

MŰHELYSAROK

Amikor érdemes általánosítani

KUNOS ÁDÁM

Az általánosítás gondolata általában akkor merül fel a matematikában, amikor egy problémát megoldottunk. Ha találunk általánosítási lehetőséget, az általában nehezebbnek bizonyul, ami nem meglepő, hiszen az általánosabb állítás részesetként tartalmazza az eredeti problémát. Gyakran megtörténik, hogy az általánosítás ugyanazon módszerrel kezelhető, mint a speciális eset (erre számos példa található pl. [3] cikkben). Néha azonban még ennél is különösebbet tapasztalunk. Pólya György [7] könyvében található a matematikatörténet két óriásának következő gondolata:

*„Gyakran megtörténtik, hogy az általános probléma könnyebbnek bizonyul,
mint a speciális eset közvetlen megoldása”*
(P. G. Lejeune-Dirichlet, R. Dedekind)

Bizonyos esetekben tehát már problémamegoldás közben is érdemes általánosításokat keresnünk, hiszen egy megfelelő általánosítás megtalálásával akár könnyíthetünk is feladatunkon. Jelen dolgozatban erre a jelenségre mutatunk néhány elemi példát.

Első példánk egy kombinatorika gyakorlatról való, hogy a jelen dolgozatba jobban illeszkedjen, kicsit változtattunk az eredeti feladaton. A szerző megoldási kísérlete kudarcba fulladt, de a gyakorlat vezetője, Nagy Gábor, rávilágított, hogy a feladatot általánosítva a speciális esetben kudarcot valló módszer tökéletesen működőképes.

1.1. feladat. *Definiáljunk egy rekurzív sorozatot. Legyen $F_0 = a$, $F_1 = b$, ahol a, b adott valós számok és legyen $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ ($k = 0, 1, \dots$). Igazoljuk, hogy minden n pozitív egészre*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$$

Megoldási kísérlet. A rekurzív sorozatokkal kapcsolatos feladatok megoldásában a teljes indukció gyakori ötlet. A binomiális együtthatókra is jól ismert egy rekurziós összefüggés, nevezetesen $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, így itt a teljes indukció különösen kecsegtető. Kis n -ekre könnyen ellenőrizhető az állítás, tegyük fel, hogy $1, 2, \dots, n$ esetekben igaz az állítás és próbáljuk ebből megkapni az $n+1$ esetet:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} F_k &= \binom{n+1}{0} F_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} F_k \\
 &= \binom{n+1}{0} F_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] F_k \\
 &= \binom{n}{0} F_0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F_k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} F_k \\
 &= \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k}_{F_{2n}} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} F_k = S.
 \end{aligned}$$

Megjelent az összegben F_{2n} , ami örömteli, hiszen F_{2n+2} -t szeretnénk kapni, így, ha a másik tagról látnánk, hogy F_{2n+1} -gyel egyenlő, készen lennénk. Sajnos azonban ez nem látható az indukciós feltevésünk alapján. A gondot az okozza, hogy a binomiális együtthatókban $k-1$ szerepel, míg a sorozat elemeinek indexe k . Bontsuk hát tovább az összeget a rekurzív összefüggéseink alapján:

$$\begin{aligned}
 S &= F_{2n} + \binom{n}{0} F_1 + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n}{k-1} (F_{k-1} + F_{k-2}) \\
 &= F_{2n} + \binom{n}{0} F_1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (F_k + F_{k-1}) \\
 &= F_{2n} + \binom{n}{0} F_0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F_k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F_{k-1} \\
 &= F_{2n} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k}_{F_{2n}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F_{k-1}.
 \end{aligned}$$

Ha sikerülne megmutatnunk, hogy az összeg szummás tagja F_{2n-1} , ez a várt $F_{2n} + F_{2n} + F_{2n-1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}$ összefüggést adná. A probléma most már egyértelműen látszik. Ismét egy hasonló szummás tagot kaptunk, mint az előbb,

és érezzük, hogy ennek a tovább bontásával is ismét kapnánk egy ilyet, csak az indexek csökkennének, és így tovább. Ebből már nem lesz szép teljes indukciós bizonyítás („kevésbé szép” még lehet, lásd a következő, általánosított feladat utáni megjegyzéseket). Kudarcunktól letörve legyünk bátrak és általánosítsunk!

1.2. általánosított feladat. *Definiáljunk egy rekurzív sorozatot. Legyen $F_0 = a$, $F_1 = b$, ahol a, b adott valós számok és legyen $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ ($k = 0, 1, \dots$). Igazoljuk, hogy minden n pozitív egészre és c nemnegatív egészre*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+c} = F_{2n+c}.$$

Ez a feladat nyilvánvalóan általánosabb, mint az előző, hiszen az előző $c = 0$ speciális eseteként adódik.

Megoldás. Próbálkozzunk ugyanúgy, mint az előbb, n szerinti teljes indukcióval. Az $n = 1$ esetben az állítás bal oldala $\binom{1}{0}F_{0+c} + \binom{1}{1}F_{1+c} = F_c + F_{c+1}$ alakot ölt, mely a rekurzív definícióból valóban $F_{2+1+c} = F_{c+2}$ -vel egyenlő. Tegyük most fel, hogy az $1, \dots, n$ esetekben igaz az állítás, próbáljuk igazolni az $n+1$ esetet:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} F_{k+c} &= \binom{n+1}{0} F_c + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} F_{k+c} \\ &= F_c + \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] F_{k+c} \\ &= \left(\binom{n}{0} F_c + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F_{k+c} \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} F_{k+c} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+c}}_{F_{2n+c}} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+(c+1)}}_{F_{2n+(c+1)}} = F_{2n+c+2} = F_{2(n+1)+c}. \end{aligned}$$

Mint látjuk, az általánosabb állítás egyszerűen adódott teljes indukcióval, míg a speciális eset problémás volt. Ez úgy magyarázható, hogy amikor általánosabb, erősebb állítást akarunk teljes indukcióval belátni, akkor az indukciós lépésben is erősebb állításokat használhatunk fel, ez sokszor megkönnyíti a bizonyítást.

