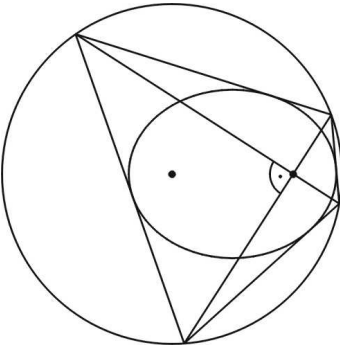


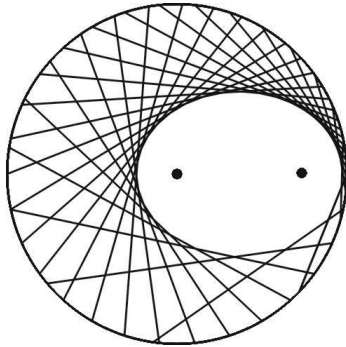
Húrnégyszög és ellipszis

KRISZTIN NÉMET ISTVÁN

A húrnégyszögek közül különösen érdekesek azok, melyeknek átlói merőlegesek egymásra. Több feladatgyűjteményben, könyvben, folyóiratban, weboldalon találkozunk rájuk vonatkozó feladatokkal, tulajdonságaikat tárgyaló írásokkal (pl.: [3], [4], [8], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17].) Egy régebbi angol könyvben ([2] 100. o.) találtam egy ábrát (1. ábra), a következő, talán kevésbé ismert jellemzőjükről. Rögzítsünk egy kört és egy belső pontját, majd tekintsük az adott körbe írt olyan húrnégyszögeket, melyeknek átlói merőlegesen metszik egymást az adott belső pontban. E húrnégyszögek egy ellipszist burkolnak.



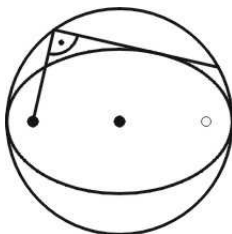
1. ábra



2. ábra

Az Euklides dinamikus geometriai szoftver animációjából készült 2. ábrán szépen látszik a burkolt ellipszis, és az is sejthető, hogy fókuszai éppen az adott kör középpontja és az adott belső pont. (Az áttekinthetőség miatt a tekintett négyszögeknek csak az egyik oldala szerepel az ábrán.)

Korábban nem találkoztam húrnégyszög és ellipszis e kapcsolatával. Az említett [2] könyvben az ábrához nem kapcsolódott semmilyen magyarázat. Nagyon megtetszett az összefüggés, azonnal megpróbáltam magam adni rá indoklást. A problémával való foglalkozás és a hozzá kapcsolódó irodalom tanulmányozása közben több ötlet is eszembe jutott. Végül hétféle megoldást találtam a feladatra. Ezeket foglalom össze ebben az írásban, abban a reményben, hogy talán mások számára is érdekes lesz ez a téma.



3. ábra

Az első hat megoldás elemi geometriai eszközöket használ. Közös gyökerük az a tény (3. ábra), hogy ha egy adott kör rögzített belső pontjából szelőket húzunk, és a metszéspontokba merőlegeseket állítunk a szelőkre, akkor e merőlegesek azt az ellipszist burkolják, aminek főköre az adott kör (pl. [5]). (Vagyis fókuszai az adott pont és annak a körközéppontra vonatkozó tükörképe, nagytengelye pedig a körátmérő.)

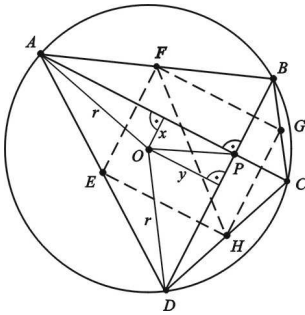
A 2. ábra alapján kialakult sejtésünk igazolására azt fogjuk megmutatni, hogy van olyan kör, hogy az 1. ábra húrnégyszögének oldalai éppen az előbb említett „szelőkre merőlegesek” lesznek. A sejtés szerint a fókuszok éppen a középpont és az átlók metszéspontja, ezért ezek egyikéből kell merőlegeseket állítani az oldalakra. A középpontot választjuk, hiszen ekkor a merőlegesek talppontjai éppen a négyszög-oldalak felezőpontjai lesznek. Ezek után tehát azt kell belátnunk, hogy a tekintett húrnégyszögek oldalfelező pontjai egy olyan kört alkotnak, melynek középpontja éppen a felezőpontja lesz az eredeti középpontot és az átlók metszéspontját összekötő szakasznak.

