét, néhány kivételes helytől eltekintve, csak végtelen hatványsorral tudjuk pontosan megadni.

Cikkünkben az $f(x) = 0$ egyenlet valamely ξ gyökének közelítő meghatározásával fogunk foglalkozni, ahol $f(x)$ valós értékű függvény, amely ξ környezetében

folytonos; gyakran még azt is feltesszük, hogy ott $f(x)$ egyszer vagy kétszer differenciálható is.

2. A húrmódszer

Ez egyike a legrégebb idők óta használt gyökközelítő módszereknek. A húrmódszer latin neve: „*regula falsi*”, amely magyarra úgy fordítható, hogy „a helytelen (vagy téves) helyzet szabálya” (az angol nyelvi fordítása: „rule of false position”). Az elnevezés arra utal, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet ξ gyökét keresve, az attól esetleg távolra eső a és b közelítésekből kiindulva lépésenként egyre közelebb jutunk a keresett ξ gyök pontos értékéhez.

A húrmódszer *geometriai leírása* a következő. Legyen az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya az $[a, b]$ zárt intervallum. Feltesszük, hogy $f(x)$ folytonos és az intervallum két végpontjában ellenkező előjelű értéket vesz fel, azaz $f(a)f(b) < 0$. Mivel zárt intervallumon folytonos függvény minden közbeeső függvényértéket felvesz, ezért $f(x)$ -nek van *zérushelye* az (a, b) nyitott intervallumban, amely tehát az $f(x) = 0$ egyenlet *gyöke*. Tehát a „gyök” és „zérushely” szavakat szinonim értelemben használjuk. Azt is feltesszük még, hogy $f(x)$ -nek csak egyetlen zérushelye van (a, b) -ben, amit ξ -vel jelölünk.

Az $f(x)$ függvény ξ zérushelyét az 1. Ábrán látható módon közelítjük. Legyen $a_0 := a$ és $b_0 := b$. Az $y = f(x)$ grafikon $(a_0, f(a_0))$ és $(b_0, f(b_0))$ pontjait húrral kötjük össze (innen jön a módszer magyar neve), amelynek egyenlete

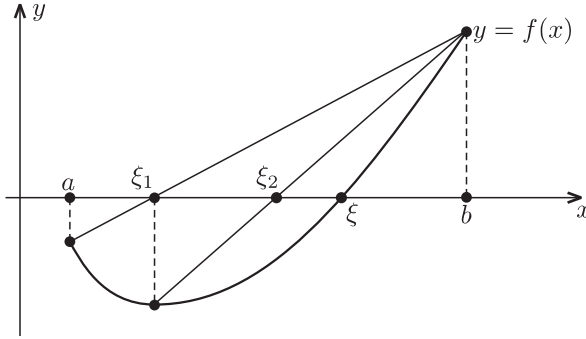
$$y - f(x_0) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}(x - a_0).$$

Ennek az x -tengellyel való ξ_1 metszéspontját (ahol $y = 0$) meghatározzuk:

$$-f(x_0) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}(\xi_1 - a_0),$$

amelyből kapjuk, hogy

$$(2.1) \quad \xi_1 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$



1. Ábra

Ha esetleg $f(\xi_1) = 0$, akkor ξ_1 a keresett zérushely és az eljárás befejeződik.

Ha $f(\xi_1) \neq 0$ (ez az általános eset), akkor $f(\xi_1)$ előjelét tekintve két eset lehetséges:

(i) Ha $f(a_0)f(\xi_1) > 0$ (ez az eset az 1. Ábrán), akkor legyen $a_1 := \xi_1$ és $b_1 := b$.

(ii) Ha $f(a_0)f(\xi_1) < 0$, akkor legyen $a_1 := a_0$ és $b_1 := \xi_1$.

Ezután az előző eljárást megismételjük az $[a_1, b_1]$ intervallumon és ξ_2 -vel jelöljük az x -tengely azon pontját, amelyben az $y = f(x)$ grafikon $(a_1, f(a_1))$ és $(b_1, f(b_1))$ pontjait összekötő húr metszi. A (2.1) képlethez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\xi_2 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}.$$

Ha esetleg $f(\xi_2) = 0$, akkor ξ_2 a keresett zérushely és az eljárás befejeződik.

Ha $f(\xi_2) \neq 0$, akkor az eljárást az előzőek szerint megismételjük az $f(\xi_2)$ előjelétől függő $[a_2, b_2]$ szűkebb intervallumon. Az általános esetben az eljárás véges számú lépésben nem ér véget. A fentiek analógiájára az $(n + 1)$ -edik lépésben azt kapjuk, hogy

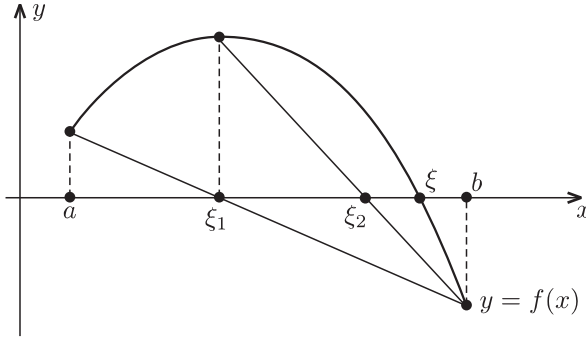
$$(2.2) \quad \xi_{n+1} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ezáltal egymásba skatulyázott $[a_n, b_n]$ intervallumok olyan sorozatához jutunk, amelyek mindegyike tartalmazza a keresett ξ zérushelyet. Később az 1. Tételben bizonyítani fogjuk, hogy az $[a_n, b_n]$ intervallum hossza 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi.$$