Megjegyzések. Az általánosítás nem volt természetellenes, hiszen már az első próbálkozás szummái között megjelent a $c=1$ eset. Ezt a fent látottakhoz hasonló módon tovább bontogatva megsejthető az általánosítás.

A kudarcot az első megoldásnál természetesen az egyszerű teljes indukció szempontjából értettük. Joggal érezheti úgy az Olvasó, hogy a megoldási kísérlet nem is fulladt kudarcba, hiszen folytathatjuk a bontogatást, és egyszer elfogynak a szumák tagjai, ki kell jönnie a megoldásnak. Valóban, az elkezdett megoldás végig gondolható, de lényegesen hosszabb és bonyolultabb gondolatmenetet szül, mint az általánosított feladat megoldása. Ennek végiggondolását az Olvasóra bízunk.

A figyelmes Olvasó bizonyára észrevette, hogy a feladatunkban szerepelt rekurziós összefüggés megegyezik a Fibonacci-sorozat rekurzív összefüggésével. Eredetileg a feladat a Fibonacci-sorozattal szerepelt. Azért változtattuk meg a kezdőelemeket, hogy elkerüljük a feladat a Fibonacci-sorozat – sokak számára ismert – explicit formulájának rutinszerű alkalmazásával való megoldásának ötletét, mint alternatív megoldási lehetőséget, mely igencsak csökkentené az általunk közölt megoldás értékét.

Következő feladatunk meglehetősen ismert, megtalálható például [10]-ben. Először közlünk két szokásos megoldást, majd – a dolgozatunk szellemében – egy olyan általánosítást keresünk, ami megvilágítja a feladat lényegét, így egy jóval természetesebb megoldáshoz vezet.

2.1. feladat. *Egy szigeten 13 szürke, 15 barna, 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor annyira megijednek egymástól, hogy mindketten a harmadik színre változtatják a bőrüket. Lehetséges, hogy egy idő múlva minden kaméleon ugyanolyan színű legyen?*

1. megoldás. Találkozzanak a szürke és fekete kaméleonok x -szer, szürkék és zöldek y -szor, végül a barna és zöld kaméleonok z -szer. Ezen jelölés alapján könnyen követhető, hogyan változnak az egyes színekhez tartozó kaméleonok számai. Ha például csak szürke kaméleon maradt:

$$13 - x - y + 2z = 45,$$

$$15 - x - z + 2y = 0,$$

$$17 - y - z + 2x = 0.$$

Ezt az egyenletrendszert (és azt a másik két változatot, amikor a jobboldalon rendre 0, 45, 0 vagy 0, 0, 45 áll) megvizsgálva, azt kapjuk, hogy egyik egyenletrendszernek sincs egészszámból álló megoldása. ■

2. megoldás. Legyen a, b, c rendre a szürke, barna, zöld kaméleonok száma. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $S = b - a$ kifejezés 3-as maradéka a folyamat során

nem változik. Ez eredetileg 2, és ha minden kaméleon egyszínű, akkor 0 volna, tehát a folyamat során ez az állapot nem érhető el. ■

Az első megoldás eléggé számolósnak, a második pedig meglehetősen „kalapból előhúzott” tűnik. Egy ezeknél sokkal természetesebb megoldási módra vezet a feladat következő általánosítása. (A feladat meséjét kicsit át kellett írunk, mert az általánosítás az eredeti mesébe illesztve nem hangzik jól. Könnyen látható azonban, hogy az előző feladat általánosításáról van szó.)

2.2. általánosított feladat. *Egy szigeten $n > 2$ féle színű kaméleon él. Az egyszínűek együtt, elkülönített közösségekben élnek, de fontosnak tartják, hogy időnként találkozhassanak különböző színű társaikkal, így évente gyűlést tartanak a sziget tanácstermében. Minden évben minden közösség kisorsol egy kiválasztottat, aki el látogathat a gyűlésre. Sajnos azonban a tanácssterem csak $n - 1$ kaméleon befogadására alkalmas, így minden évben egy (sorsolással kiválasztott) közösség nem küldheti el kiválasztottját tanácskoznia. Ezen okból minden tanácskozás végén az összes tanácskozó kaméleon – a tanácskozáson nem képviseltetett közösség iránti részvét kifejezésekként – olyan színűre változtatja magát, amilyen színű kaméleon nem szerepelt a tanácskozáson. (Tehát minden tanácskozó a tanácskozásból kimaradó közösséghez csatlakozik.) Ha a szigeten kezdetben minden közösségben különböző számú kaméleon volt modulo n , lehetséges-e, hogy egyszer a sziget csupán egy kaméleon közösségből fog állni?*

