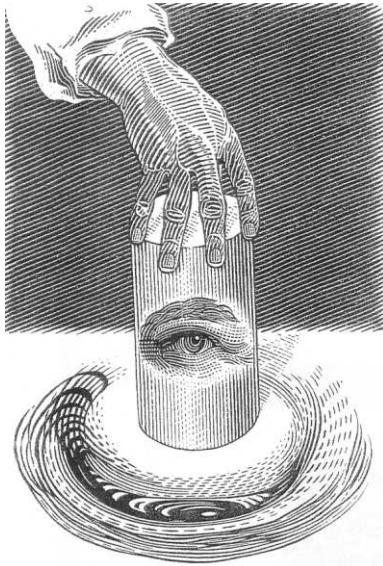


MŰHELYSAROK

Az egyenes, mint anamorfózis

HAJDU ENDRE

A görög ana- (vissza) és morphosis (változás) görög szavakból alkotott anamorfózis szót Gaspar Schott német jezsuita szerzetes használta először, 1650-ben megjelent, *Magia Universalis* című könyvében. Az anamorfózis olyan torzított képet jelent, mely csak bizonyos nézőpontból, vagy egy alkalmasan elhelyezett tükrötárgy segítségével értelmezhető/élvezhető. A tükrötárgy többnyire egy tükröző felületű henger, ilyen esetben beszélünk hengeres anamorfózisról. Nálunk az anamorfózisok ismert képzőművészeti alkalmazója, készítője Orosz István, a kiváló grafikus, kinek az 1. ábrán látható alkotása megvilágítja a fentebb elmondottakat.



1. ábra

Az anamorfózisokkal foglalkozó hazai szakirodalom szinte kizárólag a téma képzőművészeti vonatkozásait tárgyalja. A jelen dolgozat a hengeres anamorfózisok geometriai alapjaival foglalkozik.

Matematikai szempontból az „anamorfikus leképzés” – melyet a továbbiakban egyszerűen hengertükrözésnek mondunk – lényege az, hogy az anamorfózis síkja – az alapsík – pontjainak az alapsíkra merőleges tengelyű hengertükr-felület pontjait felelteti meg. Hengertükrképről mindig valamilyen szemlélő vonatkozásában beszélhetünk csak; a hengerről visszaverődő fénysugarak a szemlélő szemének megfelelő O pontba jutnak. A továbbiakban a hengertükr tengelye és az O szempont által meghatározott síkot fősíknak mondjuk.

Geometriai szempontból három feladattípus lényegesnek mondható:

1. Az alapsík tetszőleges P pontja $\overline{P}$ hengertükrképének előállításának szerkesztéssel vagy számítással,
2. Egy $\overline{P}$ hengertükrkép-ponthoz tartozó P „tárgypont” meghatározása az alapsíkon,
3. A hengertükrkép-alakzat vetületének előállítása a hengertengelyt tartalmazó, s a fősíkra merőleges síkon.

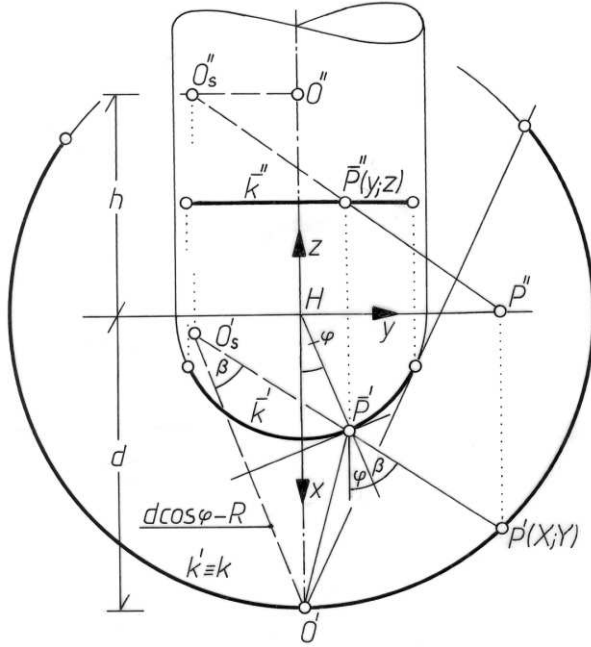
A hengertükrkép-pontok szerkesztése és számítása

A $P \rightarrow \overline{P}$ leképzés lényegét a tükrkép megszerkesztése tárja fel. Mivel térbeli szerkesztésről van szó, célszerű az ábrázoló geometria módszerével élni; az első képsíkot tekintjük alapsíknak. A szemlélő számára érdekes képalakzatot az anamorfózis pontjaiból érkező fénysugarakat visszaverő hengerfelületi pontok alkotják. Az alapsík valamely P pontjából érkező fénysugár a $\overline{P}$ tükrképponthoz tartozó S henger-érintősíkkal ugyanakkora szöget zár be, mint a visszaverődő és a szemlélő szemének megfelelő O pontba jutó fénysugár (2/a. ábra).

