

EGY ÖTLET

A Catalan-összefüggés általánosításai és a kapott formulák alkalmazásai

MOLNÁR ISTVÁN

Korábbi [7] cikkünkben a Catalan-összefüggés néhány alkalmazását mutattuk be. A következőkben az összefüggés néhány általánosítását és az általánosításokra alkalmazásokat mutatunk be.

Catalan-összefüggés. *Tetszőleges pozitív egész n esetén érvényes a következő azonosság:*

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Általánosítás. Legyen $\{b_n\}$ egy sorozat, melynek általános tagja

$$b_n = \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+2k} + \cdots + \frac{1}{n+nk},$$

ahol k egy pozitív valós szám. Felhasználva, hogy

$$b_n = \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+2k} + \cdots + \frac{1}{n+nk} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+k\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+k\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+k\frac{n}{n}} \right)$$

azt kapjuk, hogy a $\{b_n\}$ az $\frac{1}{1+kx}$ függvénynek a $[0; 1]$ intervallum n egyenlő részre való beosztásához tartozó Darboux-féle alsó integrál közelítő összege. Mivel az $\frac{1}{1+kx}$ függvény monoton a $[0; 1]$ -n, ezért integrálható, így ha $n \rightarrow \infty$, akkor

$$b_n \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+kx} dx = \frac{1}{k} [\ln(1+kx)]_0^1 = \frac{1}{k} \ln(k+1).$$

Tehát

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+2k} + \cdots + \frac{1}{n+nk} \right) = \frac{\ln(k+1)}{k}.$$

2. Általánosítás. Nézzük meg hogyan változik az (1) egyenlőség bal oldalán álló kifejezés, ha a jobb oldalon szereplő kifejezésben a tagok tetszőleges pozitív egész hatványa szerepel, azaz ha a jobboldali kifejezés

$$\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p}$$

alakú, ahol $p \in \mathbb{N}$ és $p \geq 2$.

A számítások során ugyanazt az „ötletet” használjuk, amit a Catalan-összefüggés bizonyításánál.

Ha $p = 2$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} - 4 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \\ &= 1 - \frac{3}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{3}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{3}{(2n)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{3}{(2k)^2} \right] \end{aligned}$$

Ha $p = 3$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(2n)^3} \\ &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{(2n)^3} - \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{(2n)^3} - 8 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{(2n)^3} \right) \\ &= 1 - \frac{7}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{7}{4^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{7}{(2n)^3} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^3} - \frac{7}{(2k)^3} \right] \end{aligned}$$

Általánosan, ha $p \in \mathbb{N}$ és $p > 1$, akkor

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \\
 &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} - \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}\right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} - 2^p \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p}\right) \\
 &= 1 - \frac{2^p - 1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{2^p - 1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{2^p - 1}{(2n)^p} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^p} - \frac{2^p - 1}{(2k)^p} \right]
 \end{aligned}$$

Összefoglalva

$$(3) \quad \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{3}{(2k)^2} \right]$$

$$(4) \quad \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(2n)^3} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^3} - \frac{7}{(2k)^3} \right]$$

Általánosan ($p \in \mathbb{N}$ és $p > 1$)

$$(5) \quad \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^p} - \frac{2^p - 1}{(2k)^p} \right]$$

Most pedig nézzünk néhány alkalmazást a 2. általánosításra.

1. Az első alkalmazás egy egyenlőtlenség igazolása.

Mutassuk meg, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{9} - \frac{3}{16} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{3}{(2n)^2} > 0$$

Megoldás. Alkalmazzuk a (3) összefüggést, ahonnan a kért egyenlőtlenség nyilvánvalóvá válik

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{9} - \frac{3}{16} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{3}{(2n)^2} &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{3}{(2k)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} > 0, \quad \text{bármely } n \in \mathbb{N}^+ \text{ esetén.}
 \end{aligned}$$

2. A második alkalmazás egy határérték kiszámítása.

Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^3} - \frac{7}{(2k)^3} \right] \right).$$

Megoldás. Legyen

$$a_n = n^2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^3} - \frac{7}{(2k)^3} \right].$$

Alkalmazzuk a (4) összefüggést az a_n felírásának átalakításához.