Első megoldás. Elemi háromszög-, négyszög- és körgeometriai összefüggéseket használok, ezt találtam meg először. Mint később, az irodalom tanulmányozása közben kiderült, nagyjából ez a feladat „standard” megoldási módszere (pl.: [7], [11], [13] részben)

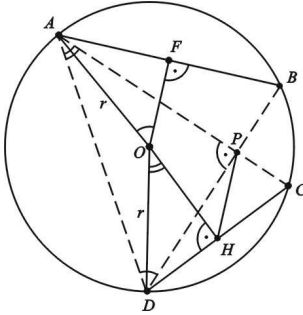
Először tekintsük az O középpontú, r sugarú kört, egy P belső pontját, továbbá egy olyan $ABCD$ húrnégyszögét, aminek átlói merőleges metszik egymást P -ben (4. ábra). A háromszög középvonalának tulajdonságai, és az átlók merőlegessége azonnal adják, hogy az $EFGH$ négyszög téglalap. A továbbiakban be kell látnunk, hogy e téglalapok körülírt köreinek ugyanazon pont a középpontjuk, és ugyanakkora a sugaruk. Az utóbbival kezdjük.

Az $\overline{FH}$ átmérőre a háromszög középvonalainak tulajdonságai miatt $\overline{FH}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{4} + \frac{\overline{BD}^2}{4}$. Ha x , ill. y jelöli O távolságát $\overline{AC}$ -től, ill. $\overline{BD}$ -től, akkor $\frac{\overline{AC}^2}{4} = r^2 - x^2$, ill. $\frac{\overline{BD}^2}{4} = r^2 - y^2$, továbbá $x^2 + y^2 = \overline{OP}^2$. E négy egyenlőség adja, hogy

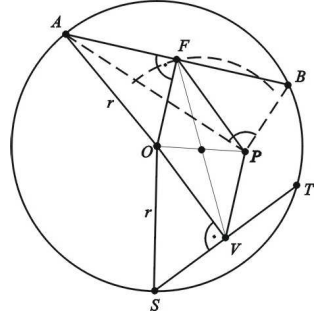
$\overline{FH}^2 = 2r^2 - \overline{OP}^2$. r és $\overline{OP}$ olyan konstansok, melyekre $\overline{OP} < r$, így $\overline{FH}$ is pozitív konstans, vagyis az $EFGH$ téglalapok körülírt köreinek sugara valóban állandó.



4. ábra



5. ábra



6. ábra

A középpont állandóságának vizsgálatához az 5. ábrát tekintjük. Célunk megmutatni, hogy az $OHPF$ négyszög paralelogramma (, ami esetleg elfajul). Hiszen ekkor adódik, hogy az $\overline{FH}$ átmérő felezőpontja minden esetben éppen a fix $\overline{OP}$ szakasz felezőpontja, amely pont így a keresett állandó körközéppont lesz. Azt fogjuk megmutatni, hogy $OHPF$ szemközti oldalai egyenlők. Szögek vizsgálatával kezdünk. Egyrészt, a kerületi és középponti szögek tétele szerint az O -nál és D -nél levő egy, ill. az O -nál és A -nál levő két ívvel jelölt szögek egyenlők. Másrészt, az ADP háromszögből kapjuk, hogy az egy és a két ívvel jelölt szögek pótszögek. Ha ezek után tekintjük az OAF és DOH háromszögeket, akkor megállapíthatjuk, hogy egybevágók; emiatt $\overline{OF} = \overline{DH}$. Végül, a DCP háromszög adja, hogy $\overline{DH} = \overline{HP}$; így $\overline{OF} = \overline{HP}$. Hasonlóan vezethető le az $\overline{OH} = \overline{FP}$ egyenlőség is, amivel elértük célunkat.