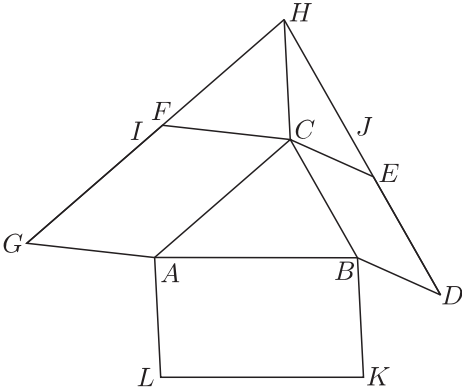
Megoldás. Első ránézésre még a feladat helyességét illetően is kétségünk támadhat. A feladat szövege nem szól arról, hogy mi történik, ha például eltűnik két közösség. Ekkor milyen szabályok szerint tanácskoznak? Kinek a színére váltanak a végén? Ez alapján a feladat nem tűnik egyértelműnek. Gondoljunk viszont bele, hogy mi történik modulo n a közösségek számával. Minden tanácskozás végén $n - 1$ közösség létszáma -1 -gyel változik (mod n), egy közösség pedig $n - 1 \equiv -1$ -gyel (mod n). Tehát minden közösség létszáma eggyel csökken modulo n . Ennek értelmében világos, hogy egyszerre csak egy közösség tűnhet el. Ekkor ez a közösség nem vesz részt következő tanácskozáson, így a szabályok értelmében a résztvevő $n - 1$ tanácskozó erre a színre változtatja magát, így a közösség „feltámad” $n - 1$ taggal. Az is világos, hogy ebben a pillanatban egyetlen közösségnek a létszáma sem lesz -1 (mod n), tehát megmarad az a tulajdonság, miszerint minden közösség létszáma különböző modulo n . Látjuk tehát, hogy még többet is állíthatunk annál, hogy nem marad a szigeten soha csupán 1 közösség. Azt kaptuk ugyanis, hogy a szigeten mindig legalább $n - 1$ közösség lesz jelen. ■

Most egy egyszerű, szokásos területátalakítással megoldható feladatot mutatunk be, melyről ki fog derülni, hogy a Pitagorasz-tétel általánosítása.

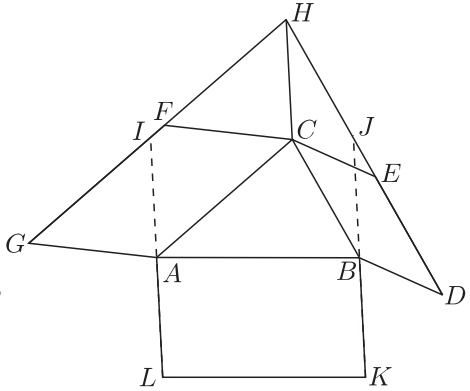
3.1. feladat. Adott ABC háromszög. Rajzoljunk BC és CA oldalaira kifelé $BDEC$ és $ACFG$ paralelogrammákat (1. ábra). Messék egymást a GF és DE egyenesek a H pontban. Rajzoljuk meg az AB oldalra kifelé az $ALKB$ paralelogrammát úgy, hogy $HC \parallel AL \parallel BK$, $HC = AL = BK$. Igazoljuk, hogy ekkor fennáll a

$$t_{ACFG} + t_{BDEC} = t_{ALKB}$$

területegyenlőség.



1. ábra



2. ábra

Megoldás. A feladat egy tipikusnak mondható, területátalakításra vonatkozó feladat. Az egész megoldás arra a jól ismert tényre épül, hogy a paralelogramma területe nem változik, ha egyik oldalát saját egyenesében eltoljuk. Ez következik abból, hogy a paralelogramma területe megkapható két szemközti (egymással párhuzamos) oldalának távolsága és ezen oldalak hosszának szorzataként.

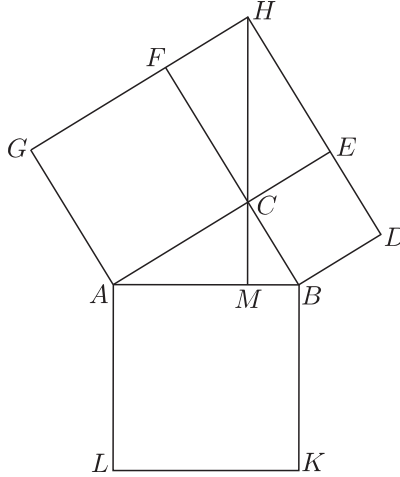
Húzzunk CH -val párhuzamos egyeneseket A -n és B -n keresztül, messék ezek GH és DH egyeneseket rendre az I , J pontokban (2. ábra).

Az eddigiek alapján világos, hogy $t_{ACFG} = t_{ACHI}$ és $t_{BDEC} = t_{BJHC}$. Tudjuk azt is, hogy az IA , HC , JB , BK szakaszok párhuzamosak és egyenlőek. Ezekből, az X és Y pontok egyenesét e_{XY} -nal, az e_1 és e_2 egyenesek távolságát $d(e_1, e_2)$ -vel jelölve, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} t_{ACFG} + t_{BDEC} &= t_{ACHI} + t_{BJHC} \\ &= CH \cdot d(e_{AI}, e_{CH}) + CH \cdot d(e_{CH}, e_{BJ}) \\ &= CH \cdot (d(e_{AI}, e_{CH}) + d(e_{CH}, e_{BJ})) \\ &= CH \cdot d(e_{AI}, e_{BJ}) = KB \cdot d(e_{AL}, e_{BK}) = t_{ALKB}. \end{aligned}$$

■

Nézzük most meg az előző feladat azon speciális esetét, amikor ABC háromszögben C -nél derékszög van, és BC, CA oldalaira négyzeteket írunk (3. ábra). A szokásos jelöléssel legyen $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Rajzoljuk meg a c oldalhoz tartozó CM magasságot.