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^3} - \frac{7}{(2k)^3} \right] = n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(2n)^3} \right) \\ &= n^2 \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^3} + \cdots + \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n}\right)^3} \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^3} + \cdots + \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n}\right)^3} \right]. \end{aligned}$$

Azt kapjuk, hogy $\{a_n\}$ az $\frac{1}{(1+x)^3}$ függvénynek a $[0; 1]$ intervallum n egyenlő részre való beosztásához tartozó Darboux-féle alsó integrál közelítő összege. Mivel az $\frac{1}{(1+x)^3}$ függvény monoton a $[0; 1]$ -on, ezért integrálható, így ha $n \rightarrow \infty$, akkor

$$a_n \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{8}.$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^3} - \frac{7}{(2k)^3} \right] \right) = \frac{3}{8}.$$

3. Általánosítás. Ebben a részben egy, a [7] cikkben az 5. alkalmazásban szereplő sorozathoz hasonló, annál általánosabb alakú sorozatot fogunk tanulmányozni.

Tekintsük az

$$a_n(p; q) = \frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{pn}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

általános tagú sorozatot, ahol $p, q \in \mathbb{N}^+$ és $p > q$.

Vizsgáljuk meg először az $\{a_n(p; q)\}$ sorozat korlátosságát. Egyrészt

$$a_n(p; q) = \frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{pn} \geq \underbrace{\frac{1}{pn} + \frac{1}{pn} + \cdots + \frac{1}{pn}}_{(pn-qn)\text{-szer}} = \frac{pn-qn}{pn} = \frac{p-q}{p},$$

másrészt pedig

$$\begin{aligned} a_n(p; q) &= \frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{pn} \leq \underbrace{\frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+1} + \cdots + \frac{1}{qn+1}}_{(pn-qn)\text{-szer}} \\ &= \frac{pn-qn}{qn+1} < \frac{pn-qn}{qn} = \frac{p-q}{q}. \end{aligned}$$

Összegezve tehát

$$\frac{p-q}{p} \leq a_n(p; q) < \frac{p-q}{q}$$

bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, vagyis az $\{a_n(p; q)\}$ sorozat korlátos.

A kezdeti feltételekből azonnal adódik, hogy $q \geq 1$ és $p \geq 2$.

Nézzük meg először a $q = 1$ esetet. Ekkor

$$\begin{aligned} a_n(p; 1) &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn}, \\ a_{n+1}(p; 1) &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{pn} + \frac{1}{pn+1} + \cdots + \frac{1}{pn+p}. \end{aligned}$$

Felírva az $a_{n+1}(p; 1) - a_n(p; 1)$ különbséget és a megfelelő összevonásokat elvégezve

$$\begin{aligned} a_{n+1}(p; 1) - a_n(p; 1) &= \frac{1}{pn+1} + \frac{1}{pn+2} + \cdots + \frac{1}{pn+p} - \frac{1}{n+1} > \\ &> \underbrace{\left(\frac{1}{pn+p} + \frac{1}{pn+p} + \cdots + \frac{1}{pn+p} \right)}_{p\text{-szer}} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{p}{np+p} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0, \end{aligned}$$

azaz $a_{n+1}(p; 1) - a_n(p; 1) > 0$, bármely pozitív egész n esetén, tehát az $\{a_n(p; 1)\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő.

Azt már beláttuk, hogy az $\{a_n(p; q)\}$ sorozat korlátos, vagyis az $\{a_n(p; 1)\}$ sorozat is az. Összefoglalva tehát az $\{a_n(p; 1)\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő és korlátos, tehát konvergens.