Fordítva, legyen most F az $\overline{OP}$ felezőpontja körüli, $\sqrt{2r^2 - \overline{OP}^2}$ átmérőjű kör pontja (6. ábra). (Az áttekinthetőség miatt ez utóbbi körnek csak egy ívét rajzoltuk meg.) Célunk megmutatni, hogy tartozik hozzá egy megfelelő húrnégyszög. Legyen V F képe az $\overline{OP}$ felezőpontjára való tükrözésnél. Legyen $\overline{AB}$, ill. $\overline{ST}$ az F , ill. a V által felezett húr. $OVPF$ paralelogramma, amire írjuk fel az oldalak és átlók közötti négyzetes összefüggést.

$$\overline{FV}^2 + \overline{OP}^2 = 2(\overline{FO}^2 + \overline{OV}^2)$$

$\overline{FV}$ az $\overline{OP}$ felezőpontja körüli kör átmérője, AOF és OSV háromszögek derékszö-
gűek, így az előző egyenlőség a következő alakot ölti:

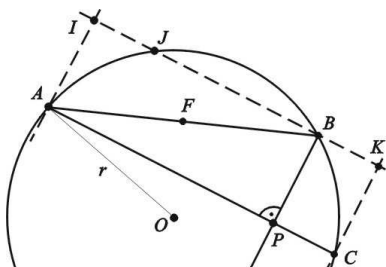
$$2r^2 - \overline{OP}^2 + \overline{OP}^2 = 2(r^2 - \overline{AF}^2 + r^2 - \overline{SV}^2), \quad \text{vagyis} \quad \overline{AF}^2 + \overline{SV}^2 = r^2$$

Eszerint $\overline{OV} = \overline{AF}$, amiből $\overline{FP} = \overline{AF}$ adódik. Így APB derékszög. Ha most (AP) , ill. (BP) és a kör másik metszéspontja C , ill. D , akkor az $ABCD$ húrnégyszög

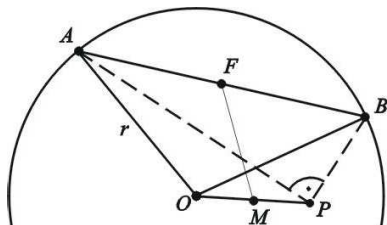
átlói merőlegesek, az előző rész szerint tehát a többi oldalfelező pont is rajta van az F -et tartalmazó körön. Ezzel a bizonyítás kész.

A többi megoldásnál a fordított irányt a rövideg kedvéért elhagyjuk. Mindegyiknél az aktuális gondolatmeneten „visszafelé haladva” megkaphatjuk APB derékszög voltát.

Második megoldás. Ebben pont körre vonatkozó hatványa és hasonlóság szerepel. E megoldás Kárteszi Ferenc [9] írásának egy részletére épül. Az idézett cikk egy feladatsorozat, melynek (egyik) célja azon pontok megtalálása, ahonnan egy ellipszis derékszög alatt látszik. E feladatsorozat egyik elemét fogjuk itt felhasználni, illusztrálásához a 7. ábrát tekintjük. (A [9]-beli, eredeti állítást kicsit átfogalmazzuk.) Az O középpontú, r sugarú kör egy belső pontja legyen P , $\overline{AB}$ pedig olyan húrja, melyre APB derékszög. Tekintsük azt az I pontot, melyre az $APBI$ négyszög téglalap. Bizonyítandó, hogy I egy O középpontú körön van.



7. ábra



8. ábra

Legyen J , ill. C a kör és (IB) , ill. (AP) másik metszéspontja, K pedig az a pont, melyre a $BPCK$ négyszög téglalap. I és K nyilván külső pontok. Ekkor a téglalapok és a $\overline{JB}$ felezőmerőlegesére való tengelyes szimmetria miatt $\overline{AP} = \overline{IB}$ és $\overline{PC} = \overline{IJ}$, továbbá $\overline{PA}$ és $\overline{IB}$ ellentétes irányúak. Így P -nek és I -nek az adott körre vonatkozó hatványai egymás ellentettjei: $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = -\overline{IB} \cdot \overline{IJ}$. E hatványokat a sugárral kifejezve kapjuk, hogy $r^2 - \overline{OP}^2 = -\left(r^2 - \overline{OI}^2\right)$. Rendezve: $\overline{OI} = \sqrt{2r^2 - \overline{OP}^2}$, ami r , O és P fix volta miatt azt jelenti, hogy I az O középpontú, $\sqrt{2r^2 - \overline{OP}^2}$ sugarú kör pontja.