3. ábra

Mivel $CF = b$, $FH = a$, és $CFH_{\triangle} = \pi/2$, így $CFH_{\triangle} \cong ACB_{\triangle}$, azaz $CH = AB = c$, és

$$MCH_{\triangle} = MCA_{\triangle} + \frac{\pi}{2} + FCH_{\triangle} = \left(\frac{\pi}{2} - CAM_{\triangle}\right) + \frac{\pi}{2} + CAM_{\triangle} = \pi.$$

Tehát $HMA_{\triangle} = \pi/2$, amiből $BAL_{\triangle} = \pi/2$. Ezekből már következik, hogy $ALKB$ négyzet, tehát valóban, az előző feladatunk az oldalakra emelt paralelogrammák (itt most négyzetek) területére éppen $a^2 + b^2 = c^2$ -et állítja.

Megjegyzés. A Pitagorasz-tétel legismertebb általánosítása a koszinusz-tétel, mely a Pitagorasz-tétel állítását mint az oldalak hosszai között fennálló algebrai összefüggést általánosítja. Ha azonban úgy tekintünk a tételre, mint az oldalakra emelt négyzetek területei közötti összefüggésre, akkor az imént közölt feladat a tétel legtermészetesebb általánosítása, és ez egy – területátalakításra vonatkozó – középiskolai rutinfeladat (a szokásos középiskolai [2] példatár területszámítás, területátalakítás és alkalmazásai fejezete is sok hasonló feladatot tartalmaz). Érdeemes összevetni a megoldásunkat a Pitagorasz-tétel jól ismert bizonyításával ötletigény szempontjából.

Az említett két általánosítási irány között létesíthető valamiféle kapcsolat, ezzel kapcsolatban lásd [1] cikket.

Gyakran a túl speciális problémafelvetés eltereli a figyelmet az állítások mögött álló mélyebb okokról, olyan irányba terelve gondolatainkat, amely lényegesen bonyolultabb megoldásokat szül. Erre a jelenségre mutatunk most három nagyon egyszerű, de annál tanulságosabb példát.

3.2. feladat. *Legyenek A és B rendre 3, illetve 5 sugarú, egymást merőlegesen metsző körlemezek a síkon. Számítsuk ki a $K = t_{A \setminus B} - t_{B \setminus A}$ területkülönbséget. (itt $A \setminus B$ és $B \setminus A$ a körlemezek halmazelméleti különbségét jelöli.)*

A legtöbben, akik ezt a feladatot látják, elkezdik kiszámolni a két körlemez metszetének $t_{A \cap B}$ területét, hiszen ezzel megkapható $t_{A \setminus B} (= t_A - t_{A \cap B})$ és $t_{B \setminus A} (= t_B - t_{A \cap B})$. A metszet területének kiszámítása azonban meglehetősen körülményes és hosszadalmas feladat, ahhoz képest, amilyen megoldást a következő apró ötlet kínál:

$$K = t_{A \setminus B} - t_{B \setminus A} = (t_{A \setminus B} + t_{A \cap B}) - (t_{B \setminus A} + t_{A \cap B}) = t_A - t_B.$$

Mindenféle formális, trükkös számolás nélkül is teljesen triviális, hogyha két mennyiséget ugyanannyival csökkentünk, akkor különbségük nem változik, és itt is erről van szó. (A két kör területét a metszetük területével csökkentjük, majd képezzük ezen területek különbségét.)

Miért kezdi el szinte minden megoldó mégis a metszet területét számolni, ha ilyen egyszerű és utólag természetesnek látszó megoldás is kínálkozik? A válasz az lehet, hogy amikor meglátunk egy utat, amit ránézésre végig tudunk járni, megőrülünk neki, és azonnal hozzálátunk. Nem foglalkozunk már más megoldási lehetőségekkel, csak az első ötlet kidolgozására koncentrálnak. Esetünkben pedig első ránézésre adódik a gondolat: a metszet területének megadásával készen lennénk. Azért ez juthat az eszünkbe, mert már valószínűleg sok hasonló problémát látunk, illetve a feltételek így tűnnek a legegyszerűbben kihasználhatónak. Vegyük azonban észre, hogy nem kell kihasználnunk a feladat feltételeit. Az egyszerűbbik megoldásban nem használtuk ki a merőleges metszést, sőt még azt sem, hogy az alakzataink körök.

Ha ugyanezt a feladatot jóval általánosabb halmazokra, semmit nem állítva a metszés mikéntjéről adjuk fel, valószínűleg könnyebben jut eszébe a megoldónak a második megoldás.

4.1. feladat. Egy táblás csokit, mely a szokásos módon $a * b$ kis kockából áll, úgy szeretnénk széttörödni $1 * 1$ -es kockákra, hogy csak a mélyedések mentén törhetünk, egyszerűen csak egy darabot. Legkevesebb hány törés szükséges?

Némi kísérletezgetés után azt tapasztalhatjuk, hogy mindig $ab - 1$ törés szükséges. A rutinos problémamegoldók ezen a ponton általában $a + b$ szerinti teljes indukcióhoz nyúlnak, mellyel valóban könnyen igazolható a sejtés. Van azonban egy nagyon egyszerű mód, ahogyan azonnal indokolható ez az eredmény, matematikát nem ismerő közönség számára is. Gondoljunk ugyanis bele, hogy minden egyes törésnél egy darabból kettő lesz, tehát minden egyes töréssel eggyel nő a darabok száma, ami az elején 1, a folyamat végén pedig ab .

Ha nem ilyen speciális példán adjuk fel ugyanezt a feladatot, hanem valami tetszőleges alakzat darabokra tördeléséről beszélünk, akkor itt is természetesebb a lényeget megvilágító második megoldás.