Nézzük a továbbiakban azt az esetet, amikor a $q \geq 2$. Ekkor

$$\begin{aligned} a_n(p; q) &= \frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{pn} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{qn} \right) \\ &= a_n(p; 1) - a_n(q; 1) \end{aligned}$$

azaz felírható az alábbi összefüggés:

$$(6) \quad a_n(p; q) = a_n(p; 1) - a_n(q; 1).$$

Felhasználva, hogy az $\{a_n(p; 1)\}$ sorozat konvergens (tehát az $\{a_n(q; 1)\}$ sorozat is az), könnyen belátható, hogy az $\{a_n(p; q)\}$ sorozat konvergenciája a (6) összefüggés alapján visszavezethető a konvergens sorozatok viselkedésére a különböző műveletek esetén. Nálunk elegendő belátni két konvergens sorozat különbségének konvergenciáját.

Tehát az $\{a_n(p; q)\}$ sorozat konvergens.

Végezetül lássuk, hogy mi lesz az $\{a_n(p; q)\}$ sorozat határértéke.

Felhasználjuk az ismert tényt, hogy a

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

általános tagú sorozat konvergens (lásd [4]). Ekkor

$$\begin{aligned} b_{pn} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn} - \ln(pn) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn} - \ln p \right) \\ &= b_n + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn} - \ln p \right) = b_n + a_n(p; 1) - \ln p, \end{aligned}$$

azaz

$$b_{pn} = b_n + a_n(p; 1) - \ln p.$$

Mivel a $\{b_{pn}\}$ -nek és $\{b_n\}$ -nek ugyanaz a határértéke következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(p; 1) = \ln p$. Hasonló gondolatmenettel belátható az is, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(q; 1) = \ln q$.

A kapott eredményeket, illetve az $\{a_n(p; 1)\}$ és az $\{a_n(q; 1)\}$ sorozatok konvergenciáját felhasználva, a (6) összefüggés alapján

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(p; q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n(p; 1) - a_n(q; 1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(p; 1) - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(q; 1) \\ &= \ln p - \ln q = \ln \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Tehát

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(p; q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{pn} \right) = \ln \frac{p}{q}$$

Összefoglalva a kapott eredményeket megállapítható, hogy az

$$a_n(p; q) = \frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{pn}, \quad \text{ahol } n \in \mathbb{N}^+, p, q \in \mathbb{N}^+, p > q$$

általános tagú sorozat konvergens és határértéke $\ln \frac{p}{q}$.

A továbbiakban nézzünk egy alkalmazást a 3. általánosításra.

3. Az alkalmazás két sorozat határértékének kiszámítása.

Számítsuk ki az alábbi, általános tagjával megadott, sorozatok határértékét:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad a_n &= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+6} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n}, \\ \text{b)} \quad b_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(16k^2-1)}. \end{aligned}$$

Megoldás. a) Az a_n átírható a következő alakra

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n} \right) - \\ &\quad - 2 \left(\frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+6} + \cdots + \frac{1}{6n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \cdots + \frac{1}{6n} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Mindezeket felhasználva

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{6n} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{6n} \right) - \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \ln \frac{6}{3} - \frac{2}{3} \ln 2 = \frac{1}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+6} + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n} \right) = \frac{\ln 2}{3}$$

b) Előbb elvégezzük a következő átalakítást

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(16k^2-1)} &= 2 \frac{1}{2k(16k^2-1)} = 2 \frac{16k^2 - (16k^2-1)}{2k(16k^2-1)} = 2 \left(\frac{8k}{16k^2-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= 2 \left(\frac{8k}{(4k-1)(4k+1)} - \frac{1}{2k} \right) = 2 \left(\frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{2k} \right) \end{aligned}$$

A kapott eredményt és az (1) összefüggést felhasználva

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(16k^2-1)} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{2n} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} - 1 \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} - 1 \right) \\ &= 2 \left(\frac{2}{2n+2} + \frac{2}{2n+4} + \cdots + \frac{2}{4n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} - 1 \right) \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + \cdots + \frac{1}{4n} \right) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} \right) + \frac{1}{4n+1} - 1 \right] \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) + 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{4n} \right) \\ &\quad + \frac{2}{4n+1} - 2. \end{aligned}$$