Megjegyzendő, hogy az említett fénysugaraknak az alapsíkra vonatkozó vetületei is egyenlő szöget zárnak be az érintősík első képével. Az ábráról az is leolvasható, hogy az alapsíknak csak az O -ból látható, vagyis a henger által nem takart pontjai tükröződnek, továbbá, hogy a tükrképpontok a hengernek arra a részére esnek, melyet az ábra pontozott téglalapja szemléltet.

Az iménti feladat más megoldását mutatja a 2/b. ábra. Mivel a P -ből induló fénysugár két szakasza – $P\overline{P}$ és $\overline{P}O$ – egyenlő hajlásszöget zár be az alapsíkkal, az $O\overline{P}$ egyenesnek az alapsíkkal alkotott dőféspontját D -vel jelölve $\overline{P}D = \overline{P}P$ (s e szakaszok első vetületei is egyenlő hosszúak), következésképp P' a D pontnak a $\overline{P}$ -beli érintőre tükrözésével is nyerhető.

A továbbiakban a henger sugarát R , az O pontnak az alapsík feletti magasságát h , a szempontnak a henger tengelyétől mért távolságát d jelöli.



3. ábra

A második feladattípus egyik lehetséges szerkesztő megoldása a 2/a. ábráról leolvasható: a hengerfelület $\overline{P}$ pontbeli érintősíkjára tükrözött O pont O_S tükörképének és $\overline{P}$ -nek összekötő egyenese az alapsíkot P -ben metszi.

A harmadik feladattípus vizsgálata céljából ismét a 3. ábrát tekintjük; a H kezdőpontú koordináta-rendszerben adott, $(x; y; z)$ koordinátájú hengerfelületi $\overline{P}$ képponthez az alapsíkon tartozó P pont X, Y koordinátáinak meghatározása végett először kiszámítjuk az O_S tükörképpont koordinátáit

$$O_S [d - 2 \cos \varphi (d \cos \varphi - R); 2 \sin \varphi (R - d \cos \varphi)].$$

A második kép hasonló háromszögeiből következőleg

$$\frac{h}{Y + 2 \sin \varphi (d \cos \varphi - R)} = \frac{z}{Y - R \sin \varphi}.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\frac{h}{X - [d - 2 \cos \varphi (d \cos \varphi - R)]} = \frac{z}{X - R \cos \varphi}.$$

A $\cos \varphi = x/R$ és $\sin \varphi = y/R$ helyettesítéssel

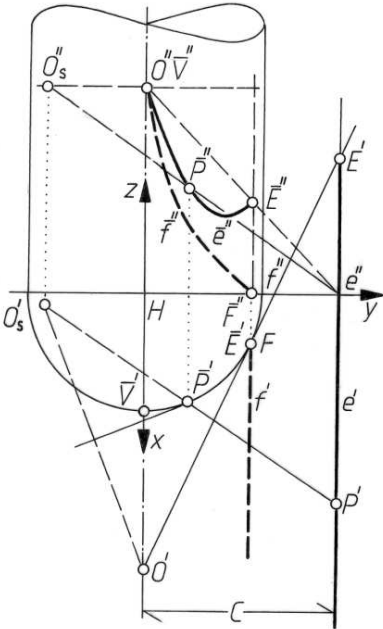
$$X = \frac{hx - z \left[d - 2x \left(d \frac{x}{R^2} - 1 \right) \right]}{h - z}; \quad Y = \frac{y \left[h + 2z \left(d \frac{x}{R^2} - 1 \right) \right]}{h - z}.$$

A két utolsó képlet ad lehetőséget a 3. feladattípus, vagyis a hengertükrökkép-vetület $z = z(y)$ alakú egyenletének felírására.

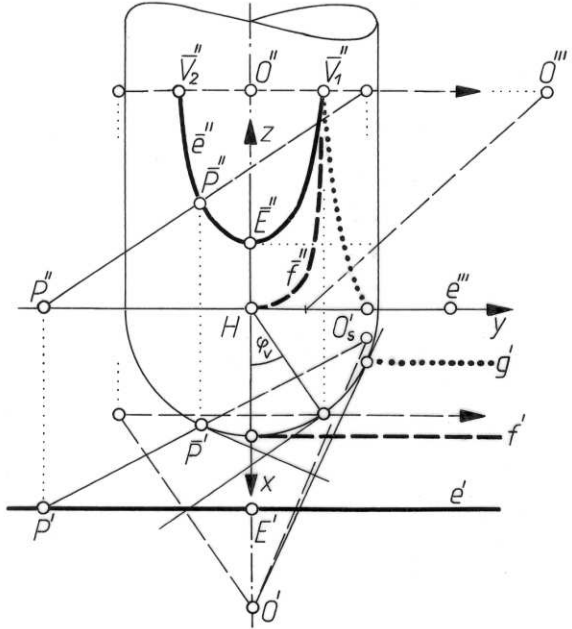
Egyenesek hengertükröképe

A hengertükrökkép a tükrözött anamorfózis „igazi” lényegét tárja fel általában; jelen esetben – lévén az anamorfózis csupán egy-egy egyenes – aligha igaz az iménti megállapítás, de geometriai szempontból mégsem érdektelen megvizsgálni az alapsík jellemző egyeneshelyzeit.

