

A permutáció-mátrixok egy általánosítása

DÁLYAY PÁL PÉTER

Bevezetés. A The American Mathematical Monthly folyóirat 2007. június-júliusi számában M. Farrokhi D. G. matematikus egy érdekes feladatot közölt (lásd [4]-et). A feladat megoldása után fogalmazódtak meg bennem azok a gondolatok, amelyek ebben a cikkben megjelennek. Mielőtt rátérnénk a feladatra bevezetünk néhány jelölést. Ha m egy pozitív egész, jelölje $[m]$ az $\{1, 2, \dots, m\}$ halmazt. Ha $A = (a_{ij})$ egy $m \times m$ -es valós mátrix, jelölje $a_{ij}^{(n)}$ az A^n mátrix i -edik sorában és j -edik oszlopában található elemet. Legyen továbbá $E(A)$ az A mátrix pozitív egész kitevőjű hatványai elemeinek halmaza, vagyis $E(A) = \{a_{ij}^{(n)} : i, j \in [m], n \in \mathbb{Z}^+\}$. Most pedig lássuk az említett feladatot:

Feladat. *Legyen A egy a nemnegatív egész számok halmaza feletti invertálható mátrix. Igazoljuk, hogy ha $E(A)$ véges, akkor A egy permutáció-mátrix.*

Permutáció-mátrix. Először is tisztázzuk a fogalmat. Ha m egy pozitív egész, jelölje S_m az $[m]$ halmaz permutációinak halmazát. Az $m \times m$ -es $A = (a_{ij})$ mátrixot permutáció-mátrixnak nevezzük, ha létezik egy olyan σ permutáció S_m -ben, amelyre minden $(i, j) \in [m]^2$ esetén

$$(1) \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \sigma(i), \\ 1, & \text{ha } j = \sigma(i). \end{cases}$$

Ha A permutáció-mátrix, akkor csak egy olyan σ permutáció van, amely eleget tesz az (1) összefüggésnek. Valóban, ha A permutáció-mátrix és a σ és τ permutációk S_m -ből eleget tesznek a definícióban szereplő összefüggéseknek, akkor egy $1 \leq i \leq m$ esetén $a_{i\sigma(i)} = a_{i\tau(i)} = 1$, mivel az i -edik sorban egyetlen egy elem 1, a többi pedig 0, következik, hogy $\sigma(i) = \tau(i)$. Ez igaz minden $1 \leq i \leq m$ esetén, így következik, hogy $\sigma = \tau$. Az is világos, hogy egy $\sigma \in S_m$ permutációhoz az (1) képlettel egyértelműen rendelhetünk mátrixot, amelyet a továbbiakban M_σ -val

fogunk jelölni és a σ -hoz tartozó permutáció-mátrixnak fogjuk nevezni. A determináns definíciója alapján belátható, hogy $\det(M_\sigma) = \text{sgn } \sigma \neq 0$. Ezek alapján egy $\sigma \rightarrow M_\sigma$ leképezést értelmezhetünk, amelyről könnyen igazolhatjuk, hogy injektív és megőrzi a megfelelő műveleteket. Ez azt mutatja, hogy az S_m csoport (a permutációk szorzására nézve) izomorf a permutáció-mátrixok csoportjával (a mátrixok szorzására nézve). Ez az izomorfizmus fontossá teszi a permutáció-mátrixok tanulmányozását. Az említett feladat a permutáció-mátrixok jellegzetes tulajdonságait fogalmazza meg a nemnegatív egész számok algebrája feletti $m \times m$ -es mátrixok között. Mi első lépésként ugyanezt tesszük meg általánosabb keretek között.

Mátrixok a nemnegatív valós számok felett. Mint a cím is mondja itt nemnegatív valós számok feletti mátrixokkal fogunk foglalkozni. Megmutatjuk, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy ilyen $A = (a_{ij})$ mátrix permutáció-mátrix legyen, az hogy $E(A)$ korlátos legyen és létezzék egy olyan $\sigma \in S_m$ permutáció, amelyre $a_{i\sigma(i)} \geq 1$ minden $1 \leq i \leq m$ esetén. Ehhez az eredményhez az 1. Következményben jutunk el.

Először az $E(A)$ halmaz korlátosságát fogjuk vizsgálni. A következő lemma alsó becslést ad az A^n mátrix bizonyos elemeire az A mátrix egy σ permutációhoz tartozó elemei segítségével.

1. Lemma. *Ha A egy nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix és $\sigma \in S_m$, akkor minden $1 \leq i \leq m$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén fennáll az*

$$(2) \quad a_{i\sigma^n(i)}^{(n)} \geq \prod_{j=1}^n a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. $n = 1$ -re a két oldal egyenlő. Ha feltételezzük, hogy teljesül az egyenlőtlenség $n = k$ esetén, azaz minden $1 \leq i \leq m$ esetén fennáll $a_{i\sigma^k(i)}^{(k)} \geq \prod_{j=1}^k a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)}$, akkor

$$a_{i\sigma^{k+1}(i)}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^m a_{ij} a_{j\sigma^{k+1}(i)}^{(k)} \geq a_{i\sigma(i)} a_{\sigma(i)\sigma^k(\sigma(i))}^{(k)} \geq \prod_{j=1}^{k+1} a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)},$$

vagyis igaz az egyenlőtlenség $n = k + 1$ esetén is. Tehát a teljes indukció elve alapján minden $1 \leq i \leq m$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén teljesül a (2) egyenlőtlenség. ■

Ha létezik olyan σ permutáció S_m -ben, amelyre az $a_{i\sigma(i)}$ alakú elemek nem kisebbek 1-nél, akkor az $E(A)$ halmaz csak egyetlen esetben lehet korlátos. Arra a kérdésre, hogy melyik ez az eset a következő tétel ad választ.

1. Tétel. *Ha A egy nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix és létezik olyan σ permutáció S_m -ben, amelyre minden $1 \leq i \leq m$ esetén $a_{i\sigma(i)} \geq 1$, akkor az $E(A)$ halmaz csak akkor korlátos ha $a_{i\sigma^n(i)}^{(n)} = 1$ minden $1 \leq i \leq m$ és minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén.*

Bizonyítás. Az S_m permutáció csoportjában jelölje r a σ permutáció rendjét, így $\sigma^r = \varepsilon$, ahol ε az $[m]$ halmaz identikus permutációját jelöli. A (2) egyenlőtlenség alapján minden $1 \leq i \leq m$ esetén

$$a_{i\sigma^{nr}(i)}^{(nr)} \geq \left(\prod_{j=1}^r a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)} \right)^n \geq (a_{i\sigma(i)})^n.$$

Ha az $E(A)$ halmaz korlátos, mivel $a_{i\sigma(i)} \geq 1$ következik, hogy létezik egy K valós szám, amelyre $1 \leq (a_{i\sigma(i)})^n \leq K \Leftrightarrow 1 \leq a_{i\sigma(i)} \leq \sqrt[n]{K}$ minden 2-nél nem kisebb egész szám esetén, ahonnan $n \rightarrow \infty$ határátmenettel az $a_{i\sigma(i)} = 1$ egyenlőséget kapjuk. Ebből a (2) egyenlőtlenség alapján minden $1 \leq i \leq m$ esetén következik, hogy $a_{i\sigma^n(i)}^{(n)} \geq 1$. Továbbá $E(A^n) \subseteq E(A)$, ezért $E(A^n)$ is korlátos. Tehát A^n mátrix is teljesíti a lemma A -ra előírt feltételeit, így az előző bizonyítás alapján kimondható, hogy $a_{i\sigma^n(i)}^{(n)} = 1$ minden $1 \leq i \leq m$ és minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén. ■

Természetes az a kérdés, hogy az 1. Tétel feltételei mellett mi történik a mátrix többi elemével. Ezek becsléséhez segít a következő lemma.