Amikor egy olyan feladattal találkozunk a problémamegoldó, ami egy speciális struktúráról szól, rögtön abban kezd el gondolkodni, annak a tulajdonságaival próbálja megfogni a feladatot. Előfordul azonban, hogy – mint a fenti két kis példában is láthattuk – a megoldás jóval általánosabb tulajdonságokban gyökeredzik. Gondolnunk kell tehát arra is egy probléma megoldásakor, hogy nem túl speciálisak-e a feltevéseink, érdemes megpróbálni „lazítani” a feltételeken, hátha ezzel jobb bepillantást nyerhetünk az állításunk igazának mélyebb okaira.

5.1. feladat. Tekintsük a $p(x) = ax^2 + bx + c$ polinomot, ahol a, b, c rögzített valós számok. Tudjuk, hogy a $p(x) = x$ egyenletnek nincs valós gyöke. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $p(p(x)) = x$ egyenletnek sincs valós megoldása.

Mivel a másodfokú polinomokat jól ismeri, a feladatmegoldó sok esetben rögtön „ráharap” a következő útra. Azt, hogy a $p(x) = x$ egyenletnek nincs valós gyöke könnyen megfoghatjuk algebrailag, hiszen ez pontosan akkor teljesül, ha a $p(x) - x = ax^2 + (b - 1)x + c$ másodfokú polinomnak nincs valós gyöke, azaz ha diszkriminánsa negatív, vagyis $(b - 1)^2 - 4ac < 0$. A probléma ott van, hogy ha $a \neq 0$, akkor a

$$p(p(x)) - x = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (2a^2c + ab^2 + ab)x^2 + (2abc + b^2 - 1)x + ac^2 + bc + c$$

polinom negyedfokú, így vele már nem olyan egyszerű bánni, mint a másodfokúakkal, igen nehéz kihasználni a kapott feltételt. Látjuk, hogy ezen az úton meglehetősen nehéz lenne továbbhaladni.

Nézzünk most kicsit távolabbról a feladatra. Ha $p(x)$ -re úgy tekintünk mint egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, akkor megállapíthatjuk, hogy azzal, hogy kikötöttük, hogy

másodfokú polinom, nagyon leszűkítettük az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmazát. Lehet, hogy ennél jóval általánosabb függvényosztályra is igaz a feladat állítása, és a megszorítással, a speciális esettel csak arról a lényeges tulajdonságról tereltük el a figyelmet, ami éppen a feladat állításának fennállását biztosítja? Valóban, tekintsük a következő általánosítást.

5.2. általánosított feladat. *Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x) = x$ semmilyen valós x -re nem áll fenn, akkor $f(f(x)) = x$ szintén nem áll fenn egyetlen valós x esetén sem.*

Megoldás. Mivel $f(x)$ folytonos, $g(x) = f(x) - x$ is az, így $g(x) > 0$ [vagy $g(x) < 0$] minden valós x -re, különben a pozitív és a negatív értéke között valahol a folytonosságból adódóan 0-t is fel kellene vennie, ez pedig a feltételekbe ütközik. Azt kaptuk tehát, hogy $x < f(x)$ [vagy $x > f(x)$] minden valós x -re, ahonnan egyszerűen

$$x < f(x) < f(f(x)) \quad [\text{vagy } x > f(x) > f(f(x))]$$

adódik minden valós x -re. ■

Különösen középiskolai versenyfeladatok esetén sokszor érezhetjük úgy magunkat, mintha megkaptuk volna egy puzzle egyetlen darabját, és abból kellene megmondanunk, mi van a képen. Ehhez természetesen meg kell sejtenuünk, hogy mi van a többi darabon. Tehát a feladat speciális volta ellenére, muszáj egy általánosabb „elméletben” elhelyeznünk azt, hogy jó rálátásunk legyen a problémára, meg tudjuk oldani. Következő két példánk ebből a típusból való.

6.1. feladat. *Legyen x pozitív valós szám és $H(x) = \{[nx] : n = 1, 2, \dots\}$, (ahol $[y]$ az y egészrészét jelöli). Keressük meg az összes olyan pozitív valós α -t melyre*

$$H(1 + \sqrt{2}) \cup H(\alpha) = \mathbb{Z}^+, \quad H(1 + \sqrt{2}) \cap H(\alpha) = \emptyset.$$

A feladatban az $1 + \sqrt{2}$ -nek, mint majd látjuk, (az irracionalitásán kívül) nincs különösebb szerepe, így érdemes a problémát mindjárt teljes általánosságban vizsgálni (az $1 + \sqrt{2}$ konkrét értéke ugyanis csak megnehezíti egy igen szép feltétel megtalálását). Fogalmazzuk meg az általánosított feladatot.

6.2. általánosított feladat. *Legyen x pozitív valós szám és $H(x) = \{[nx] : n = 1, 2, \dots\}$, (ahol $[y]$ az y egészrészét jelöli). Milyen feltételeknek kell teljesülnie az α , β pozitív valós számokra, hogy*

$$(1) \quad H(\alpha) \cup H(\beta) = \mathbb{Z}^+, \quad H(\alpha) \cap H(\beta) = \emptyset.$$

fennálljon?

Megjegyzés. Ennek a problémának a megoldása számos könyvben megtalálható (pl. [6], [9]). Most egy olyan megoldást közlünk, amely megmutatja, hogyan lehet a feltételt (ha az nincs megadva) magunktól kitalálni.