Ennek a [9]-beli eredménynek egy egyszerű kiegészítése adja feladatunk második megoldását. Alkalmazzuk ugyanis a P középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot: ennél I képe éppen $\overline{AB}$ F felezőpontja, az előbb kapott, I -t tartalmazó kör képe pedig az $\overline{OP}$ felezőpontja körüli, $\sqrt{2r^2 - \overline{OP}^2}$ átmérőjű kör. Tehát ez utóbbi kör tartalmazza F -et, amivel ismét célhoz értünk.

Harmadik megoldás. Vektorokkal történik, a 8. ábra szerint. Az előző ábrákból az $OABP$ négyszöget, és $\overline{AB}$, ill. $\overline{OP}$ F , ill. M felezőpontját emeltük ki. Célunk megmutatni, hogy $\overrightarrow{MF}$ hossza konstans, független A -tól és B -től.

Nyilván

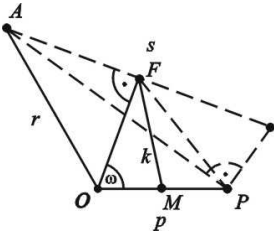
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MF} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} - \frac{\overrightarrow{OP}}{2}, \\ 4\overrightarrow{MF}^2 &= \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OP}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ miatt

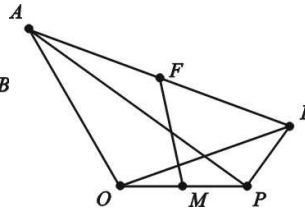
$$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = 0, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP}^2 = 0.$$

Ezt összevetve az előző egyenlőséggel, kapjuk, hogy $4\overrightarrow{MF}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OP}^2$. Így $\overrightarrow{MF}$ hossza $\frac{\sqrt{2r^2 - \overrightarrow{OP}^2}}{2}$, ami konstans. Tehát F az M középpontú, $\sqrt{2r^2 - \overrightarrow{OP}^2}$ átmérőjű körvonal pontja.

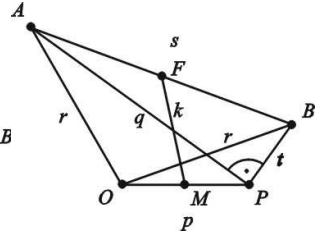
Negyedik megoldás. Most a cosinus-tétel a főszerep. A továbbiakban a 9. ábra jeleléseit használjuk. Bevezetésként megállapítjuk, hogy az AOF derékszögű háromszög miatt $\overline{FO} = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$. Ezt felhasználva, írjuk fel a cosinus-tételt az OFM , ill. $OF P$ háromszög $\overline{FM}$, ill. $\overline{FP}$ oldalára. (A háromszögek elfajulók is lehetnek.)



9. ábra



10. ábra



11. ábra

$$\begin{aligned}k^2 &= \left(r^2 - \frac{s^2}{4}\right) + \frac{p^2}{4} - 2\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \cdot \frac{p}{2} \cdot \cos \omega, \\ \overline{FP}^2 &= \left(r^2 - \frac{s^2}{4}\right) + p^2 - 2\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \cdot p \cdot \cos \omega.\end{aligned}$$

Ezekből $\cos \omega$ kiküszöbölésével az alábbi egyenlőség adódik:

$$4k^2 = 2\left(\overline{FP}^2 - \frac{s^2}{4}\right) + 2r^2 - p^2$$

Most használjuk ki, hogy az APB háromszögben P -nél derékszög van. Ekkor $\overline{FP} = \frac{s}{2}$, így az előző egyenlőség szerint $4k^2 = 2r^2 - p^2$. $p < r$, és konstansok, így ez utóbbi egyenlőség $\overline{FM} = k$ és M fix volta miatt azt jelenti, hogy F rajta van az M középpontú, $k = \frac{\sqrt{2r^2 - p^2}}{2}$ sugarú körön.

Ötödik megoldás. Ez egy önmagában is érdekes, négyszög középvonalára vonatkozó tételre épül. Ezt az összefüggést szintén a bevezetésben említett angol könyvben ([2] 117. o.) találtam. Legyen az $OABP$ négyszög egyik középvonala $\overline{MF}$ (10. ábra). Ekkor:

$$4\overline{MF}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{PA}^2 - \overline{OP}^2 - \overline{AB}^2$$

Az állítás vektorok segítségével egyszerűen bizonyítható: az $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OP}$ vektorokkal kifejezve az egyenlőség két oldalán szereplő négyzeteket, rövid számolás adja az egyenlőséget. (Ez elfajuló négyszögre is igaz – pl. O , P , B kollineárisak –, ill. önátmetszőre is.) Véleményünk szerint azért érdemel külön figyelmet e tétel, mert általánosítása a paralelogramma oldalai és átlói közötti négyzetes összefüggésnek, amint erről könnyen meggyőződhetünk.