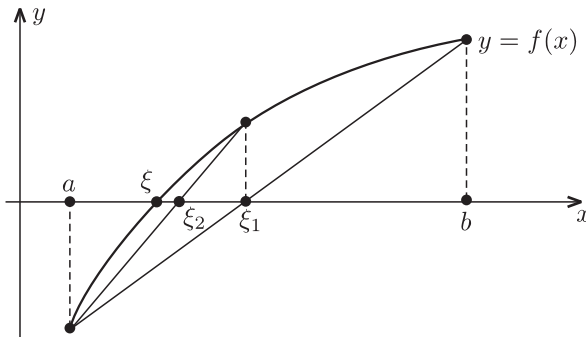
Megjegyezzük, hogy az 1. Ábrán látható függvény konvex az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) < 0$. Az eljárás során a kiinduló $[a, b]$ intervallum jobboldali végpontja végig

helyben (fixen) marad: $b_n := b$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Hasonló a helyzet, ha $f(x)$ konkáv az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) > 0$ (lásd a 2. Ábrán). Az eljárás során most is a kiinduló $[a, b]$ intervallum jobboldali végpontja marad végig helyben.

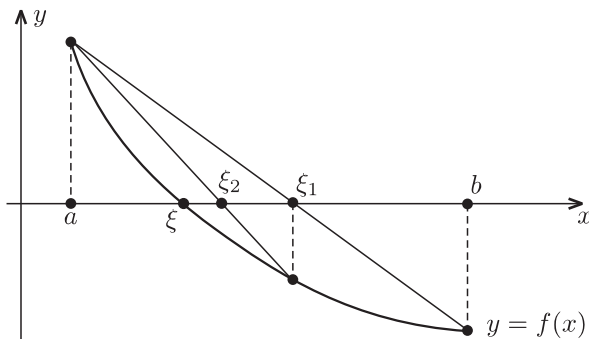


2. Ábra

Abban az esetben viszont, ha az $f(x)$ függvény konkáv az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) < 0$, akkor az eljárás során a kiinduló intervallum baloldali végpontja marad végig helyben: $a_n := a$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (lásd a 3. Ábrán). Hasonló a helyzet akkor is, ha az $f(x)$ függvény konvex az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) > 0$ (lásd a 4. Ábrán). Megjegyezzük, hogy a 3. Ábrán levő függvény monoton növekvő, a 4. Ábrán levő függvény pedig monoton csökkenő, de ennek nincs jelentősége a húrmódszer szempontjából.

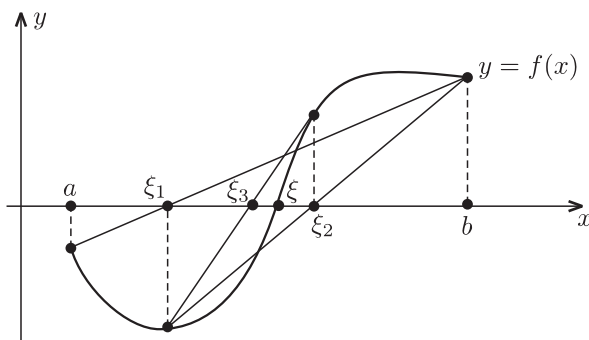


3. Ábra



4. Ábra

Ha az $f(x)$ függvény viselkedése nem annyira „szabályos”, mint az 1–4. Ábrákon, akkor az eljárás során kapott $\xi_1, \xi_2, \dots$ közelítések egyik része a baloldali (a, ξ) intervallumba, másik része pedig a jobboldali (ξ, b) intervallumba esik (lásd az 5. Ábrán).



5. Ábra

Már a fentiek szerint is kézenfekvő, hogy az eljárással kapott $(\xi_n : n = 1, 2, \dots)$ ún. *iterációs sorozat* az $f(x) = 0$ egyenlet ξ gyökéhez konvergál. A latin eredetű *iteráció* szó jelentése: ismétlés, amely egy eljárás rutinszerűen ismételt végrehajtására vonatkozik. Az 1. Tételben a húrmódszerrel kapott (ξ_n) sorozat *konvergenciáját* bizonyítjuk.

1. Tétel. *Ha az $f(x)$ függvény folytonos $[a, b]$ -ben, $f(a)f(b) < 0$ és ott $f(x)$ -nek csak egyetlen ξ zérushelye van, akkor a (ξ_n) iterációs sorozat vagy véges sok tagból áll, amelynek utolsó tagja éppen ξ , vagy pedig végtelen sok tagból áll és ξ -hez konvergál.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy csak a második esettel kell foglalkoznunk, amikor a (ξ_n) sorozat végtelen sok tagból áll. A részletes bizonyítást csak az 1. Ábrán látható $f(x)$ függvény esetében adjuk meg. Mivel ebben az esetben $a_n = \xi_n$ és $b_n = b$, $n = 1, 2, \dots$, ezért (2.2) szerint

$$\xi_{n+1} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{\xi_n f(b) - b f(\xi_n)}{f(b) - f(\xi_n)},$$

amelyből rendezéssel nyerjük, hogy

$$(2.3) \quad (\xi_{n+1} - \xi_n)f(b) + (b - \xi_{n+1})f(\xi_n) = 0.$$

Az 1. Ábrán jól látható, hogy

$$a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi.$$

A Kalkulusból ismert tétel szerint minden monoton növvő, korlátos sorozat konvergens. Ezért a (ξ_n) sorozat konvergens, amelynek határértékét ξ_* -gal jelöljük:

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi_*.$$

Az $f(x)$ függvény folytonossága következtében a függvényértékek $(f(\xi_n))$ sorozata is konvergens:

$$(2.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n) = f(\xi_*).$$

Ha (2.3)-ban n -et ∞ -be tartatjuk, akkor az

$$f(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_{n+1} - \xi_n) + (b - \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = 0$$

összefüggéshez jutunk. Ebből pedig (2.4) és (2.5) alapján azt kapjuk, hogy

$$(b - \xi_*)f(\xi_*) = 0.$$

Mivel $b - \xi_* \geq b - \xi > 0$, ez csak úgy lehetséges, ha $f(\xi_*) = 0$. Ismét figyelembe véve (2.4)-et, ez azt jelenti, hogy $\xi_* = \xi$. Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi.$$

■

Teljesen hasonló gondolatmenettel bizonyíthatjuk a konvergenciát a 2–4. Ábrákon látható $f(x)$ függvényekre is. Az 5. Ábrán látható általános esetben a konvergencia bizonyítása bonyolultabb, amit az érdeklődő olvasó az [1] jegyzetben találhat meg.