Megoldás. Vezessünk be egy jelölést. Minden n pozitív egészre jelölje h_α^n a $H(\alpha)$ halmaz n -nél kisebb elemeinek a számát, azaz legyen

$$|\{k : k \in H(\alpha), k < n\}| = h_\alpha^n.$$

A megoldás egy egyszerű ötletre épül. Könnyen látható, hogy (1) fennállásának szükséges és elegendő feltétele a most bevezetett jelölésünkkel

$$(h_\alpha^{n+1} + h_\beta^{n+1}) - (h_\alpha^n + h_\beta^n) = 1$$

(minden $n = 1, 2, \dots$ esetén). Ez pedig nyilván akkor és csak akkor áll fenn, ha $h_\alpha^n + h_\beta^n = n - 1$ (minden $n = 1, 2, \dots$ esetén). Határozzuk tehát meg $h_\alpha^n + h_\beta^n$ -t, és próbáljunk ebből feltételt nyerni α, β -ra. Az világos, hogy

$$h_\alpha^n = \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor, \quad h_\beta^n = \left\lfloor \frac{n}{\beta} \right\rfloor.$$

Tehát $h_\alpha^n + h_\beta^n = \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{\beta} \right\rfloor$, mely könnyen becsülhető az $x - 1 < [x] \leq x$ egyenlőtlenséggel:

$$n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) - 2 = \frac{n}{\alpha} + \frac{n}{\beta} - 2 < \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{\beta} \right\rfloor \leq \frac{n}{\alpha} + \frac{n}{\beta} = n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right).$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$(2) \quad n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) - 2 < h_\alpha^n + h_\beta^n \leq n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right).$$

Vezessük be az $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \gamma$ jelölést. (2)-ből már látszik, hogy $\gamma = 1$ fenn kell, hogy álljon, különben

$$\gamma n - 2 < n - 1 (= h_\alpha^n + h_\beta^n) \leq \gamma n$$

nem teljesül „nagy” n -ek esetén, ugyanis, ha $\gamma > 1$, akkor $n > \frac{1}{\gamma-1}$ esetén $n - 1 < \gamma n - 2$, ha pedig $\gamma < 1$, akkor $n > \frac{1}{1-\gamma}$ esetén $n - 1 > \gamma n$. Azt már tudjuk tehát, hogy a $\gamma = 1$ feltétel szükséges, de vajon elegendő-e?

Vegyük észre, hogy ha (2)-nél szigorú egyenlőtlenség állna, akkor $(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \gamma = 1$ miatt) $n - 2 < h_\alpha^n + h_\beta^n < n$ teljesülne, amiből $h_\alpha^n + h_\beta^n = n - 1$ következne. Érdekes tehát megvizsgálni, hogy az $\left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \leq \frac{n}{\alpha}$, $\left\lfloor \frac{n}{\beta} \right\rfloor \leq \frac{n}{\beta}$ egyenlőtlenségekben milyen α, β értékekkel tudnánk biztosítani, hogy semmilyen n esetén ne álljon fenn egyenlőség, hiszen ezzel egy elegendő feltételt kaphatnánk feladatunkra. Könnyen látható, hogy ha α irracionális, akkor minden n -re $\frac{n}{\alpha}$ is irracionális, így $\left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor < \frac{n}{\alpha}$. Az is látható továbbá, hogy $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ -ből adódóan α és β egyszerre racionálisak illetve

irracionálisak, tehát megkaptunk egy elegendő feltételt: ha α, β irracionálisak, és $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, akkor (1) teljesül. Vajon a kapott feltétel szükséges-e?

Talán érezhető, hogy a válasz igen. Azt fogjuk megmutatni, hogy nincs olyan pozitív, racionális α, β pár, melyre $H(\alpha) \cap H(\beta) = \emptyset$ teljesülne. Legyen ugyanis $\alpha = \frac{p_1}{q_1}, \beta = \frac{p_2}{q_2}$, ekkor $p_1 p_2 \in H(\alpha), H(\beta)$. Megkaptuk tehát a szükséges és elegendő feltételt: akkor és csak akkor áll fenn (1), ha α, β pozitív irracionálisak, és $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. ■

7.1. feladat. Legyen n pozitív egész szám. Jelölje $S(n)$ az n számjegyeinek összegét tízes számrendszerben. Bizonyítsuk be, hogy

- a) $S(n) \leq 5 \cdot S(2n)$,
- b) $S(n) \leq 5 \cdot S(5^5 n)$,
- c) $S(n) \leq 8 \cdot S(8n)$.

Most is érezhető, hogy a három egyenlőtlenség közös töből ered, első ránézésre azonban nem nyilvánvaló, hogy mi lehet ez. Alakítsuk kicsit át az a) feladatrész állítását:

$$S(10n) = S(n) \leq 5 \cdot S(2n) = S(5) \cdot S(2n),$$

az a) rész tehát azt állítja, hogy $S(10n) \leq S(5) \cdot S(2n)$. Ez $S(ab) \leq S(a) \cdot S(b)$ alakú. Lehet, hogy ez az általános összefüggés áll mindhárom feladatrész mögött? Vizsgáljuk meg:

$$\begin{aligned} S(10^5 n) &= S(n) \leq 5 \cdot S(5^5 n) = S(2^5) \cdot S(5^5 n), \\ S(10^3 n) &= S(n) \leq 8 \cdot S(8n) = S(5^3) \cdot S(2^3 n). \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy feladatunk mindhárom része speciális esete az általános $S(ab) \leq S(a) \cdot S(b)$ egyenlőtlenségnek, egyelőre viszont nem tudjuk, hogy ez igaz-e. Néhány írásbeli szorzást elvégezve, és közben ilyen szempontból figyelve az eseményeket, igen erős meggyőződésünkkel válhat, hogy igaz a sejtés. Ez tipikusan olyan állítás, melyet meggyőző érveléssel nem nehéz elhíttetni valakivel, most azonban célul egy precíz, formális bizonyítás megalkotását tűzzük ki. Tetszőleges számrendszerre próbáljuk bizonyítani a sejtést, ezzel biztosítva, hogy elkerüljük a tízes számrendszerre vonatkozó tapasztalainkra támaszkodó szemléletes, pontatlan érveléseket. Fogalmazzuk meg általánosított feladatunkat.