2. Lemma. *Ha A egy nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix és létezik olyan σ permutáció S_m -ben, amelyre minden $1 \leq i \leq m$ esetén $a_{i\sigma(i)} \geq 1$, továbbá ha $b_n = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in [m] \setminus \{\sigma^n(i)\}} a_{ij}^{(n)}$, akkor minden $p, q \in \mathbb{Z}^+$ esetén $b_{p+q} \geq b_p + b_q$.*

Bizonyítás. Először bevezetünk néhány jelölést. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \Theta^{(n)} &= \{(i, j, k) \in [m]^3 : k \neq \sigma^n(i)\}, \\ \Phi(n) &= \{(i, j) \in [m]^2 : j \neq \sigma^n(i)\}, \\ \Theta_1(p, q) &= \{(i, j, \sigma^q(j)) \in [m]^3 : j \neq \sigma^p(i)\}, \\ \Theta_2(p, q) &= \{(\sigma^{-p}(s), s, t) \in [m]^3 : t \neq \sigma^q(s)\}, \end{aligned}$$

és vegyük észre, hogy $j \neq \sigma^p(i) \Leftrightarrow \sigma^q(j) \neq \sigma^{p+q}(i)$ valamint $t \neq \sigma^q(s) \Leftrightarrow t \neq \sigma^{p+q}(\sigma^{-p}(s))$, így fennáll a $\Theta_1(p, q) \cup \Theta_2(p, q) \subseteq \Theta^{(p+q)}$ és a $\Theta_1(p, q) \cap \Theta_2(p, q) = \emptyset$ összefüggés is. Mivel teljesül az 1. Lemma feltevése, a (2) egyenlőtlenség alapján

következik, hogy minden $1 \leq i \leq m$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén fennáll az $a_{i\sigma^n(i)}^{(n)} \geq 1$ egyenlőtlenség. Ezek után rátérhetünk egyenlőtlenségünk igazolására:

$$\begin{aligned}
 b_{p+q} &= \sum_{(i,k) \in \Phi(p+q)} a_{ik}^{(p+q)} = \sum_{(i,k) \in \Phi(p+q)} \sum_{j=1}^m a_{ij}^{(p)} a_{jk}^{(q)} = \sum_{(i,j,k) \in \Theta(p+q)} a_{ij}^{(p)} a_{jk}^{(q)} \\
 &\geq \sum_{(i,j,k) \in \Theta_1(p,q)} a_{ij}^{(p)} a_{jk}^{(q)} + \sum_{(i,j,k) \in \Theta_2(p,q)} a_{ij}^{(p)} a_{jk}^{(q)} \\
 &= \sum_{(i,j) \in \Phi(p)} a_{ij}^{(p)} a_{j\sigma^q(j)}^{(q)} + \sum_{(s,t) \in \Phi(q)} a_{\sigma^{-p}(s)s}^{(p)} a_{st}^{(q)} \\
 &\geq \sum_{(i,j) \in \Phi(p)} a_{ij}^{(p)} + \sum_{(s,t) \in \Phi(q)} a_{st}^{(q)} = b_p + b_q,
 \end{aligned}$$

vagyis $b_{p+q} \geq b_p + b_q$. ■

A 2. Lemma segítségével a 1. Tétel feltételei mellett rátérhetünk az A mátrix többi elemének meghatározására. Az eredményt a következő tételben foglaljuk össze.

2. Tétel. *Ha A egy olyan nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix, amelyre az $E(A)$ halmaz korlátos és létezik olyan $\sigma \in S_m$ permutáció, amelyre minden $1 \leq i \leq m$ esetén $a_{i\sigma(i)} \geq 1$, akkor minden $p \in \mathbb{Z}^+$ esetén $b_p = 0$. Ennek következményeképpen az A mátrix és minden hatványa permutáció-mátrix, pontosabban $A = M_\sigma$ és $A^p = M_{\sigma^p}$.*

Bizonyítás. Mivel $E(A)$ korlátos, következik, hogy a $\{b_n\}$ sorozat is korlátos. Pontosabban, ha K az $E(A)$ egy felső korlátja, akkor $m(m-1)K$ egy felső korlátja a $\{b_n\}$ sorozatnak. A 2. Lemma egyenlőtlenségéből azonnal következik, hogy minden $n, p \in \mathbb{Z}^+$ esetén fennállnak az

$$m(m-1)K \geq b_{2^n p} \geq 2^n b_p \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m(m-1)K}{2^n} \geq b_p \geq 0$$

egyenlőtlenségek, ahonnan $n \rightarrow \infty$ szerinti határátmenettel következik, hogy $b_p = 0$. Ebből következik, hogy $a_{ij}^{(p)} = 0$ minden $j \neq \sigma^p(i)$ esetén. Továbbá az 1. Tétel alapján $a_{i\sigma^p(i)}^{(p)} = 1$ minden $1 \leq i \leq m$ esetén. Mindezek figyelembe vételével kijelenthető, hogy minden $p \in \mathbb{Z}^+$ esetén A^p éppen a σ^p -nek megfelelő permutáció-mátrix, vagyis $A^p = M_{\sigma^p}$. ■

Ebből adódik egy szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy egy nemnegatív valós számok feletti mátrix permutáció-mátrix legyen.

1. Következmény. Az A nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix akkor és csak akkor permutáció-mátrix, ha teljesülnek a következő feltételek:

- (a) Létezik egy $\sigma \in S_m$, amelyre $a_{i\sigma(i)} \geq 1$ minden $1 \leq i \leq m$ esetén.
- (b) $E(A)$ korlátos.

Bizonyítás. A szükségeség. Ha A permutáció-mátrix, akkor létezik $\sigma \in S_m$ úgy, hogy $A = M_\sigma$, így $a_{i\sigma(i)} = 1$ minden $1 \leq i \leq m$ esetén, azaz teljesül az (a) feltétel. Ebből következik, hogy $A^n = M_{\sigma^n}$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Ha r jelöli σ rendjét az S_m csoportban, akkor $\sigma^r = \varepsilon$, ahol ε az identikus permutációt jelöli, így $A^r = I_m$, ahol I_m az $m \times m$ -es egységmátrixot jelöli. Ebből következik, hogy A -nak pontosan r különböző hatványa van, amelyek $A, A^2, \dots, A^{r-1}, A^r = I_m$, így $E(A)$ nyilvánvalóan véges, ezért korlátos is, azaz teljesül a (b) feltétel is.

Az elégségeség. Ha teljesülnek az (a) és (b) feltételek, vagyis létezik $\sigma \in S_m$, amelyre $a_{i\sigma(i)} \geq 1$ minden $1 \leq i \leq m$ esetén és $E(A)$ korlátos, akkor a 2. Tétel alapján következik, hogy $A = M_\sigma$. ■

A nemnegatív egész számok feletti mátrixokra azonnal adódik a következő eredmény, amely a bevezetőben említett feladatot is megoldja.

2. Következmény. Ha $A = (a_{ij})$ egy $m \times m$ típusú mátrix a nemnegatív egész számok halmaza felett, akkor A pontosan akkor permutáció-mátrix, amikor A invertálható és $E(A)$ véges.

Bizonyítás. Ha A permutáció-mátrix, akkor $\det A = \operatorname{sgn} \sigma \neq 0$, így A invertálható, és $E(A) = \{0, 1\}$, ami véges. Fordítva, tételezzük fel, hogy A invertálható és $E(A)$ véges. Ekkor $\det A = \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \neq 0$, így létezik egy σ permutáció S_m -ből, amelyre $\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \neq 0$. Mivel a szorzat tényezői nemnegatív egészek, következik, hogy $a_{i\sigma(i)} \geq 1$ minden $1 \leq i \leq m$ esetén. Ugyanakkor mivel $E(A)$ véges, korlátos is, így teljesül a 2. Tétel feltevése, amelyből következik, hogy $A = M_\sigma$, vagyis A permutáció-mátrix. ■

Egy másik azonnali eredmény a következő:

3. Következmény. Ha A egy olyan nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix és ha létezik két különböző pozitív egész p és q úgy, hogy $A^p = A^q$, akkor A pontosan akkor permutáció-mátrix, ha létezik olyan $\sigma \in S_m$ permutáció, amelyre minden $1 \leq i \leq m$ esetén $a_{i\sigma(i)} \geq 1$.