3. A $\xi_n \rightarrow \xi$ konvergencia sebességének vizsgálata

Ha az 1. Tételben szereplő $f(x)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható, akkor a $\xi_n - \xi$ eltérésre jól használható képletet tudunk adni, amelyet a következő tételben bizonyítunk.

2. Tétel. Legyen az $f(x)$ függvény folytonos $[a, b]$ -ben és kétszer folytonosan differenciálható (a, b) -ben. Ha ξ az $f(x) = 0$ egyenlet egyetlen és egyszeres gyöke (a, b) -ben és $f(a)f(b) < 0$, akkor minden n -re léteznek olyan $\alpha_n, \beta_n \in (a, b)$ helyek, amelyekre

$$(3.1) \quad \frac{\xi_{n+1} - \xi}{(a_n - \xi)(b_n - \xi)} = \frac{f''(\alpha_n)}{2f'(\beta_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Emlékeztetünk arra, hogy akkor mondjuk, hogy ξ egyszeres gyöke az $f(x) = 0$ egyenletnek, ha

$$(3.2) \quad f(\xi) = 0 \quad \text{és} \quad f'(\xi) \neq 0.$$

A 2. Tétel bizonyításában a Kalkulus egyetemi előadásából ismert *Cauchy középértéktételt* fogjuk alkalmazni, amelyet az alábbi 1. Lemmában fogalmazunk meg.

1. Lemma. Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ olyan függvények, amelyek

- (i) folytonosak $[a, b]$ -ben,
- (ii) differenciálhatók (a, b) -ben,
- (iii) nem létezik olyan $x \in (a, b)$ hely, amelyben $f'(x) = g'(x) = 0$, és
- (iv) $f(a) \neq f(b)$.

Ekkor létezik olyan $\beta \in (a, b)$ hely, amelyre

$$(3.3) \quad \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(\beta)}{f'(\beta)}.$$

Megjegyezzük, hogy *Lagrange közismert középértéktétele* (3.3)-nak azon speciális esete, amikor $f(x) = x$. Az érdeklődő olvasó Cauchy középértéktételének bizonyítását megtalálhatja a [2] jegyzetben.

2. Tétel bizonyítása. Az írásmód egyszerűsítése végett az $n = 0$ esetben bizonyítunk, amikor $a_0 = a$ és $b_0 = b$. A (2.1) képlet szerint

$$\xi_1 - \xi = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{(a - \xi)f(b) - (b - \xi)f(a)}{f(b) - f(a)},$$

amelyből egyszerűen adódik, hogy

$$(3.4) \quad \frac{\xi_1 - \xi}{(a - \xi)(b - \xi)} = \frac{\frac{f(b)}{b - \xi} - \frac{f(a)}{a - \xi}}{f(b) - f(a)}.$$

A következőkben meggyőződünk arról, hogy az $f(x)$ és a

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x-\xi}, & \text{ha } x \neq \xi, \\ f'(\xi), & \text{ha } x = \xi, \end{cases}$$

függvényekre teljesülnek Cauchy középértéktételének (i)–(iv) feltételei.

(i) Nemcsak $f(x)$, hanem $g(x)$ is folytonos $[a, b]$ -ben, ami az $x \neq \xi$ esetben nyilvánvaló; míg az $x = \xi$ esetben az alábbi megfontolás bizonyítja ezt: (3.2) és a fenti definíció szerint

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{x-\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) =: g(\xi).$$

(ii) Nemcsak $f(x)$, hanem $g(x)$ is differenciálható (a, b) -ben. Az utóbbi állítás nyilvánvaló, ha $x \neq \xi$, mivel a hányados szabály szerint

$$(3.5) \quad g'(x) = \frac{f'(x)(x-\xi) - f(x)}{(x-\xi)^2}, \quad x \neq \xi.$$

Az $x = \xi$ esetben $g'(\xi)$ létezését a következőképpen látjuk be. Feltevés szerint $f(x)$ kétszer differenciálható (a, b) -ben. Ezért a *Taylor formula* szerint

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{1}{2}f''(\alpha(x))(x-\xi)^2, \quad x \in (a, b),$$

ahol $\alpha(x)$ az x és ξ helyek közé esik. Mivel $f(\xi) = 0$, ezért a fentebbi Taylor formulából adódik, hogy

$$(3.6) \quad f(x) - f'(\xi)(x-\xi) = \frac{1}{2}f''(\alpha(x))(x-\xi)^2.$$

Ezen előkészület után $g'(\xi)$ létezése már egyszerűen bizonyítható. Definíció és (3.6) szerint írhatjuk, hogy

$$(3.7) \quad \begin{aligned} g'(\xi) &:= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x) - g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\frac{f(x)}{x-\xi} - f'(\xi)}{x-\xi} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - (x-\xi)f'(\xi)}{(x-\xi)^2} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{2}f''(\alpha(x)) = \frac{1}{2}f''(\xi), \end{aligned}$$

mivel $\alpha(x)$ az x és ξ közé esik és feltevés szerint $f''(x)$ folytonos (a, b) -ben.