A továbbiakban a 11. ábra jelöléseit használjuk. Alkalmazzuk a négyszög középvonalára vonatkozó iménti egyenlőséget feladatunkra:

$$4k^2 = r^2 + t^2 + r^2 + q^2 - p^2 - s^2$$

Az APB háromszögben P -nél derékszög van, vagyis $s^2 = q^2 + t^2$. Ez, az előző egyenlőséggel együtt a következőt adja: $4k^2 = 2r^2 - p^2$. Csakúgy, mint az előző megoldásban, következik, hogy F rajta van az M középpontú, $\frac{\sqrt{2r^2 - p^2}}{2}$ sugarú körön.

Hatodik megoldás. Koordinátageometriai úton történik. A koordinátarendszert a következő módon vesszük fel: kezdőpontja az adott k kör O középpontja, egysége k sugara, az x -tengely pozitív fele tartalmazza az adott P pontot. $k: x^2 + y^2 = 1$; $P(p; 0)$, $p \in [0; 1)$. Legyen $A(a; b)$, $B(c; d)$ két pont k -n úgy, hogy $(AP) \perp (BP)$. Ekkor $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ és $(a - p)(c - p) + bd = 0$. Ha $F(x; y)$ az $\overline{AB}$ felezőpontja, akkor $2x = a + c$ és $2y = b + d$.

Feladatunk az $F(x; y)$ -ra vonatkozó egyenlet felírása. Ehhez az A -ra, B -re, a P -nél levő merőlegességre és a felezőpontra vonatkozó, az alábbi öt egyenletből álló egyenletrendszerből kell kiküszöbölni a -t, b -t, c -t, és d -t.

$$a^2 + b^2 = 1;$$

$$c^2 + d^2 = 1;$$

$$ac - ap - pc + p^2 + bd = 0;$$

$$2x = a + c;$$

$$2y = b + d$$

A kiküszöbölés viszonylag egyszerű. Ha az utolsó két egyenletet négyzetre emeljük és összeadjuk, akkor a jobboldalon keletkező négyzetek összegei helyett az első két egyenlet alapján 2 írható:

$$4x^2 + 4y^2 = 2 + 2(ac + bd)$$

A jobboldal a harmadik egyenlet alapján tovább alakítható:

$$2x^2 + 2y^2 = 1 + ap + pc - p^2$$

A jobboldal közepén p kiemelhető, és a negyedik egyenlet segítségével így alakul:

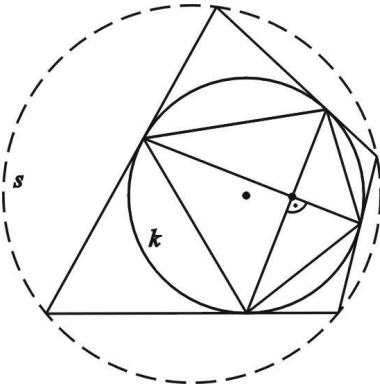
$$2x^2 + 2y^2 = 1 + 2xp - p^2$$

Megvan tehát a keresett egyenlet. Teljes négyzetté alakítva:

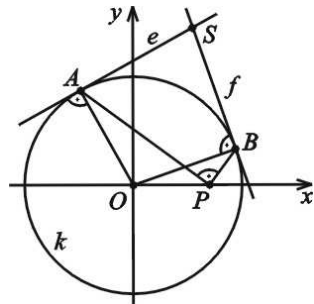
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2 - p^2}{4}$$

A bizonyítás kész, hiszen $p \in [0; 1)$ miatt ez az egyenlet egy olyan kör egyenlete, amelynek középpontja $(p/2; 0)$, sugara $\sqrt{2 - p^2}/2$.