Bizonyítás. Ha $A = M_\sigma$ permutáció-mátrix, akkor minden $1 \leq i \leq m$ esetén $a_{i\sigma(i)} = 1$. Fordítva, tételezzük fel, hogy létezik olyan σ permutáció S_m -ben,

amelyre minden $1 \leq i \leq m$ esetén $a_{i\sigma(i)} \geq 1$. Mivel az $A^p = A^q$ feltételből azonnal következik, hogy $E(A)$ véges és így korlátos, teljesül a 2. Tétel feltevése, amelyből következik, hogy $A = M_\sigma$, vagyis A permutáció-mátrix. ■

A második lépést az általánosabb felé úgy tehetjük meg, hogy próbálunk lazítani az 1. Tétel és 2. Tétel feltevésén. Pontosabban, cseréljük ki a σ permutációra vonatkozó „minden $1 \leq i \leq m$ esetén $a_{i\sigma(i)} \geq 1$ ” feltételt az ennél gyengébb „ $\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \geq 1$ ” feltétellel.

Gyengébb feltételek általánosabb fogalmak. Az általánosabb feltétel néhány következményét fogalmazzuk meg a következő tételben.

3. Tétel. *Ha A egy olyan nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix, amelyre az $E(A)$ halmaz korlátos és létezik olyan $\sigma \in S_m$ permutáció, amelyre $\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \geq 1$, akkor teljesülnek a következők*

- (a) $\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} = 1$.
- (b) *Ha a $H \subseteq [m]$ halmaz invariáns a σ permutációra nézve, vagyis $\sigma(H) = H$, akkor $\prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} = 1$.*

Bizonyítás. (a) A (2) egyenlőtlenség szerint érvényes a következő alsó becslés:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m a_{i\sigma^n(i)}^{(n)} &\geq \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^m a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \right)^n \geq 1. \end{aligned}$$

Ha K jelöli az $E(A)$ halmaz egy felső korlátját, akkor az előző egyenlőtlenségből következik: $K^m \geq \left(\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \right)^n \geq 1$, vagyis $1 \leq \prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \leq \sqrt[n]{K^m}$, ahonnan $n \rightarrow \infty$ szerinti határátmenettel következik, hogy $\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} = 1$.

(b) Ha $H = [m]$, akkor a bizonyítandó egyenlőség azonos az (a) pontban szereplő egyenlőséggel. Most tételezzük fel, hogy $H \neq [m]$ és $\sigma(H) = H$. Mivel σ bijekció, következik, hogy $\overline{H} = [m] \setminus H$ is invariáns halmaza σ -nak. A már bizonyított egyenlőség alapján következik, hogy

$$\left(\prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} \right) \cdot \left(\prod_{i \in \overline{H}} a_{i\sigma(i)} \right) = 1.$$

Az egyenlőség csak úgy lehetséges, hogy legalább az egyik tényező nem kisebb mint

1. Tételezzük fel, hogy $\prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} \geq 1$. A (2) alapján fennáll

$$\begin{aligned} \prod_{i \in H} a_{i\sigma^n(i)} &\geq \prod_{i \in H} \prod_{j=1}^n a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)} = \prod_{j=1}^n \prod_{i \in H} a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)} = \prod_{j=1}^n \prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} \\ &= \left(\prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} \right)^n. \end{aligned}$$

Mivel $\prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} \geq 1$ és $\prod_{i \in H} a_{i\sigma^n(i)} \leq K^{|H|} < K^m$, következik, hogy $1 \leq \prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} < \sqrt[n]{K^m}$, majd határátmenettel kapjuk, hogy $\prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} = 1$. Ha pedig $\prod_{i \in \overline{H}} a_{i\sigma(i)} \geq 1$ az előző bizonyításban H és $\overline{H}$ szerepét felcserélve kapjuk, hogy $\prod_{i \in \overline{H}} a_{i\sigma(i)} = 1$. Ebből a $(\prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)}) \cdot (\prod_{i \in \overline{H}} a_{i\sigma(i)}) = 1$ egyenlőség alapján kapjuk, hogy $\prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} = 1$. ■

Azonnali következmények fogalmazhatók meg.

4. Következmény. *Ha A egy olyan nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix, amelyre az $E(A)$ halmaz korlátos és létezik olyan σ permutáció az S_m -ben, amelyre $\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \geq 1$, akkor teljesülnek a következők*

- (a) *Ha i fixpontja a σ permutációnak, akkor $a_{ii} = 1$.*
- (b) *Ha γ egy ciklusa a σ permutációnak és $H \subseteq [m]$ halmaz a γ által mozgatott elemek halmaza, amelynek h eleme van, akkor minden $i \in H$ esetén $\prod_{j=1}^h a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)} = 1$.*

Bizonyítás. (a) Ha i fixpontja σ -nak, a $H = \{i\}$ halmaz invariáns halmaza σ -nak, így a 3. Tétel alapján $a_{ii} = \prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} = 1$.

(b) Ha γ ciklusa σ -nak (lásd pl. a [3]-ban a 6.5. Definíciót) és H a γ által mozgatott elemek halmaza, akkor H invariáns halmaza σ -nak, így a 3. Tétel alapján $\prod_{i \in H} a_{i\sigma(i)} = 1$. ■

Az a kérdés merül fel, hogy vannak-e ilyen tulajdonságú és a permutáció-mátrixoktól különböző $m \times m$ mátrixok a nemnegatív valós számok halmaza felett, amelyekre az $E(A)$ halmaz véges. Ilyen mátrixokat a 4. Következmény feltételeit teljesítő mátrixok között kell keresnünk.

1. Példa. Tekintsük a következő mátrixot és néhány hatványát:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, & A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, & A^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 A^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, & A^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ezt az 5×5 -ös mátrixot a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123)(45)$ permutációhoz úgy rendeltük hozzá, hogy teljesülnek a 4. Következményben megfogalmazott feltételek, valamint azok az a_{ij} elemek, amelyekre $j \neq \sigma(i)$ mind 0-val egyenlők. Mivel A^6 az egység mátrix, belátható, hogy $A^n = A^r$, ahol $r = 0, 1, \dots, 5$ az n pozitív egész 6-tal való osztási maradékát jelöli. Evégett az $E(A)$ nyilvánvalóan véges. Jelen esetben $E(A) = \{1/8, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 8\}$.

Ezzel beláttuk, hogy vannak a permutáció-mátrixoktól eltérő és a 3. Tétel feltételeit teljesítő mátrixok. Vizsgáljuk meg közelebbről a példában szereplő mátrixhoz hasonló mátrixokat. Először egy ciklikus permutációhoz rendeljünk hasonló módon mátrixot, nevezzük őket kváziciklikus mátrixoknak.

Kváziciklikus mátrixok

1. Definíció. Az A nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrixot *kváziciklikus mátrixnak* nevezzük, hogyha létezik S_m -ben egy olyan γ ciklikus permutáció, amely által mozgatott elemek halmaza H_γ , és az $[m]$ halmazon értelmezett p pozitív függvény, amelyekre

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \gamma(i), \\ p(i), & \text{ha } j = \gamma(i), \end{cases} \quad \text{és} \quad \prod_{i \in H_\gamma} p(i) = 1, \text{ és } p(j) = 1 \text{ ha } j \in [m] \setminus H_\gamma.$$

Egy az $[m]$ halmazon értelmezett p pozitív függvényt, amely eleget tesz a $\prod_{i \in H_\gamma} p(i) = 1$ és $p(j) = 1$, hogyha $j \in [m] \setminus H_\gamma$ feltételeknek, a γ ciklikus permutációval kompatibilis pozitív függvénynek fogjuk nevezni.