(iii) Az $x = \xi$ esetben $f'(\xi) \neq 0$; míg az $x \neq \xi$ esetben $g'(x) = 0$ és $f'(x) = 0$ egyidejűleg nem állhat fenn, mivel ebből (3.5) szerint az következne, hogy

$$0 = g'(x) = \frac{f'(x)(x-\xi) - f(x)}{(x-\xi)^2} = \frac{f(x)}{(x-\xi)^2}, \quad \text{azaz } f(x) = 0.$$

Mivel $x \neq \xi$, ez ellentmond azon feltevésünknek, hogy ξ az egyetlen zérushelye $f(x)$ -nek (a, b) -ben.

(iv) $f(a) \neq f(b)$ feltevésünk szerint teljesül.

Tehát alkalmazhatjuk Cauchy középértéktételét a (3.4)-beli hányadosra, amely szerint létezik olyan $\beta \in (a, b)$, amelyre

$$(3.8) \quad \frac{\xi_1 - \xi}{(a - \xi)(b - \xi)} = \frac{g'(\beta)}{f'(\beta)} = \begin{cases} \frac{f'(\beta)(\beta - \xi) - f(\beta)}{f'(\beta)(\beta - \xi)^2}, & \text{ha } \beta \neq \xi, \\ \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}, & \text{ha } \beta = \xi; \end{cases}$$

ahol a (3.5) és (3.7) összefüggéseket használtuk fel.

Ha $\beta \neq \xi$, akkor (3.6)-hoz hasonlóan létezik β és ξ között olyan α hely, amelyre

$$0 = f(\xi) = f(\beta) + f'(\beta)(\xi - \beta) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(\xi - \beta)^2,$$

és ebből következik, hogy

$$f'(\beta)(\beta - \xi) - f(\beta) = \frac{1}{2}f''(\alpha)(\xi - \beta)^2.$$

Ezt (3.8)-ban a kapcsos kezdőzárójel utáni első tört számlálójába helyettesítve adódik, hogy a $\beta \neq \xi$ esetben

$$\frac{\xi_1 - \xi}{(a - \xi)(b - \xi)} = \frac{\frac{1}{2}f''(\alpha)(\xi - \beta)^2}{f'(\beta)(\beta - \xi)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\beta)},$$

ami éppen a bizonyítandó (3.1) állítás az $n = 1$ és $\beta \neq \xi$ esetben. Ha esetleg $\beta = \xi$ lenne, akkor (3.1) triviálisan fennáll az $\alpha = \beta := \xi$ választással (lásd (3.8)-ban a kapcsos kezdőzárójel utáni második törtet). Ezzel (3.1)-et teljesen bebizonyítottuk. ■

Bevezetjük az

$$(3.9) \quad \varepsilon_n := \xi_n - \xi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

jelölést, amit az n -edik *közelítés hibájának* neveziünk. A Kalkulusban ε -nal általában „kicsi” abszolút értékű számokat szokás jelölni. A következő tételben az $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, konvergencia sebességére adunk becslést, amely a 2. Tétel korollárium.

3. Korollárium. A 2. Tétel feltételei mellett, ha

$$(3.10) \quad m_1 := \inf_{x \in (a,b)} |f'(x)| > 0 \quad \text{és} \quad M_2 := \sup_{x \in (a,b)} |f''(x)| < \infty,$$

akkor

$$(3.11) \quad |\varepsilon_{n+1}| \leq q^n |\varepsilon_1|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{ahol} \quad q := \frac{M_2(b-a)}{2m_1}.$$

Bizonyítás. (3.1) és (3.10) szerint

$$|\xi_{n+1} - \xi| \leq \frac{M_2}{2m_1} (\xi - a_n)(b_n - \xi) \leq \frac{M_2}{2m_1} (b-a) |\xi_n - \xi|,$$

ami a (3.9) és (3.11)-beli jelölésekkel az

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq q |\varepsilon_n|, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

alakba írható. Ennek alapján (3.11) teljes indukcióval bizonyítható:

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq q(q|\varepsilon_{n-1}|) = q^2 |\varepsilon_{n-1}| \leq q^3 |\varepsilon_{n-2}| \leq \dots \leq q^n |\varepsilon_1|.$$

■

Ha szűkítjük az eredetileg adott $[a, b]$ intervallumot, akkor M_2 értéke csökken (és „sup” helyett „max” írható, mivel az (a, b) zárt részintervallumain $f''(x)$ folytonos), míg m_1 értéke nő (és „inf” helyett „min” írható). Ezáltal elérhetjük, hogy egy szűkebb intervallumra áttérve q értéke már 1-nél kisebb legyen (3.11)-ben. Ennek következtében a *húrmódszer konvergens*, amin azt értjük, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \quad \text{azaz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi.$$

A fenti megfontolásainkat érdemes pontosítani abban a speciális esetben, amikor az $f(x)$ függvény konvex vagy konkáv, mivel ekkor az iteráció során az $[a, b]$ intervallum egyik végpontja fixen marad.