Hetedik megoldás. Ez az előzőknél bonyolultabb eszközöket használ. Alapja egy polaritásra vonatkozó tétel: ellipszis (vagy kör) érintőinek halmazát kapjuk, ha körre vonatkozó polaritást alkalmazunk egy olyan körvonal pontjainak halmazára, melyhez képest a polaritás alapkörének középpontja belső pont (pl.: [10]). Az eredeti feladat kapcsán ez a tétel azért juthat eszünkbe, mert ha tekintjük az egyik húrnégyszög csúcaiban az adott körhöz vont érintőket (12. ábra), akkor ezek közül a szomszédosak metszéspontjai és a húrnégyszög oldalegyenesei éppen egymás képei az adott körre vonatkozó polaritásban. Így a húrnégyszögek ellipszis-burkolásához azt kell megmutatni, hogy ezen metszéspontok mértani helye egy körvonal, amihez képest az adott kör középpontja belső.



12. ábra



13. ábra

Azt viszonylag egyszerű belátni, hogy a húrnégyszög egy rögzített helyzeténél a keletkező érintőnégyszög egyben húrnégyszög is (pl. [3], [4], [8], [12]). Azt azonban már nehezebb igazolni, hogy a kapott „érintőhúr”-négyszög s körülírt köre állandó, miközben az eredeti húrnégyszög „körbefordul” a k körben. Ennek szintetikus bizonyítása található [3]-ban, [14]-ben. Mi itt koordináta geometriai eszközökkel vezetjük le, komputeralgebrai szoftver segítségével.

A koordinátarendszert úgy vesszük fel, ahogy előzőleg (13. ábra). A k körre és a P , A , B pontokra vonatkozó egyenletek is ugyanazok: $k: x^2 + y^2 = 1$; $P(p; 0)$, $p \in [0; 1)$; $A(a; b)$, $B(c; d)$; $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ és $(a - p)(c - p) + bd = 0$. Legyen e , ill. f a k -hoz A -ban, ill. B -ben vont érintő; egyenleteik $e: ax + by = 1$, ill. $f: cx + dy = 1$. Feladatunk a metszéspontjukra, $S(x; y)$ -ra vonatkozó egyenlet felírása. Ehhez az alábbi egyenletrendszerből kell kiküszöbölni a -t, b -t, c -t, d -t.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1; \\ c^2 + d^2 &= 1; \\ ac - ap - pc + p^2 + bd &= 0; \\ ax + by &= 1; \\ cx + dy &= 1 \end{aligned}$$

Ezt a kiküszöbölést már nem sikerült „puszta kézzel” kiszámolni. Komputeralgebrai programmal elvégezve, a következő összefüggést kapjuk x , y és p között:

$$p^2 x^2 + p^2 y^2 - 2px - x^2 - y^2 + 2 = 0.$$

Rendezve:

$$\left(x + \frac{p}{1 - p^2}\right)^2 + y^2 = \frac{2 - p^2}{(1 - p^2)^2}.$$

$p \in [0; 1)$ miatt ez az egyenlet egy olyan s kör egyenlete, amelynek középpontja $(-\frac{p}{1-p^2}; 0)$, sugara $\frac{\sqrt{2-p^2}}{1-p^2}$, továbbá amely az origót belsejében tartalmazza, hiszen $p < \sqrt{2-p^2}$. Tehát az S metszéspontok valóban egy, céljainknak megfelelő körvonalon vannak. E kör helyességét két egyszerű megfigyelés is megerősíti. Egyrészt, középpontja az x -tengely negatív felére esik, ahogy az a 12. ábra alapján sejthető. Másrészt, ha P -t éppen O -nak választjuk, vagyis $p = 0$, akkor az egyenlet $x^2 + y^2 = 2$. Ez szintén megfelelő, hiszen a $P = O$ esetben az érintők négyszöge egy négyzet, aminek körülírt köréről azonnal látszik, hogy középpontja minden esetben O , sugara pedig $\sqrt{2}$.

A feladat lezárásaként megfogalmazzuk az ellipszisre és húrnégyszögre vonatkozó burkolási tétel analogonjait hiperbola, ill. parabola esetére. A részleteket mellőzzük.

Legyen adott egy O középpontú, r sugarú kör és egy olyan P külső pont, melyre $\overline{OP} < r\sqrt{2}$. Tekintsük a körbe írt olyan önátmetsző négyszögeket, melyeknek átló-egyenesei merőlegesen metszik egymást a P pontban. Ekkor e négyszögek oldalegyenesei azt a hiperbolát burkolják, melynek fókuszai O és P , főkörének átmérője pedig $\sqrt{2r^2 - \overline{OP}^2}$.