A. A fősíkkal párhuzamos (a 2. képsíkra merőleges) egyenesek (4. ábra).



4. ábra



5. ábra

Az e egyenesnek az alapsík kizárt tartománya határára eső pontja E , hengertükrökképe $\bar{E}$. Egy általános helyzetű P pontjának és tükrökképének szerkesztése a korábbiak szerint történik. Az egyenes E kezdőpontú, P -t tartalmazó félegyenese

$$2d \cos^2 \varphi - R \cos \varphi - d = 0,$$

$$\cos \varphi = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 8d^2}}{4d}.$$

Az egyenes végtelen távoli pontja tükörképének most két tükörképpont felel meg. A φ_v szög megszerkeszthető.

A hengertükörkép egyenlete – mivel az egyenes pontjaira $X = C -$

$$C(h - z) = h\sqrt{R^2 - y^2} - z \left[d - 2 \left(d \frac{R^2 - y^2}{R^2} - \sqrt{R^2 - y^2} \right) \right],$$

$$z = \frac{h(C - \sqrt{R^2 - y^2})}{C - d + 2 \left[d \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) - \sqrt{R^2 - y^2} \right]}.$$

Az 5. ábra a fősíkra merőleges további két félegyenes tükörképét is szemlélteti (más-más vonalfajttákkal).

C. Általános helyzetű egyenes.

Az e egyenes ideális pontjának ebben az esetben is két hengertükörkép-pont felel meg. Ha az egyenes irányszöge α , akkor az ideális pont leképzéséhez tartozó φ_v szög az alábbi egyenlet gyöke

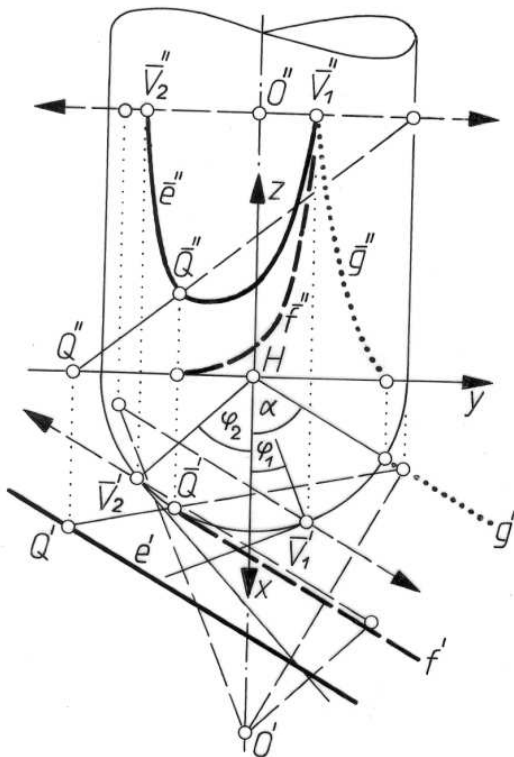
$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{d \sin \varphi}{d \cos \varphi - R}.$$

A 7. ábra az $\alpha = 60^\circ$ iránykszögű e egyenes és két vele párhuzamos egyenes hengertükörképét szemlélteti. A $d = 7$, $R = 3$, $\alpha = 60^\circ$ adatokkal szerkesztett ábrán $\varphi_1 \approx 22, 2^\circ$ és $\varphi_2 \approx -48^\circ$.

Az e egyenesnek az a Q pontja, melynek hengertükörképe a hengernek e -hez legközelebbi alkotójára esik, választja el azt a két félegyeneset, melyek hengertükörképe a $\overline{QV_1}$ ill. $\overline{QV_2}$ ív.

Egy $Y = mX + b$ ($m = \operatorname{tg} \alpha$) egyenletű egyenes hengertükörkép-vetületének egyenlete

$$z = \frac{R^2 h(mx + b - y)}{R^2 [m(2x + d) + b - 2y] + 2dx(y - mx)}.$$



7. ábra

Irodalom

- [1] Wolfgang Bürger, Zylinderanamorphosen – Die analytische Geometrie eines Spielzeuges aus der Barockzeit, Die mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 46/8, 1993, pp. 468 – 471.
- [2] D. Hansford – D. Collins, *Anamorphic 3D geometry*, Springer, 2007.
- [3] Hunt, J. et al., Anamorphic images, American Journal of Physics Teachers, (2000), pp. 232-237.
- [4] Christian Ucke, Anamorphotische Konstruktionen, Vorträge der DPG Frühjahrstagung Giessen, 1986, p. 607.
- [5] www.cirklen.dk/foredrag/liste/litteraturliste.doc