4. Korollárium. Ha az $f(x)$ függvény konvex vagy konkáv, akkor a 2. Tétel feltételei mellett

$$(3.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \varepsilon_0, \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_0 = b - \xi \quad \text{vagy} \quad \xi - a.$$

Bizonyítás. Az 1. Ábrán látható függvény esetében bizonyítunk. Most (3.1) szerint

$$\frac{\xi_{n+1} - \xi}{(\xi_n - a)(b - \xi)} = \frac{f''(\alpha_n)}{2f'(\beta_n)},$$

amely a (3.9)-ben bevezetett jelöléssel az

$$(3.13) \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{f''(\alpha_n)}{2f'(\beta_n)}(b - \xi)$$

alakba írható. Mivel a húrmódszer konvergencia és feltevés szerint $f'(x)$ és $f''(x)$ folytonos, ezért (3.12) az $n \rightarrow \infty$ határátmenettel következik (3.13)-ból. ■

4. A szelőmódszer

Az eddig tárgyalt húrmódszer általában *nem stacionárius*, amin azt értjük, hogy az egyes iterációs lépések során az iterációs függvény alakja (az a képlet, amellyel számolunk) megváltozhat (lásd az 5. Ábrán). Az 1–4. Ábrákon látható speciális esetekben a húrmódszer stacionárius, de a konvergencia sebessége túl lassú. Ezek a hátrányok indokolják az ún. szelőmódszer bevezetését.

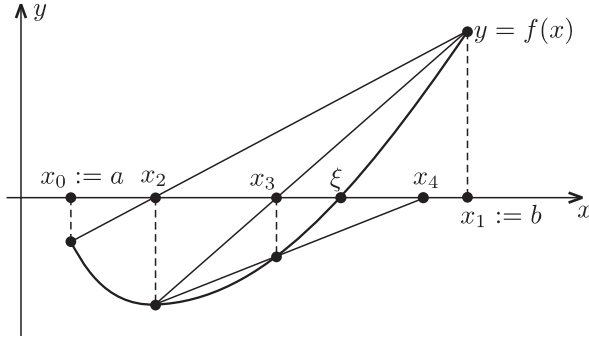
A *szelőmódszert* (angolul: secant method) úgy definiáljuk, hogy a húrmódszerrel kapott első képlettel, azaz (3.1)-gyel, mint egységes képlettel számolunk tovább, és nem vizsgáljuk az $f(\xi_n)$, $n = 1, 2, \dots$, függvényértékek előjelét. Azon célból, hogy a húrmódszerrel kapott (ξ_n) iterációs sorozattal való összetévesztésének lehetőségét elkerüljük, a szelőmódszernél az alább definiálandó (x_n) iterációs sorozattal számolunk.

A szelőmódszert a húrmódszert bemutató 1. Ábra másolatán szemléltetjük az alábbi 1'. Ábrán. A szelőmódszer esetén legyen $x_0 := a$, $x_1 := b$ és $x_2 := \xi_1$, amelyet ugyancsak a (3.1) képlettel számítunk, de a megváltozott jelölésekkel; azaz legyen

$$x_2 := \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0},$$

és általában legyen

$$(4.1) \quad x_{n+1} := \frac{x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \quad \text{ahol} \quad y_n := f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

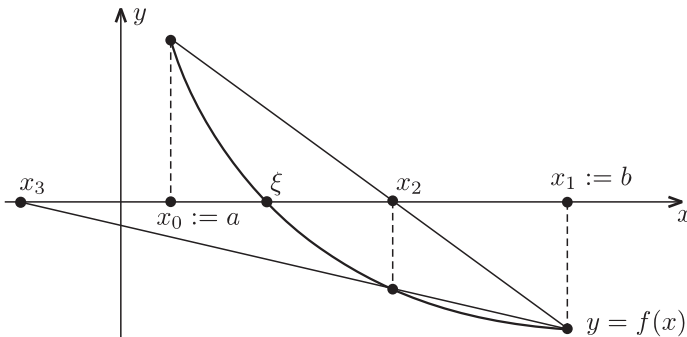


1'. Ábra

Megjegyezzük, hogy (4.1) ekvivalens módon átírható a következő alakba:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1} + (x_n y_n - x_{n-1} y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \\ &= \frac{x_n(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})y_n}{y_n - y_{n-1}} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Eszerint x_{n+1} -et úgy kapjuk, hogy x_n -ből kivonjuk a fenti képletsor végén levő törtet. Nyilvánvaló, hogy az iterációs függvény (amellyel x_{n+1} -et az előző x_n és x_{n-1} értékekből számítjuk) *stacionárius*, azaz n -től független alakú. Annak, hogy most nincs szükség az $y_n y_{n-1} < 0$ feltétel ellenőrzésére, az a hátrányos következménye, hogy az eljárás azon n -re megszakad, amelyre $x_n \notin [a, b]$. Ezt a kellemetlen tényt, amelynek következtében a szelőmódszer következő lépését már nem tudjuk végrehajtani a 4. Ábra másolatán szemléltetjük. A 4'. Ábrán az $y = f(x)$ grafikon (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontjain áthaladó szelő az $[a, b]$ intervallumon kívüli pontban metszi az x -tengelyt. Ebben az esetben a szelőmódszer nem alkalmas az $f(x) = 0$ egyenlet ξ gyökének közelítésére.



4'. Ábra

Ha viszont a szelőmódszer egyetlen iterációs lépésben sem akad el, akkor a húrmódszernél lényegesen gyorsabb konvergenciát szolgáltat a ξ közelítésére, amint azt az alábbi 5. Tételben bizonyítani fogjuk. Ehhez szükségünk lesz a matematika más ágazataiban is használatos *Fibonacci számsorozat* több tulajdonságára, amely sorozatot (γ_n) -nel fogjuk jelölni. Amint az jól ismert, a Fibonacci számokat a következő módon definiáljuk:

$$(4.2) \quad \gamma_0 = \gamma_1 := 1 \quad \text{és} \quad \gamma_n := \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

A szelőmódszerrel kapott n -edik közelítés hibáját most e_n -nel jelöljük (vesd össze (3.9)-cel):

$$(4.3) \quad e_n := x_n - \xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

a hiba szó megfelelője az angol nyelvben: error, ennek kezdőbetőjére utal a jelölés „e” betűje.