Jelölje $\mathcal{P}(\gamma)$ a γ ciklikus permutációval kompatibilis p pozitív függvények halmazát, azaz

$$\mathcal{P}(\gamma) = \left\{ p : [m] \rightarrow \mathbb{R}^+ : \prod_{i \in H_\gamma} p(i) = 1 \text{ és } p(j) = 1 \text{ ha } j \in [m] \setminus H_\gamma \right\}.$$

A γ ciklikus permutációhoz és $p \in \mathcal{P}(\gamma)$ függvényhez tartozó kváziciklikus mátrixot $C(\gamma, p)$ -vel fogjuk jelölni. Az identikus permutációt 0 hosszúságú ciklikus permutációként fogjuk fel, és mivel csak fixpontjai vannak az egyedüli vele kompatibilis pozitív függvény a konstans 1 függvény, így $C(\varepsilon, 1) = I_m$. Tehát az egységmátrix kváziciklikus mátrix.

2. Példa. Tekintsük az S_5 -höz tartozó $\gamma_1 = (123)$ és $\gamma_2 = (45)$ ciklikus permutációkat és a $p_1 \in \mathcal{P}(\gamma_1)$ és $p_2 \in \mathcal{P}(\gamma_2)$ pozitív függvényeket, amelyekre $p_1(1) = 1/2$, $p_1(2) = 8$, $p_1(3) = 1/4$, $p_1(4) = p_1(5) = 1$, $p_2(1) = p_2(2) = p_2(3) = 1$, $p_2(4) = 1/3$, $p_2(5) = 3$. A definíció alapján

$$C(\gamma_1, p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C(\gamma_2, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből látszik, hogy az 1. Példában szereplő A mátrix nem más mint az $C(\gamma_1, p_1)$ és $C(\gamma_2, p_2)$ kváziciklikus mátrixok szorzata. Ezek alapján bevezethetjük a kvázipermutáció-mátrix fogalmát is.

Kvázipermutáció-mátrixok. Ha $\sigma \in S_m$, akkor a $p : [m] \rightarrow \mathbb{R}^+$ pozitív függvényről akkor mondjuk, hogy *kompatibilis a σ permutációval*, hogy ha $\prod_{i \in H} p(i) = 1$ minden olyan H halmaz esetén, amely invariáns a σ permutációra nézve. A σ permutációval kompatibilis pozitív függvények halmazát $\mathcal{P}(\sigma)$ fogjuk jelölni. Mint tudjuk a σ permutáció, a tényezők sorrendjétől eltekintve, egyértelműen írható fel páronként idegen ciklusok szorzataként. Ez a szorzat 0 tényezős, ha σ az identikus permutáció.

4. Tétel. Ha a $\sigma \in S_m$ permutáció idegen ciklusok szorzatára bontása $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$, akkor a $p : [m] \rightarrow \mathbb{R}^+$ pozitív függvény akkor és csak akkor kompatibilis a σ permutációval, ha minden $1 \leq j \leq k$ esetén $\prod_{i \in H_{\gamma_j}} p(i) = 1$ és minden $i \in [m] \setminus H_\sigma$ esetén $p(i) = 1$, ahol $H_\sigma = \cup_{s=1}^k H_{\gamma_s}$ a σ permutáció által mozgatott elemek halmaza. Ha $p_1 \in \mathcal{P}(\gamma_1)$, $p_2 \in \mathcal{P}(\gamma_2)$, $\dots$, $p_k \in \mathcal{P}(\gamma_k)$, és ha $p = \prod_{j=1}^k p_j$, akkor $p \in \mathcal{P}(\sigma)$.

Bizonyítás. Ha $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$, akkor H_{γ_j} invariáns a σ permutációra nézve. Tételezzük fel, hogy $p \in \mathcal{P}(\sigma)$, akkor $\prod_{i \in H_{\gamma_j}} p(i) = 1$, ha pedig $i \in [m] \setminus H_\sigma$, akkor i fixpontja a σ permutációnak, azaz az $\{i\}$ halmaz invariáns σ -ra nézve, így $p(i) = 1$. Fordítva, tételezzük fel a $p : [m] \rightarrow \mathbb{R}^+$ pozitív függvényről, hogy minden $1 \leq j \leq k$ esetén $\prod_{i \in H_{\gamma_j}} p(i) = 1$ és minden $i \in [m] \setminus H_\sigma$ esetén $p(i) = 1$. Legyen $H \subseteq [m]$ egy invariáns halmaz a σ permutációra nézve, akkor minden $1 \leq j \leq k$ esetén $H \cap H_{\gamma_j}$ szintén invariáns a σ -ra nézve, így $H \cap H_{\gamma_j} = \emptyset$, vagy $H \cap H_{\gamma_j} = H_{\gamma_j}$. Ha $J = \{1 \leq j \leq k : H \cap H_{\gamma_j} = H_{\gamma_j}\}$, akkor $H = (H \setminus H_\sigma) \cup (\cup_{j \in J} H_{\gamma_j})$ egy diszjunkt felbontása H -nak, így $\prod_{i \in H} p(i) = (\prod_{i \in H \setminus H_\sigma} p(i)) \cdot (\prod_{j \in J} \prod_{i \in H_{\gamma_j}} p(i)) = 1$. Ezzel beláttuk, hogy $p \in \mathcal{P}(\sigma)$.

A második rész bizonyításához tételezzük fel, hogy $p_1 \in \mathcal{P}(\gamma_1)$, $p_2 \in \mathcal{P}(\gamma_2)$, $\dots$, $p_k \in \mathcal{P}(\gamma_k)$, és $p = \prod_{j=1}^k p_j$. Mivel minden $1 \leq j \leq k$ esetén $\prod_{i \in H_{\gamma_j}} p(i) = \prod_{i \in H_{\gamma_j}} p_j(i)$ és mivel $p_j \in \mathcal{P}(\gamma_j)$ következik, hogy $\prod_{i \in H_{\gamma_j}} p(i) = 1$. Ezért a tétel első része alapján következik, hogy $p \in \mathcal{P}(\sigma)$. ■

Most rátérhetünk a kvázipermutáció-mátrixok definíciójára.

2. Definíció. Az $A = (a_{ij})$ nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrixot a $\sigma \in S_m$ permutációhoz és a vele kompatibilis p pozitív függvényhez rendelt kvázipermutáció-mátrixnak fogjuk nevezni, ha

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \sigma(i), \\ p(i), & \text{ha } j = \sigma(i). \end{cases}$$

A σ permutációhoz és a vele kompatibilis p pozitív függvényhez rendelt kvázipermutáció-mátrixot a $P(\sigma, p)$ szimbólummal fogunk jelölni.

5. Következmény. Ha σ idegen ciklusok szorzatára bontása $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$ és $p_1 \in \mathcal{P}(\gamma_1)$, $p_2 \in \mathcal{P}(\gamma_2)$, $\dots$, $p_k \in \mathcal{P}(\gamma_k)$, és $p = \prod_{j=1}^k p_j$, akkor $p \in \mathcal{P}(\sigma)$ és

$$P(\sigma, p) = C(\gamma_1, p_1) \cdot C(\gamma_2, p_2) \cdots C(\gamma_k, p_k).$$

Bizonyítás. Ha $C(\gamma_\ell, p_\ell) = (c_{ij}(\ell))$, ahol $1 \leq \ell \leq k$, akkor

$$c_{ij}(\ell) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \gamma_\ell(i), \\ p_\ell(i), & \text{ha } j = \gamma_\ell(i). \end{cases}$$

Ha $A = \prod_{\ell=1}^k C(\gamma_\ell, p_\ell)$ és $A = (a_{ij})$, akkor

$$a_{ij} = \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_{k-1}) \in [m]^{k-1}} c_{is_1}(1) c_{s_1 s_2}(2) \dots c_{s_{\ell-1} s_\ell}(\ell) \dots c_{s_{k-1} j}(k).$$