7.2. általánosított feladat. Jelölje $S_p(n)$ az n pozitív egész p alapú számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összegét. Legyenek a, b pozitív egészek. Ekkor

$$S_p(ab) \leq S_p(a) \cdot S_p(b).$$

Az általánosított feladat bizonyítását egy lemmára alapozzuk.

7.3. lemma. Jelöljön $(a_n a_{n-1} \dots a_0)_p$ a p alapú számrendszerben egy n jegyű számot (ahol természetesen $0 \leq a_i < p$). Nevezzük a k pozitív egészhez tartozó

$$k = \sum_{i=0}^m b_i p^i$$

összegeket k felbontásainak, ahol a felbontás b_i együtthatói nemnegatív egészek. Azt állítjuk, hogy ha $k = (a_n a_{n-1} \dots a_0)_p$, akkor

$$\sum_{i=0}^m b_i \geq \sum_{i=0}^n a_i,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a_i = b_i$ (minden i értékre, itt természetesen $i > n$ esetén a_i -t, $i > m$ esetén b_i -t nullának tekintjük), azaz egy k pozitív egész felbontásainak együtthatóinak összege akkor és csak akkor minimális, ha annak együtthatói éppen az adott számrendszerbeli alakjának számjegyei.

A lemma bizonyítása. Rögzítsünk egy pozitív egész k -t és legyen

$$k = (a_n a_{n-1} \dots a_0)_p = \sum_{i=0}^n a_i p^i.$$

A sokszor számrendszerek alaptételeként is emlegetett tétel ([11], 1.31-es tétel) azt állítja a mi terminológiánkkal, hogy egy tetszőleges pozitív egész egy felbontásának b_i együtthatóira akkor és csak akkor teljesül $0 \leq b_i < p$, ha a b_i együtthatók rendre megegyeznek a szám adott számrendszerbeli alakjának számjegyeivel. Vegyünk egy $\sum_{i=0}^n a_i p^i$ -től különböző $\sum_{i=0}^m b_i p^i$ felbontást. A már említett számrendszerek alaptételéből következik, hogy ez a felbontás tartalmaz legalább egy $b_i \geq p$ együtthatót. Tekintsük a k következő módosított felbontását:

$$k = \left(\sum_{i=0}^m b_i p^i \right) = b_0 p^0 + b_1 p^1 + \dots + (b_i - p) p^i + (b_{i+1} + 1) p^{i+1} + \dots + b_m p^m.$$

Vegyük észre, hogy a módosított felbontásban az együtthatók összege pontosan $p - 1 (> 0)$ -val kevesebb, mint a $\sum b_i p^i$ felbontásban. Azt kaptuk tehát, hogy k tetszőleges $\sum a_i p^i$ -től különböző felbontásához található olyan felbontás, melyben kisebb az együtthatók összege. Vigyázat, az eddigiekből még nem következik, hogy a $\sum a_i p^i$ felbontásban minimális az együtthatók összege. (Ehhez hasonló nevezetes logikai hibát vétett Jacob Steiner (1796-1863) az izoperimetrikus tétel bizonyításában lásd [10], 1937. feladat megoldása, 360-361. old.) Arra következtethetünk csupán, hogy ha van minimális együtthatóösszeg, akkor az csak a $\sum a_i p^i$ együtthatóösszege lehet. Könnyű látni azonban, hogy létezik minimális együtthatóösszeg, hiszen azok csak nemnegatív egészek lehetnek, és nyilvánvaló, hogy a nemnegatív egészek halmazának tetszőleges nemüres részhalmazának van minimális eleme. Készen vagyunk a lemma bizonyításával.

Az általánosított feladat bizonyítása. A most bizonyított lemmát fogjuk használni. Legyen $a = (a_n a_{n-1} \dots a_0)_p = \sum_{i=0}^n a_i p^i$, $b = (b_m b_{m-1} \dots b_0)_p = \sum_{i=0}^m b_i p^i$ és $ab = (c_r c_{r-1} \dots c_0)_p = \sum_{i=0}^r c_i p^i$. Az világos, hogy $S_p(ab) = \sum_{i=0}^r c_i$. Képezzük most ab egy másik felbontását (a lemmában definiált értelemben):

$$ab = \left(\sum_{i=0}^n a_i p^i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j p^j \right) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_i b_j p^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_i b_j \right) p^k.$$

A lemmánk tehát ebben az esetben éppen azt állítja a felbontásban szereplő együtthatók

$$\sum_{k=0}^{n+m} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_i b_j$$

összegére, hogy

$$S(ab) = \sum_{i=0}^r c_i \geq \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_i b_j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j \right) = S(a)S(b).$$

Készen vagyunk tehát a segédétel bizonyításával is.

Azt már láttuk, hogy a segédételből következnek a feladat állításai, így a feladat megoldásával is készen vagyunk. ■

Sokszor használt, közismert tétel a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség. Sokféleképpen bizonyítható (számos bizonyítás megtalálható a [6], [4] könyvekben), de egyik bizonyítása sem mondható triviálisnak. Most ismertetünk és bizonyítunk egy tételt, az ún. Jensen-egyenlőtlenséget, mely lényegében a konkávitás egy ekvivalens definíciója, és belőle egyszerű következményként kapható a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség.