5. Tétel. *Legyen az $f(x)$ függvény folytonos $[a, b]$ -ben, kétszer differenciálható (a, b) -ben és álljon fenn (3.10). Ha ξ az $f(x) = 0$ egyenlet egyetlen és egyszeres gyöke (a, b) -ben és a (4.1) képlettel definiált (x_n) sorozat minden tagja (a, b) -be esik, akkor*

$$(4.4) \quad |e_n| \leq \kappa^{\gamma_n-1} |e_1|^{\gamma_{n-1}} |e_0|^{\gamma_{n-2}}, \quad n = 2, 3, \dots; \quad \text{ahol} \quad \kappa := \frac{M_2}{2m_1}.$$

Bizonyítás. A (4.1) képlet jelölését használva, a húrmódszerre már bizonyított (3.1) összefüggés a következő alakba írható:

$$\frac{x_{n+1} - \xi}{(x_n - \xi)(x_{n-1} - \xi)} = \frac{f''(\alpha_n)}{2f'(\beta_n)}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

ahol $\alpha_n, \beta_n \in (a, b)$. A (3.10)-beli alsó és felső korlátokat használva ebből következik, hogy

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - \xi| \cdot |x_{n-1} - \xi|,$$

amely a (4.3) és (4.4)-ben bevezetett jelölésekkel az

$$(4.5) \quad |e_{n+1}| \leq \kappa |e_n| \cdot |e_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

alakba írható. Erre az egyenlőtlenségre támaszkodva bizonyítjuk a (4.4)-beli egyenlőtlenséget n szerinti teljes indukcióval. Mivel $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$ és $\gamma_2 = 2$, ezért (4.4)

fennállása az $n = 2$ esetben nyilvánvaló, míg az $n = 3$ esetben abból következik, hogy

$$|e_3| \leq \kappa|e_2| \cdot |e_1| \leq \kappa(\kappa|e_1| \cdot |e_0|)|e_1| = \kappa^2|e_1|^2|e_0|.$$

Az indukciós feltevésünk az lesz, hogy (4.4) fennáll valamely $n(\geq 3)$ -ra és a megelőző $(n-1)$ -re is, és erre támaszkodva bizonyítani fogjuk, hogy (4.4) fennáll $(n+1)$ -re is. Ezen cél érdekében a (4.2) definíció, a (4.5) egyenlőtlenség és az indukciós feltevés alapján a következőképpen becsülhetünk:

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq \kappa|e_n| \cdot |e_{n-1}| \leq \\ &\leq \kappa(\kappa^{\gamma_n-1}|e_1|^{\gamma_{n-1}}|e_0|^{\gamma_{n-2}})(\kappa^{\gamma_{n-1}-1}|e_1|^{\gamma_{n-2}}|e_0|^{\gamma_{n-3}}) = \\ &= \kappa^{\gamma_n+\gamma_{n-1}-1}|e_1|^{\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}}|e_0|^{\gamma_{n-2}+\gamma_{n-3}} = \\ &= \kappa^{\gamma_{n+1}-1}|e_1|^{\gamma_n}|e_0|^{\gamma_{n-1}}. \end{aligned}$$

A kapott egyenlőtlenség megegyezik (4.4)-gyel, ha abban az n helyébe $(n+1)$ -et helyettesítünk. Ezzel (4.4) fennállását minden $n(\geq 2)$ -re bebizonyítottuk. ■

A további megfontolásainkban szükségünk lesz a Fibonacci számsorozat tulajdonságainak behatóbb ismeretére, amelyeket a következő lemmában foglalunk össze.

2. Lemma. *A (4.2)-ben definiált (γ_n) Fibonacci számsorozat tagjaira fennállnak az alábbi összefüggések:*

- (i) $\frac{1}{2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} < \frac{\gamma_3}{\gamma_4} < \frac{\gamma_5}{\gamma_6} < \dots < \frac{\gamma_6}{\gamma_7} < \frac{\gamma_4}{\gamma_5} < \frac{\gamma_2}{\gamma_3} = \frac{2}{3};$
- (ii) $\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180\dots$

Ezekkel az összefüggésekkel kapcsolatban a [4] könyvre utalunk; megjegyezve azt, hogy részletes bizonyításukat a Polygon következő számában megjelenő cikkünkben is megtalálhatja az érdeklődő olvasó.

A fentebb bizonyított (4.4) egyenlőtlenséget és a 2. Lemmát használva, elegendő feltételt fogunk adni a szelőmódszer által szolgáltatott (x_n) iterációs sorozat konvergenciájára, sőt magára a konvergencia sebességére is következtetni tudunk. Mivel (4.4)-ben

$$|e_0| = \xi - a \quad \text{és} \quad |e_1| = b - \xi,$$

ezért a *súlyozott számtani és mértani közepek* közötti egyenlőtlenség szerint tetszőleges $u, v > 0$ súlyok esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} (b - \xi)^u (\xi - a)^v &= u^u v^v \left(\frac{b - \xi}{u} \right)^u \left(\frac{\xi - a}{v} \right)^v \leq \\ &\leq u^u v^v \left(\frac{u \frac{b - \xi}{u} + v \frac{\xi - a}{v}}{u + v} \right)^{u+v} = - \frac{u^u v^v}{(u + v)^{u+v}} (b - a)^{u+v}. \end{aligned}$$

Ha itt az

$$u := \gamma_{n-1} \quad \text{és} \quad v := \gamma_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

helyettesítéseket elvégezzük, akkor (4.4)-ből kiindulva sorjában a következő becsléseket kapjuk:

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq \kappa^{\gamma_n - 1} (b - \xi)^{\gamma_{n-1}} (\xi - a)^{\gamma_{n-2}} \leq \\ &\leq \kappa^{\gamma_n - 1} \frac{\gamma_{n-1}^{\gamma_{n-1}} \gamma_{n-2}^{\gamma_{n-2}}}{\gamma_n^{\gamma_n}} (b - a)^{\gamma_n} \leq \\ &\leq \left(\frac{M_2}{2m_1} \right)^{\gamma_{n-1}} \left(\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \right)^{\gamma_n} (b - a)^{\gamma_n} = \\ (4.6) \quad &= \frac{2m_1}{M_2} \left(\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \right)^{\gamma_n} \left(\frac{M_2(b-a)}{2m_1} \right)^{\gamma_n} \leq \\ &\leq \frac{2m_1}{M_2} \left(\frac{2}{3} \right)^{\gamma_n} \left(\frac{M_2(b-a)}{2m_1} \right)^{\gamma_n} = \\ &= \frac{2m_1}{M_2} \left(\frac{M_2(b-a)}{3m_1} \right)^{\gamma_n}, \end{aligned}$$

ahol a 2. Lemma (i) állítását is kihasználtuk. Mivel $\gamma_n > n$, ha $n \geq 4$, ezért (3.11) és (4.6) összehasonlítása világosan mutatja, hogy a szelőmódszerrel elérhető konvergencia sebessége lényegesen nagyobb, mint a húrmódszerrel elérhető sebesség.

A húrmódszerre vonatkozó (3.12) határérték megfelelőjét a szelőmódszerre a következő tétel adja meg.

6. Tétel. *Ha $f''(x)$ folytonos ξ -ben, akkor az 5. Tétel feltételei mellett*

$$(4.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\gamma} = \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \right|^{(\sqrt{5}-1)/2}, \quad \text{ahol} \quad \gamma := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ezen tétel szabatos bizonyítása meghaladja cikkünk kereteit. Ennek ellenére mégis megkíséreljük, kevésbé precíz módon ugyan, érzékeltetni a bizonyítás lényegét. A (4.5) egyenlőtlenséget az

$$(4.8) \quad |e_{n+1}| \approx \kappa |e_n e_{n-1}|, \quad \text{ahol most} \quad \kappa := \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \right|,$$

„közel” egyenlőség alakjába írjuk át (itt sértjük meg a szabatos bizonyítás követelményét, mivel (4.8)-ban a bal- és jobboldal eltérését a mi eszközeinkkel nem tudjuk becsülni). Ezután a (4.4) egyenlőtlenség bizonyításához hasonlóan „teljes indukcióval” levezethetjük az

$$|e_n| \approx \kappa^{\gamma_n - 1} |e_1|^{\gamma_n - 1} |e_0|^{\gamma_n - 2}$$

„közel” egyenlőséget, majd ebből az

$$(4.9) \quad \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\gamma} \approx \kappa^{\gamma_{n+1} - 1 - \gamma(\gamma_n - 1)} |e_1|^{\gamma_n - \gamma\gamma_{n-1}} |e_0|^{\gamma_{n-1} - \gamma\gamma_{n-2}}$$

ugyancsak „közel” egyenlőséget, ahol γ -t (4.7)-ben definiáltuk.

A (4.9)-ben szereplő hatványkitevőket a 2. Lemma (ii) állítása segítségével vizsgáljuk meg:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma\gamma_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) - \\ &- \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ennek alapján kapjuk, hogy a (4.9) jobb oldalán levő szorzat első tényezőjének kitevője a következő lesz:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - 1 - \gamma(\gamma_n - 1) &= (\gamma_{n+1} - \gamma\gamma_n) + (\gamma - 1) = \\ &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 \right) = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \end{aligned}$$

Felhasználva még (4.10)-et n helyett $(n - 1)$ -gyel és $(n - 2)$ -vel is felírva, (4.9)-et a következő alakban írhatjuk fel:

$$(4.11) \quad \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\gamma} \approx \kappa^{\delta^{n+1} - \delta} |e_1|^{\delta^n} |e_0|^{\delta^{n-1}}, \quad \text{ahol} \quad \delta := \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Tekintve, hogy $|\delta| < 1$, ha (4.11)-ben „formálisan” végrehajtjuk az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\gamma} = \kappa^{-\delta} |e_1|^0 |e_0|^0 = \kappa^{(\sqrt{5}-1)/2} =: \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \right|^{(\sqrt{5}-1)/2},$$

amint azt (4.7)-ben állítottuk.

Felhívjuk az érdeklődő olvasó figyelmét arra, hogy a 6. Tétel precíz (teljesen szabatos) bizonyítását megtalálhatja a Hivatkozott irodalom [6] könyvében.

5. Az érintőmódszer

Az $f(x) = 0$ egyenlet valamely ξ gyökének közelítésére röviden ismertetünk egy harmadik módszert is. Ez az *érintőmódszer*, másnéven a *Newton–Raphson iteráció* (angolul: Newton’s method), amely akkor alkalmazható, ha az $f(x)$ függvény differenciálható a ξ gyök egy környezetében és ott $f'(x)$ seholsem tűnik el.