Ha $i \in [m] \setminus H_\sigma$, akkor i fixpontja σ -nak és mindegyik ciklusának is, így

$$a_{ij} = c_{ii}(1) c_{ii}(2) \dots c_{ii}(\ell) \dots c_{ij}(k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq i, \\ 1, & \text{ha } j = i. \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \sigma(i), \\ p(i), & \text{ha } j = \sigma(i). \end{cases}$$

Ha $i \in H_\sigma$, akkor mivel $H_\sigma = \cup_{s=1}^k H_{\gamma_s}$, és mert az idegen ciklusok által mozgatott halmazok diszjunktak, következik, hogy egyetlen olyan ciklus van, amelyik mozgatja az i pontot, legyen ez γ_t , többinek pedig az i is és $\sigma(i)$ is fixpontja, így $p(i) = p_t(i)$ és

$$\begin{aligned} a_{ij} &= c_{ii}(1) c_{ii}(2) \dots c_{ii}(t-1) c_{i\sigma(i)}(t) c_{\sigma(i)\sigma(i)}(t+1) \dots c_{\sigma(i)j}(k) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \sigma(i), \\ p_t(i), & \text{ha } j = \sigma(i). \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \sigma(i), \\ p(i), & \text{ha } j = \sigma(i). \end{cases} \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk, hogy $A = P(\sigma, p)$, vagyis fennáll a bizonyítandó összefüggés. ■

3. Példa. Az 1. példában szereplő A mátrix egy kvázipermutáció-mátrix, amely a

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123)(45)$$

permutációhoz és az

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	1/2	8	1/4	1/3	3

hozzárendeléssel értelmezett $p : [5] \rightarrow \mathbb{R}^+$ σ -val kompatibilis pozitív függvényhez rendelünk hozzá. Valóban, mivel $\sigma = \gamma_1 \gamma_2$, ahol $\gamma_1 = (123)$, $\gamma_2 = (45)$, és $H_{\gamma_1} = \{1, 2, 3\}$, $H_{\gamma_2} = \{4, 5\}$ belátható, hogy $\prod_{i \in H_{\gamma_1}} p(i) = \prod_{i=1}^3 p(i) = 1$ és $\prod_{i \in H_{\gamma_2}} p(i) = \prod_{i=4}^5 p(i) = 1$, ami a 4. Tétel alapján azt jelenti, hogy $p \in \mathcal{P}(\sigma)$. Az is látható, hogy $A = C(\gamma_1, p_1) C(\gamma_2, p_2) = P(\sigma, p)$.

A következő kérdés nyilván az, hogy két kvázipermutáció-mátrix szorzata kvázipermutáció-mátrix-e vagy sem. A következő példa mutatja, hogy nem mindig.

4. Példa. Tekintsük a következő 4×4 típusú kváziciklikus mátrixokat $A = C(\gamma, p)$, $B = (\eta, q)$, ahol $\gamma = (123)$, $p(1) = 1/2$, $p(2) = 8$, $p(3) = 1/4$, $p(4) = 1$, $\eta = (234)$, $q(1) = 1$, $q(2) = 1/3$, $q(3) = 9$, $q(4) = 1/3$. Megmutatjuk, hogy az AB szorzat nem kvázipermutáció-mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 72 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Mondhatnánk, hogy $AB = P(\sigma, r)$, ahol $\sigma = (13)(24)$ és $r(1) = 1/6$, $r(2) = 72$, $r(3) = 1/4$, $r(4) = 1/3$, a gond csak az, hogy az r függvény nem kompatibilis a σ permutációval, hiszen sem a $p(1)p(3)$ szorzat, sem a $p(2)p(4)$ szorzat nem 1.

Abban az esetben viszont, ha σ és τ permutációk olyanok, hogy az általuk mozgatott H_σ és H_τ halmazok diszjunktak, akkor tetszőleges $p \in \mathcal{P}(\sigma)$ és $q \in \mathcal{P}(\tau)$ függvényekre a $P(\sigma, p)$ és $P(\tau, q)$ kvázipermutáció-mátrixok szorzata szintén kvázipermutáció-mátrix és fennáll a $P(\sigma, p) \cdot P(\tau, q) = P(\sigma\tau, pq)$ egyenlőség. Arra, hogy kvázipermutáció-mátrixok szorzata szintén kvázipermutáció-mátrix legyen van még más lehetőség is.

5. Tétel. Ha $\sigma \in S_m$ és p és q a σ permutációval kompatibilis pozitív függvények, és ha bármelyik H a σ permutáció idegen ciklusok szorzatára bontásában szereplő páros hosszúságú ciklus által mozgatott halmaz esetén létezik egy $w \in H$, amelyre fennáll a

$$(3) \quad \prod_{t=1}^{|H|/2} p(\sigma^{2t-2}(w)) = \prod_{t=1}^{|H|/2} q(\sigma^{2t-2}(w))$$

egyenlőség, akkor $P(\sigma, p)P(\sigma, q) = P(\sigma^2, r)$, ahol $r = p \cdot (q \circ \sigma)$.

Bizonyítás. Legyen $P(\sigma, p) = (a_{ij})$, $P(\sigma, q) = (b_{ij})$ és $P(\sigma, p)P(\sigma, q) = (c_{ij})$. Látható, hogy

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i\sigma(i)} b_{\sigma(i)j} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \sigma^2(i), \\ a_{i\sigma(i)} b_{\sigma(i)\sigma^2(i)}, & \text{ha } j = \sigma^2(i). \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \sigma^2(i), \\ p(i)q(\sigma(i)), & \text{ha } j = \sigma^2(i). \end{cases} \end{aligned}$$

Azt kell igazolnunk, hogy $r = p \cdot (q \circ \sigma)$ pozitív függvény kompatibilis a σ^2 permutációval. Ez azt jelenti, hogy ha H invariáns részhalmaza σ^2 -nek, akkor $\prod_{i \in H} r(i) = 1$.

Ha a σ permutáció idegen ciklusok szorzatára bontása $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_h \cdots \gamma_k$, ahol az első h ciklus hossza 2-nél nagyobb, a többi egyenlő 2-vel. A felbontás első j ciklusának, $j \leq h$, hossza páratlan, a következő $h - j$ ciklus hossza páros. Ebből következik, hogy $\sigma^2 = \gamma_1^2 \gamma_2^2 \cdots \gamma_h^2$. Ha $\gamma \in S_m$ egy a σ felbontásában szereplő ciklus, amelynek s hossza 2-nél nagyobb, és ha H_γ az általa mozgatott elemek halmaza, akkor tetszőleges $i_0 \in H_\gamma$ esetén, $H_\gamma = \{i_0, \sigma(i_0), \dots, \sigma^{s-1}(i_0)\}$ és $\sigma^s(i_0) = i_0$, azaz $\gamma = (i_0, \sigma(i_0), \dots, \sigma^{s-1}(i_0))$. Ha $s > 2$, akkor a γ^2 által mozgatott elemek halmaza $H_{\gamma^2} = H_\gamma$. Valóban, nyilvánvaló, hogy $H_{\gamma^2} \subseteq H_\gamma$, ha pedig $i \in H_\gamma$, akkor mivel γ hossza 2-nél nagyobb következik, hogy $\gamma^2(i) = \sigma^2(i) \neq i$, vagyis i egy γ^2 által mozgatott pont, így $i \in H_{\gamma^2}$. Mivel ez tetszőleges $i \in H_\gamma$ esetén igaz, fennáll a $H_\gamma \subseteq H_{\gamma^2}$ reláció is. Ha s páratlan, akkor megmutatjuk, hogy γ^2 is ciklus. Az i_0 -t mozgató és γ^2 idegen ciklusok szorzatára bontásában szereplő ciklus hossza legyen u , ez azt jelenti, hogy u a legkisebb pozitív egész, amelyre $\gamma^{2u}(i_0) = i_0$. Mivel a γ ciklus hossza s következik, hogy s osztója $2u$ -nak, így mivel s páratlan következik, hogy s osztója u -nak, ami maga után vonja, hogy $s \leq u$. Más oldalról $\gamma^s(i_0) = i_0$ maga után vonja, hogy $\gamma^{2s}(i_0) = i_0$, az u definíciója alapján következik, hogy $u \leq s$. A két egyenlőtlenségből következik, hogy $u = s$, ami azt jelenti, hogy γ^2 egyetlen ciklusból áll, vagyis maga is ciklus. Ha s páros, azaz $s = 2t$, akkor t a legkisebb pozitív egész, amelyre $\gamma^{2t}(i_0) = i_0$. Mivel $s > 2$, következik $t \geq 2$, így γ^2 -nek az egyik ciklusa t hosszúságú ez pedig $\gamma' = (i_0, \gamma^2(i_0), \dots, \gamma^{2t-2}(i_0))$. Mivel γ bijekció kimondható, hogy t a legkisebb pozitív egész, amelyre $\gamma^{2t}(\gamma(i_0)) = \gamma(i_0)$. Tehát γ^2 másik, γ' -től idegen, ciklusa $\gamma'' = (\gamma(i_0), \gamma^3(i_0), \dots, \gamma^{2t-1}(i_0))$. Világos, hogy $\gamma^2 = \gamma' \gamma''$. Ezek szerint σ^2 -et a következőképpen írhatjuk idegen ciklusok szorzataként: $\sigma^2 = \gamma_1^2 \cdots \gamma_j^2 \gamma'_{j+1} \gamma''_{j+1} \cdots \gamma'_k \gamma''_k$. Még azt kell kimutatnunk, hogy a $r = p \cdot (q \circ \sigma)$ pozitív függvény kompatibilis a σ^2 permutációval. Ehhez azt kell kimutatnunk, hogy a felbontásban szereplő ciklusok bármelyike által mozgatott halmazon felvett függvényértékek szorzata 1, és a σ^2 fixpontjain felvett értéke pedig 1. Tételezzük fel, hogy a γ ciklus szerepel σ idegen ciklusok szorzataként való kifejezésében. A következő eseteket kell vizsgálnunk:

1) Ha γ hossza páratlan, akkor γ^2 ugyancsak a H_γ halmazt mozgató ciklus. Mivel $p, q \in \mathcal{P}(\sigma)$, következik, hogy $\prod_{i \in H_\gamma} p(i) = 1$ és $\prod_{i \in H_\gamma} q(i) = 1$, így

$$\prod_{i \in H_\gamma} r(i) = \prod_{i \in H_\gamma} p(i) q(\sigma(i)) = \prod_{i \in H_\gamma} p(i) \prod_{i \in H_\gamma} q(\sigma(i)) = \prod_{i \in H_\gamma} p(i) \prod_{i \in H_\gamma} q(i) = 1.$$

2) Ha γ hossza $s = 2u$ és $s > 2$, akkor γ^2 két u hosszúságú γ' és γ'' ciklus szorzata. Hogyha $H_\gamma = \{i_0, \sigma(i_0), \dots, \sigma^{s-1}(i_0)\}$, akkor mint láttuk $H_{\gamma'} = \{i_0, \sigma^2(i_0), \dots, \sigma^{2u-2}(i_0)\}$ és $H_{\gamma''} = \{\sigma(i_0), \sigma^3(i_0), \dots, \sigma^{2u-1}(i_0)\}$. Megjegyezzük, hogy p és q pozitív függvények σ -val való kompatibilitása miatt a (3) összefüggése

egy $w \in H_\gamma$ esetén

$$\prod_{t=1}^{|H|/2} p(\sigma^{2t-2}(w)) = \prod_{t=1}^{|H|/2} q(\sigma^{2t-2}(w)) \Leftrightarrow \prod_{t=1}^{|H|/2} p(\sigma^{2t-1}(w)) = \prod_{t=1}^{|H|/2} q(\sigma^{2t-1}(w)),$$

ezért a (3) összefüggés fennáll tetszőleges $w \in H_\gamma$ esetén, így

$$\begin{aligned} \prod_{i \in H_{\gamma'}} r(i) &= \prod_{i \in H_{\gamma'}} p(i) \prod_{i \in H_{\gamma'}} q(\sigma(i)) = \prod_{t=1}^u p(\sigma^{2t-2}(i_0)) \prod_{t=1}^u q(\sigma^{2t-1}(i_0)) \\ &= \prod_{t=1}^{2u} q(\sigma^{t-1}(i_0)) = \prod_{i \in H_\gamma} q(i) = 1 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \prod_{i \in H_{\gamma''}} r(i) &= \prod_{i \in H_{\gamma''}} p(i) \prod_{i \in H_{\gamma''}} q(\sigma(i)) = \prod_{t=1}^u p(\sigma^{2t-1}(i_0)) \prod_{t=1}^u q(\sigma^{2t-2}(i_0)) \\ &= \prod_{t=1}^{2u} p(\sigma^{t-1}(i_0)) = \prod_{i \in H_\gamma} p(i) = 1. \end{aligned}$$

3) Ha γ egy 2 hosszúságú ciklus, akkor ha w egy γ által mozgatott pont, akkor $H_\gamma = \{w, \sigma(w)\}$, és H_γ pontjai σ^2 -nek fixpontjai. A p és q pozitív függvények σ -val való kompatibilitása miatt $p(w)p(\sigma(w)) = 1$ és $q(w)q(\sigma(w)) = 1$, míg a (3) feltétel miatt $p(w) = q(w)$, ahonnan az előzőek figyelembe vételével következik, hogy $p(\sigma(w)) = q(\sigma(w))$. Most megmutatjuk, hogy a r pozitív függvény a H_γ minden pontjában az 1 értéket veszi fel: $r(w) = p(w)q(\sigma(w)) = p(w)p(\sigma(w)) = 1$ és $r(\sigma(w)) = p(\sigma(w))q(\sigma^2(w)) = p(\sigma(w))p(w) = 1$.

4) Ha i fixpontja σ -nak, akkor p és q pozitív függvények σ -val való kompatibilitása miatt $p(i) = q(i) = 1$, így $r(i) = p(i)q(\sigma(i)) = p(i)q(i) = 1$.

Ezzel igazoltuk, hogy r függvény kompatibilis a σ^2 permutációval, azaz $r \in \mathcal{P}(\sigma^2)$. Ezzel beláttuk, hogy $P(\sigma, p)P(\sigma, q) = P(\sigma^2, r)$, ahol $P(\sigma^2, r)$ kvázipermutáció-mátrix. ■

Nyilvánvaló, hogyha az 5. Tételben $p = q$ -val, akkor a (3) feltétel teljesül, így ha $p \in \mathcal{P}(\sigma)$, akkor $P(\sigma, p)^2 = P(\sigma^2, p \cdot (p \circ \sigma))$. A következő lépésben azt vizsgáljuk meg, hogy egy kvázipermutáció-mátrix hatványai szintén kvázipermutáció-mátrixok-e? Mielőtt ezt megtennénk egy lemmát fogunk igazolni.