Legyen adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont. Tekintsünk egy egymást P -ben merőlegesen metsző egyenespárt és az adott egyenessel alkotott metszéspontjaikat. A metszéspontokból húzzunk párhuzamos egyenest a pár másik tagjával. Ekkor ezen egyenesek azt a parabolát burkolják, melynek fókusza P , csúcserintője pedig az adott egyenes.

Végezetül a probléma háttéréről ejtünk néhány szót. E burkolási tételek speciális esetei az ún. Poncelet-féle záródási tételnek:

Legyen adott két, egymást nem érintő, nemelfajuló kúpszelet. Az első kúpszelet egyik pontjából húzzunk érintőt a második kúpszelethez, majd az érintő és az első kúpszelet másik metszéspontjából húzzunk újabb érintőt a második kúpszelethez. Ha ezt az eljárást folytatva a kapott töröttvonal n lépés után záródik, akkor az első kúpszelet bármely más pontjából kiindulva is záródik n lépés után.

E tételt több olyan helyen említik, ahol egy sokszög köré és bele írt körről van szó. Részletes tárgyalása: [1]. A tétellel kapcsolatban nagyon hasznos irodalom [6] és [7] is. A [18] weboldalon szép animációkat láthatunk két kör esetére vonatkozólag.

Irodalomjegyzék

- [1] Berger, M.: Geometry II., Springer-Verlag, New York - Berlin, 1987.
- [2] Budden, F.J. – Wormell, C.P.: Mathematics through geometry, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [3] Dörrie, H.: Diadalmas matematika, Gondolat Kiadó, Budapest, 1965. (208-212. o.)
- [4] Gerőcs László: Azok a csodálatos hűrnégyszögek, Műszaki Kiadó, Budapest, 1999. (9-14. o.)
- [5] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987. (413-415. o.)
- [6] Hraskó András: Harmadrendű görbék II. – Poncelet tétele, Középiskolai Matematikai Lapok, 2000/5. (264-275. o.)
- [7] Hraskó András: Geometriai tételek a harmadrendű görbe csoporttulajdonságával összefüggésben, Doktori (Ph.D.) értekezés, ELTE, Budapest 2005 (F 1.2.1. b feladat, 11-14. o.)
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/doktori/doktori_public.pdf
 (utolsó megtekintés: 2012.01.12.)
- [8] Horvay Katalin – Reiman István: Geometriai feladatok gyűjteménye I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. (1096. feladat, 70., 285-286. o.)
- [9] Kárteszi Ferenc: Feladatsorozat – az ellipszis tulajdonságai, A Matematika tanítása, 1968. augusztus (113-115. o.)

- [10] Pelle Béla: Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979, (302. o.)
- [11] Sharygin, I.F.: Problems in plane geometry, Mir Publishers, Moszkva, 1988 (247. feladat, 125., 313-314. o.)
- [12] Strohmajer János: Geometriai példatár I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1988 (29-30. feladatok, 26-27., 112-113 o.)
- [13] A Matematika tanítása – 1968. március (61. o.)
- [14] A Matematika tanítása – 1979. szeptember (128-129. o.)
- [15] Erdős Pál Matematikai Tehetségfokozó Iskola honlapja – 3., 4., 9., 19. geometria-feladat
<http://www.dcs.vein.hu/mivi/erdosprog/feladatok/geometria/>
(utolsó megtekintés: 2012.01.12.)
- [16] SZTE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium honlapja – Tarcsay Tamás: Használjuk a vektorokat a geometriai problémák megoldásakor – 2., 4. feladat
<http://sagv.gyakg.u-szeged.hu/tantargy/mat/VEKTOR.HTM>
(utolsó megtekintés: 2012.01.12.)
- [17] Trembeczki Csaba honlapja – Geometria a komplex számsíkon: 14., 15. feladat
<http://www.ngkszki.hu/~trembe/szakdoga/06.htm>
(utolsó megtekintés: 2012.01.12.)
- [18] Weisstein, Eric W. "Poncelet's Porism." From *MathWorld*—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html>
(utolsó megtekintés 2012.01.12.)

*Krisztin Német István, SZTE JGYPK TÓKI Matematika Szakcsoport,
6725 Szeged, Hattyas sor 10.,
krisztin@jgypk.u-szeged.hu*