Az érintőmódszer *geometriai leírása* a következő. Legyen x_0 egy kezdeti közelítés ξ -re. A 6. Ábrán az $y = f(x)$ grafikon $(x_0, f(x_0))$ pontjában húzott érintő egyenletét a középiskolából ismert képlet alapján írjuk fel:

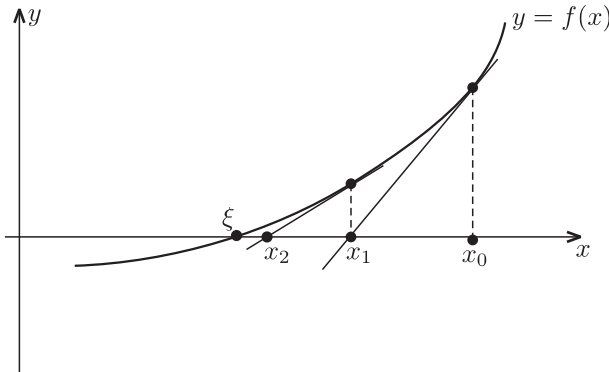
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ezen egyenesnek az x -tengellyel való metszéspontja (amelyben $y = 0$) x_1 koordinátáját a

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

egyenletből határozzuk meg:

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0, \quad \text{azaz} \quad x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



6. Ábra

A fenti eljárást x_1 -ből kiindulva megismételjük és az $y = f(x)$ grafikon $(x_1, f(x_1))$ pontjában húzott érintőjének az x -tengellyel való metszéspontját x_2 -vel jelöljük. Tovább ismételve ezt az eljárást az $(x_n : n = 0, 1, 2, \dots)$ iterációs sorozathoz jutunk, amelynek általános képlete

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nyilvánvaló, hogy az érintőmódszer szintén stacionárius.

Az alábbi 7. Tétel, 8. és 9. Korollárium bizonyítása a [3] jegyzetben és [4] tankönyvben is megtalálható.

7. Tétel. *Legyen ξ az $f(x) = 0$ egyenlet egyetlen gyöke a ξ egy környezetében, amely az x_0 kezdeti közelítést is tartalmazza. Ha $f(x)$ kétszer differenciálható ezen környezet pontjaiban és ott $f'(x) \neq 0$, akkor minden n -re létezik olyan α_n hely az x_n és ξ között, amelyre*

$$(5.1) \quad x_{n+1} - \xi = \frac{f''(\alpha_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ismét az $e_n := x_n - \xi$ jelölést használva (lásd (4.3)-ban), elegendő feltételt adunk az érintőmódszerrel kapott (x_n) iterációs sorozat konvergenciájára.

8. Korollárium. *Legyen az $f(x)$ függvény kétszer differenciálható a $(\xi - |e_0|, \xi + |e_0|)$ intervallumon, továbbá legyen*

$$\mu_1 := \inf_{|x-\xi| < |e_0|} |f'(x)| > 0 \quad \text{és} \quad M_2 := \sup_{|x-\xi| < |e_0|} |f''(x)| < \infty.$$

Ha

$$\frac{M_2}{2m_1} |e_0| < 1,$$

akkor

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0, \quad \text{azaz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

9. Korollárium. *Ha $f''(x)$ folytonos ξ -ben, akkor a 7. Tétel feltételei mellett*

$$(5.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}.$$

Az iterációs módszerek általános elméletében (lásd a [6] könyvben részletekben) egy adott iterációs eljárás *konvergencia rendjét* azzal az $r > 0$ valós kitevővel definiálják, amelyre a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = C \neq 0$$

véges határérték létezik. Az itt szereplő C konstans *aszimptotikus hibakonstansnak* nevezik.

Ha iterációs lépésként μ számú függvényértéket kell kiszámítanunk, akkor az adott iterációs módszer *numerikus hatékonyságát* az

$$\eta := \sqrt[r]{r}$$

képlettel szokás értelmezni.

Ezen definíciók terminusaiban az érintőmódszer esetén

$$r = 2, \quad C = \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \right|, \quad \eta = \sqrt{2} = 1,4142 \dots,$$

mivel az iteráció n -edik lépésében két függvényértéket kell kiszámítanunk: $f(x_n)$ -et és $f'(x_n)$ -et. Az $r = 2$ esetben azt is szokás mondani, hogy az iterációs módszer *négyzetes konvergenciát* biztosít.

A húrmódszer esetén (lásd (3.12)-t)

$$r = 1, \quad C = \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} e_0 \right|, \quad \eta = 1,$$

mivel iterációs lépésként csak egy új függvényértéket kell kiszámítanunk (a másik függvényérték az előző lépésből öröklődik). Azt szokás mondani, hogy a húrmódszer csak *lineáris konvergenciát* biztosít, ami igen lassú konvergenciát jelent.

A szelőmódszer esetén (lásd (4.7)-et)

$$r = \gamma := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180 \dots, \quad C = \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \right|^{(\sqrt{5}-1)/2}, \quad \eta = \gamma,$$

mivel iterációs lépésként szintén csak egy új függvényértéket kell kiszámítanunk.

A numerikus hatékonyság szempontjából a szelőmódszer előnyösebb, mint az érintőmódszer. Az alkalmazhatóság szempontjából viszont az érintőmódszernek van előnye, mivel igen általános feltételek mellett is biztosan konvergál, míg a szelőmódszer alkalmazása esetén az iteráció véges számú lépésben váratlanul megszakadhat (annak következtében, hogy x_{n+1} „kipattan” a ξ gyök adott környezetéből). A fenti három módszer közül a húrmódszer a legkevésbé hatékony; előnye viszont az, hogy még akkor is konvergál, ha a szóban forgó függvény nem differenciálható, csak folytonos.

Hivatkozott irodalom

- [1] Kátai Imre, *Numerikus analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
- [2] Leindler László, *Analízis*, Polygon, Szeged, 2001.
- [3] Móricz Ferenc, *Bevezetés a numerikus matematikába*, Polygon, Szeged, 2008.
- [4] A. Ralston, *Bevezetés a numerikus analízisbe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.
- [5] Szele Tibor, *Bevezetés az algebrába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.
- [6] J.F. Traub, *Iteration methods for the solution of equations*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

*Móricz Ferenc, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.,
moricz@math.u-szeged.hu*