3. Lemma. *Ha $\gamma \in S_m$ egy h hosszúságú ciklikus permutáció és n egy pozitív egész szám, akkor a γ^n permutáció egyenlő az identikus permutációval, ha n többszöröse h -nak, vagy γ^n idegen ciklusok szorzatára bontásában mindegyik ciklus h/d hosszúságú, ahol $d = (h, n)$ és $d < h$.*

Bizonyítás. Ha az n egész szám h -val való osztási hányadosa q és maradéka r , akkor $n = hq + r$. Mivel $\gamma^h = \varepsilon$ következik, hogy $\gamma^n = (\gamma^h)^q \gamma^r = \gamma^r$, ahol $\gamma^0 = \varepsilon$ konvenciót alkalmazunk. Ezzel beláttuk a lemma első részét. Továbbá, a $d = (h, n) = (h, r)$ összefüggés azt mutatja, hogy elegendő a lemma második részének állítását $n < h$ esetén igazolni. Ha δ a γ^n permutáció idegen ciklusok szorzatára bontásában szereplő ciklus, amelynek hossza h_δ , akkor egy $i \in H_\delta$ pont esetén h_δ az a legkisebb pozitív egész p , amelyre $(\gamma^n)^p(i) = i$ és $H_\delta = \{i, \gamma^n(i), \gamma^{2n}(i), \dots, \gamma^{(h_\delta-1)n}(i)\}$. Könnyen belátható az is, hogy $H_\delta \subseteq H_{\gamma^n} \subseteq H_\gamma$. Ha η egy másik ciklus a γ^n permutáció idegen ciklusok szorzatára bontásából, akkor egy $j \in H_\eta$ esetén $H_\eta = \{j, \gamma^n(j), \gamma^{2n}(j), \dots, \gamma^{(h_\eta-1)n}(j)\}$. Mivel $H_\eta \subseteq H_\gamma$ és $H_\gamma = \{i, \gamma(i), \gamma^2(i), \dots, \gamma^{h-1}(i)\}$ következik, hogy létezik $k \in [h-1]$ úgy, hogy $\gamma^k(i) = j$. Mivel $\gamma^{h_\delta n}(i) = i$ következik, hogy $\gamma^{h_\delta n}(j) = \gamma^{h_\delta n}(\gamma^k(i)) = \gamma^{h_\delta n k}(i) = \gamma^k(\gamma^{h_\delta n}(i)) = \gamma^k(i) = j$. Másrésztől h_η az a legkisebb p pozitív egész, amelyre $\gamma^{pn}(j) = j$, így $h_\eta \leq h_\delta$. Ez a gondolatmenet érvényes akkor is, ha δ és η ciklusok szerepét felcseréljük, így következik, hogy $h_\eta \geq h_\delta$, vagyis $h_\eta = h_\delta$. Tehát γ^n idegen ciklusok szorzatára bontásában minden ciklus azonos hosszúságú.

Ha i egy a γ^n permutáció által mozgatott pont, akkor pontosan egy olyan δ ciklus van a γ^n permutáció idegen ciklusok szorzatára bontásában, amelyik mozgatja i -t és erre $\gamma^{h_1 n}(i) = i$, ahol h_1 a felbontás idegen ciklusainak közös hosszát jelöli. Tehát $\gamma^{h_1 n}(i) = i$ minden $1 \leq i \leq m$ esetén, vagyis $\gamma^{h_1 n} = \varepsilon$, ezért $h \mid h_1 n \Leftrightarrow (h/d) \mid (h_1 n/d)$. Mivel $(h/d, n/d) = 1$, következik, hogy $(h/d) \mid h_1$, amiért $h/d \leq h_1$. Másrésztől viszont $(\gamma^n)^{h/d} = (\gamma^h)^{n/d} = \varepsilon$, így $\gamma^{(h/d)n}(i) = i$, ahonnan $h_\delta = h_1$ minimum tulajdonsága alapján következik, hogy $h_1 \leq h/d$. E két egyenlőtlenség alapján következik, hogy $h_1 = h/d$, ami igazolja a lemma állítását. ■

Első lépésben a kváziciklikus mátrixok hatványait vizsgáljuk.

4. Lemma. *Ha $\gamma \in S_m$ egy h hosszúságú ciklikus permutáció, és p egy vele kompatibilis pozitív függvény, akkor*

$$(4) \quad C(\gamma, p)^n = P\left(\gamma^n, \prod_{j=1}^n p \circ \gamma^{j-1}\right)$$

Kváziciklikus mátrix pozitív egész kitevőjű hatványai kvázipermutáció-mátrixok. Fontos sajátos eset: $C(\gamma, p)^h = I_m$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás igaz $n = 1$ -re. Tételezzük fel, hogy teljesül $n = k$ esetén, vagyis $C(\gamma, p)^k = P(\gamma^k, \prod_{j=1}^k p \circ \gamma^{j-1})$. Ha $C(\gamma, p) = (a_{uv})$, $C(\gamma, p)^k = (b_{uv})$ és $C(\gamma, p)^{k+1} = (c_{uv})$, akkor

$$\begin{aligned} c_{uv} &= \sum_{w=1}^m a_{uw} b_{wv} = a_{u\gamma(u)} b_{\gamma(u)v} = \begin{cases} 0, & \text{ha } v \neq \gamma(u), \\ a_{u\gamma(u)} b_{\gamma(u)\gamma^{k+1}(u)}, & \text{ha } v = \gamma^k(\gamma(u)), \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } v \neq \gamma(u), \\ p(u) \left(\prod_{j=1}^k p \circ \gamma^{j-1} \right) (\gamma(u)), & \text{ha } v = \gamma^{k+1}(u), \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } v \neq \gamma(u), \\ \left(\prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{j-1} \right) (u), & \text{ha } v = \gamma^{k+1}(u). \end{cases} \end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy $C(\gamma, p)^{k+1}$ kvázipermutáció-mátrix. Ehhez kell igazolnunk, hogy a $\prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{j-1}$ függvény kompatibilis a γ^{k+1} permutációval. Ha $k+1 = th$, akkor $\gamma^{k+1} = \varepsilon$ és a $p \in \mathcal{P}(\gamma)$ feltételből következik, hogy

$$\prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{j-1}(u) = \left(\prod_{j=1}^h p \circ \gamma^{j-1}(u) \right)^t = \left(\prod_{i \in H_\gamma} p(i) \right)^t = 1,$$

vagyis teljesül a szükséges kompatibilitási feltétel. Egyúttal beláttuk, hogy $C(\gamma, p)^{th} = C(\varepsilon, 1) = I_m$.

Ha $i \in H_\gamma$, $n \in \mathbb{Z}^+$ és n nem többszöröse h -nak, akkor $\gamma^n(i) = \gamma^r(i) \neq i$, ahol r az n egész h -val való osztási maradéka. Ez azt jelenti, hogyha n nem többszöröse h -nak, akkor γ^n ugyanazt a halmazt mozgatja mint γ , vagyis $H_{\gamma^n} = H_\gamma$. Ha $k+1$ nem többszöröse h -nak, akkor γ^{k+1} permutáció idegen ciklusok szorzatára bontásában a 3. Lemma alapján minden ciklus hossza $h_1 = h/d$, ahol $d = (h, k+1)$, és $H_{\gamma^{k+1}} = H_\gamma$. Legyen δ egy ilyen ciklus, akkor $h_\delta = h_1 > 1$, így

$$\begin{aligned} \prod_{i \in H_\delta} \left(\prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{j-1} \right) (i) &= \prod_{s=1}^{h_1} \left(\prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{j-1} \right) (\gamma^{(s-1)(k+1)}(i)) \\ &= \prod_{s=1}^{h_1} \left(\prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{(s-1)(k+1)+j-1} \right) (i) \end{aligned}$$

Belátható, a következő halmazegyenlőség: $\{(s-1)(k+1) + j - 1 : s \in [h_1] \text{ és } j \in [k+1]\} = \{\ell - 1 : \ell \in [h_1(k+1)]\}$, így

$$\begin{aligned} \prod_{i \in H_\delta} \left(\prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{j-1} \right) (i) &= \prod_{\ell=1}^{h_1(k+1)} (p \circ \gamma^{\ell-1})(i) = \prod_{v=1}^{(k+1)/d} \prod_{\ell=(v-1)h+1}^{vh} (p \circ \gamma^{\ell-1})(i) \\ &= \prod_{v=1}^{(k+1)/d} \prod_{\ell=1}^h (p \circ \gamma^{\ell-1})(i) = \left(\prod_{\ell=1}^h (p \circ \gamma^{\ell-1})(i) \right)^{(k+1)/d} = 1. \end{aligned}$$

Ha pedig i fixpontja γ -nak, akkor a $p \in \mathcal{P}(\gamma)$ feltétel miatt $p(i) = 1$, így

$$\prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{j-1}(i) = \prod_{j=1}^{k+1} p(i) = p(i)^{k+1} = 1.$$

Tehát $\prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{j-1} \in \mathcal{P}(\gamma^{k+1})$, azaz $C(\gamma, p)^{k+1}$ kvázipermutáció-mátrix és $C(\gamma, p)^{k+1} = P(\gamma^{k+1}, \prod_{j=1}^{k+1} p \circ \gamma^{j-1})$. ■

Ennek azonnali következménye a kvázipermutáció-mátrixokra vonatkozó megfelelő állítás.