8.1. tétel. (Jensen-egyenlőtlenség) *Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $a_1, \dots, a_n \in I$ és $t_1, \dots, t_n > 0$, $t_1 + \dots + t_n = 1$ esetén*

$$f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \geq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n).$$

Bizonyítás. Először is figyeljük meg, hogy $n = 2$ esetben éppen a konkávitás feltételét (lásd pl. [5], 7.15. Lemma) adja a tétel, így az elegendőség, illetőleg a szükségeség $n = 2$ esete világos. A szükségeség fennmaradó $n > 2$ eseteit teljes indukcióval

bizonyítjuk be. Tegyük fel, hogy a $2, \dots, n$ értékekre igaz az állítás. Természetes ötlet, hogy az $n + 1$ esetben úgy használjuk fel az indukciós feltevést, hogy az f argumentumában lévő $n + 1$ tagot két részre csoportosítjuk, majd az $n = 2$ esetet használva szétbontjuk az f -et, lehetővé téve az n eset - mint indukciós feltevés - használhatóságát.

$$\begin{aligned} f(t_1 a_1 + \dots + t_{n+1} a_{n+1}) &= f\left((1 - t_{n+1}) \frac{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n}{1 - t_{n+1}} + t_{n+1} a_{n+1}\right) \geq \\ &\geq (1 - t_{n+1}) \cdot f\left(\frac{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n}{1 - t_{n+1}}\right) + t_{n+1} f(a_{n+1}) = \\ &= (1 - t_{n+1}) \cdot f\left(\frac{t_1}{1 - t_{n+1}} a_1 + \dots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}} a_n\right) + t_{n+1} f(a_{n+1}). \end{aligned}$$

Most észrevéve, hogy $\frac{t_1}{1 - t_{n+1}} + \dots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}} = 1$, használhatjuk az indukciós feltételt az n esetben. Ezzel tovább folytatva a becslést

$$\begin{aligned} &\geq (1 - t_{n+1}) \left(\frac{t_1}{1 - t_{n+1}} f(a_1) + \dots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}} f(a_n) \right) + t_{n+1} f(a_{n+1}) = \\ &= t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n) + t_{n+1} f(a_{n+1}) \end{aligned}$$

adódik, mely éppen a bizonyítandó állítás. ■

8.2. tétel. (Szám-tani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség) $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számok esetén

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Bizonyítás. A jól ismert $\log x$ függvény, mint az köztudott konkáv. Alkalmazhatjuk rá tehát a Jensen-egyenlőtlenséget az $a_1, \dots, a_n$ pozitív számokkal és az $1/n$ súlyokkal:

$$\log\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\log(a_1) + \dots + \log(a_n)}{n} = \log\left(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}\right),$$

ahonnan (a $\log x$ szigorú monoton növekedését kihasználva):

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

adódik, mely éppen a bizonyítandó állítás. ■

Teljesen hasonló helyettesítéssel adódik az általános hatványközepek közötti egyenlőtlenség (sőt, ennek súlyozott változata) is, ami mutatja a Jensen-egyenlőtlenség általánosságát és erejét. Ennek ellenére felhívjuk az Olvasó figyelmét

arra, hogy a Jensen egyenlőtlenség fent bemutatott bizonyítása egyáltalán nem hosszabb, vagy bonyolultabb a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség szokásos bizonyításainál. Egy átlagosnak mondható teljes indukcióról van szó.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy habár a Jensen-egyenlőtlenség fenti bizonyítása teljesen elemi, a logaritmus függvény konkávitásának precíz bizonyítása (annak ellenére, hogy az állítás szemléletesen nyilvánvaló), az analízis eszközeire támaszkodik.

Végezetül szeretnék köszönetet mondani Németh Zoltán és Kosztolányi József tanár uraknak, amiért ezen dolgozat megírására bíztattak. Németh Zoltán tanár urat külön köszönet illeti, amiért a dolgozat megírása alatt végig segítségemre volt, hasznos tanácsaival, ötleteivel ellátott, még a legbutább kérdéseimre is türelemmel válaszolt. Köszönettel tartozom továbbá Nagy Gábornak, kombinatorika gyakorlatvezetőmnek, akitől az 1.1 feladat és annak 1.2 általánosítása származik.

Zárszóként álljon itt egy idézet [8]-ből.

„Az igényesebb tervnek több esélye van a sikerre, feltéve, hogy – túl azon az elhatározáson, hogy nagyobb fába vágjuk a fejszénket – mélyebb bepillantást enged a dolgok lényegébe, mint az eredeti terv.”

(Pólya György)

Hivatkozások

- [1] Darvasi Gyula, A koszinusz-tétel két újabb szemléltetése, *A matematika tanítása*, 18. évf. 5. sz. 18-22., 2010.
- [2] Horvay Katalin - Reiman István, *Geometriai feladatok gyűjteménye I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.
- [3] Kosztolányi József, Egy ötlet: Általánosítsunk!, *Polygon*, XI. köt.1. szám, 2002.jún..
- [4] Kosztolányi József - Makay Géza - Pintér Klára - Pintér Lajos, *Matematikai problémakalauz I.*, Polygon, 1999.
- [5] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera, *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.
- [6] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex-Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003.
- [7] Pólya György, *Indukció és analógia*, Gondolat, 1988.
- [8] Pólya György, *A gondolkodás iskolája*, Gondolat, 1977.
- [9] Reiman István - Dobos Sándor, *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-2003*, Typotex, 2003.
- [10] Róka Sándor, *2000 feladat az elemi matematika köréből*, Typotex, 2006.
- [11] Szalay Mihály, *Számelmélet*, Typotex-Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.