6. Tétel. *Ha $\sigma \in S_m$ egy r -ed rendű permutáció, és p egy vele kompatibilis pozitív függvény, akkor*

$$(5) \quad P(\sigma, p)^n = P(\sigma^n, \prod_{j=1}^n p \circ \sigma^{j-1})$$

Kvázipermutáció-mátrix pozitív egész kitevőű hatványai szintén kvázipermutáció-mátrixok. Fontos sajátos eset: $P(\sigma, p)^r = I_m$.

Bizonyítás. Tekintsük a σ permutáció páronként idegen ciklusok szorzatára bontását $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$, és tételezzük fel, hogy p egy σ -val kompatibilis pozitív függvény. Az 5. Következmény szerint $P(\sigma, p) = \prod_{j=1}^k C(\gamma_j, p_j)$, ahol $p_j|_{H_{\gamma_j}} = p|_{H_{\gamma_j}}$ és $p_j|_{\overline{H}_{\gamma_j}}$ konstans 1 függvény. Mivel idegen ciklusok kvázipermutáció-mátrixai (kváziciklikus mátrixai) felcserélhetők mint szorzótényezők, a 4. Lemma alapján következik, hogy

$$P(\sigma, p)^n = \prod_{j=1}^k C(\gamma_j, p_j)^n = \prod_{j=1}^k P(\gamma_j^n, \prod_{s=1}^n p_j \circ \gamma_j^{s-1}).$$

Mivel $\sigma^n = \gamma_1^n \gamma_2^n \cdots \gamma_k^n$, és $\gamma_1^n, \gamma_2^n, \dots, \gamma_k^n$ idegen ciklusok, következik, hogy

$$P(\sigma, p)^n = P(\sigma^n, \prod_{j=1}^k \prod_{s=1}^n p_j \circ \gamma_j^{s-1}) = P(\sigma^n, \prod_{s=1}^n p \circ \gamma^{s-1}).$$

Ha $n = r$, ahol r a σ permutáció rendje, akkor r többszöröse σ ciklusai hosszának. Ha a γ_j ciklus hosszát h_j -vel jelöljük, akkor $r = t_j h_j$ minden $j \in [k]$ esetén, így a 4. Lemma alapján $C(\gamma_j, p_j)^r = I_m^{t_j} = I_m$. Továbbá $P(\sigma, p)^r = \prod_{j=1}^k C(\gamma_j, p_j)^r = I_m$. ■

Végül megmutatjuk, hogy a kvázipermutáció-mátrixokra is megfogalmazható a permutáció-mátrixokra az 1. Következményben megfogalmazotthoz hasonló jellemzés.

A kvázipermutáció-mátrixok jellemzése a nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrixok halmazában. A következő tétel szükséges és elégséges feltételt fogalmaz meg ahhoz, hogy egy nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix kvázipermutáció-mátrix legyen.

7. Tétel. *Az $A = (a_{ij})$ nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrix akkor és csak akkor kvázipermutáció-mátrix, ha létezik $\sigma \in S_m$, amelyre $\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \geq 1$ és az $E(A)$ halmaz korlátos.*

Bizonyítás. Ha A kvázipermutáció-mátrix, akkor létezik $\sigma \in S_m$ és $p \in \mathcal{P}(\sigma)$ úgy, hogy $A = P(\sigma, p)$, így a 4. Tétel alapján $\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} = \prod_{i=1}^m p(i) = 1$. A 6. Tétel alapján $P(\sigma, p)^r = I_m$, ahol r a σ permutáció rendjét jelöli az S_m csoportban. Ez azt jelenti, hogy az A pozitív egész kitevőjű hatványainak halmaza véges, így az $E(A)$ halmaz is véges és ezért korlátos is. Fordítva tételezzük fel, hogy az $A = (a_{ij})$ nemnegatív valós számok feletti $m \times m$ -es mátrixra létezik egy olyan $\sigma \in S_m$ permutáció, amelyre $\prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \geq 1$ és az $E(A)$ halmaz korlátos. Legyen $p: [m] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $p(i) = a_{i\sigma(i)}$. A 3. Tétel alapján belátható, hogy p a σ permutációval kompatibilis pozitív függvény. Ahhoz, hogy A kvázipermutáció-mátrix legyen azt kell még kimutatnunk, hogy bármely $1 \leq u \leq m$ esetén ha $v \neq \sigma(u)$, akkor $a_{uv} = 0$. Tételezzük fel, hogy $1 \leq u \leq m$ és $v \neq \sigma(u)$. Ha a σ permutáció páronként idegen ciklusok szorzatára bontása $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$, akkor a $H_{\gamma_1}, H_{\gamma_2}, \dots, H_{\gamma_k}$ halmazok és σ fixpontjainak halmaza $H_0 = [m] \setminus (\cup_{\ell=1}^k H_{\gamma_\ell})$ páronként diszjunkt halmazok és $[m] = H_0 \cup (\cup_{\ell=1}^k H_{\gamma_\ell})$, így minden $1 \leq i \leq m$ esetén egyértelműen értelmezhető i^* az

$$i^* = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in H_0, \\ |H_{\gamma_\ell}|, & \text{ha } i \in H_{\gamma_\ell}, \end{cases}$$

képlettel. Nyilvánvaló, hogy bármely $1 \leq i \leq m$ esetén $\sigma^{i^*}(i) = i$, valamint a 4. Következmény alapján

$$\prod_{j=1}^{i^*} a_{\sigma^{j-1}(i)\sigma^j(i)} = 1, \quad \text{illetve} \quad \prod_{j=1}^{i^*} a_{\sigma^{-j}(i)\sigma^{-j+1}(i)} = 1.$$

Tekintsük most az $n = ru^*v^* + 1$ egészet, ahol r egy tetszőleges pozitív egész, akkor $a_{ij}^{(n)} = \sum_{(s_1, \dots, s_{n-1}) \in [m]^{n-1}} a_{is_1} a_{s_1 s_2} \cdots a_{s_{n-2} s_{n-1}} a_{s_{n-1} j}$, így mivel $v \neq \sigma(u)$ fennáll

a következő egyenlőtlenség

$$\begin{aligned} a_{uv}^{(n)} &\geq \sum_{t=0}^r \left(\prod_{j=1}^{tu^*v^*} a_{\sigma^{-j}(u)\sigma^{-j+1}(u)} \right) a_{uv} \left(\prod_{j=1}^{(n-t)u^*v^*} a_{\sigma^{j-1}(v)\sigma^j(v)} \right) \\ &= \sum_{t=0}^r \left(\prod_{j=1}^{u^*} a_{\sigma^{-j}(u)\sigma^{-j+1}(u)} \right)^{tv^*} a_{uv} \left(\prod_{j=1}^{v^*} a_{\sigma^{j-1}(v)\sigma^j(v)} \right)^{(n-t)u^*} = (r+1)a_{uv}. \end{aligned}$$

Mivel r tetszőleges pozitív egész és $E(A)$ korlátos következik, hogy $a_{uv} = 0$. Ezzel beláttuk, hogy

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq \sigma(i), \\ p(i), & \text{ha } j = \sigma(i), \end{cases}$$

ami azt jelenti, hogy A kvázipermutáció-mátrix, pontosabban $A = P(\sigma, p)$. ■

Hivatkozások

- [1] Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes, *Absztrakt algebrai feladatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985, JATEPress, 1998.
- [2] Csákány Béla, *Algebra*, Egyetemi jegyzet (JATE), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- [3] Szendrei Ágnes, *Diszkrét matematika*, Polygon, Szeged, 1996.
- [4] M. Farrokhi D. G., The American Mathematical Monthly, June-July 2007, Volume 114, Problems and Solutions, Problem 11303.

Dályay Pál Péter, Szeged