Mindezek alapján

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) + 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{4n} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{4n+1} - 2 \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{4n} \right) \\
 & \quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{4n+1} - 2 \right) = \ln 2 + 2 \ln \frac{4}{2} - 2 = 3 \ln 2 - 2.
 \end{aligned}$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(16k^2 - 1)} \right) = 3 \ln 2 - 2.$$

Megjegyzés. Felhasználva a 3. általánosításban bizonyított

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \cdots + \frac{1}{pn} \right) = \ln \frac{p}{q},$$

illetve a 1. általánosításban bizonyított

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+2k} + \cdots + \frac{1}{n+nk} \right) = \frac{\ln(k+1)}{k}$$

határértékeket, ezek segítségével újabb érdekes határértékeket kaphatunk, például:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n-1} \right) = \frac{1}{2} \ln 3$
(ha $q = 1$; $p = 3$; $k = 2$)
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} \right) = \frac{2}{3} \ln 4$
(ha $q = 1$; $p = 4$; $k = 3$)
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k-1} + \frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{n+k+2} + \cdots \right.$
 $\left. + \frac{1}{n+nk-1} \right) = \frac{k-1}{k} \ln(k+1)$
(ha $q = 1$; $p = k+1$; $k > 1$)

4. Általánosítás(Csebisev, [5]).

Tekintsük a Catalan-összefüggést

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Írjuk a baloldalon szereplő kifejezésben – a számlálókban szereplő egységek helyére – egy tetszőleges konvergens $\{u_n\}$ sorozat elemeit. Nézzük meg, hogyan módosul a jobb oldalon álló kifejezés.

$$\begin{aligned} & \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} - \frac{u_4}{4} + \cdots + \frac{u_{2n-1}}{2n-1} - \frac{u_{2n}}{2n} \\ &= \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \frac{u_4}{4} + \cdots + \frac{u_{2n-1}}{2n-1} + \frac{u_{2n}}{2n} - 2 \left(\frac{u_2}{2} + \frac{u_4}{4} + \cdots + \frac{u_{2n}}{2n} \right) \\ &= \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_{2n}}{2n} - \left(\frac{u_2}{1} + \frac{u_4}{2} + \cdots + \frac{u_{2n}}{n} \right) \\ &= \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_{2n}}{2n} - \left(\frac{u_2}{1} + \frac{u_4}{2} + \cdots + \frac{u_{2n}}{n} \right) - \\ & \quad - \left(\frac{u_{2n+2}}{n+1} + \frac{u_{2n+4}}{n+2} + \cdots + \frac{u_{4n}}{2n} \right) + \left(\frac{u_{2n+2}}{n+1} + \frac{u_{2n+4}}{n+2} + \cdots + \frac{u_{4n}}{2n} \right) \\ &= \frac{u_{2n+2}}{n+1} + \frac{u_{2n+4}}{n+2} + \cdots + \frac{u_{4n}}{2n} + \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_{2n}}{2n} - \left(\frac{u_2}{1} + \frac{u_4}{2} + \cdots + \frac{u_{4n}}{2n} \right) \\ &= \frac{u_{2n+2}}{n+1} + \frac{u_{2n+4}}{n+2} + \cdots + \frac{u_{4n}}{2n} + \frac{u_1 - u_2}{1} + \frac{u_2 - u_4}{2} + \cdots + \frac{u_{2n} - u_{4n}}{2n}, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_{2n-1}}{2n-1} - \frac{u_{2n}}{2n} &= \frac{u_{2n+2}}{n+1} + \frac{u_{2n+4}}{n+2} + \cdots + \frac{u_{4n}}{2n} + \\ & \quad + \frac{u_1 - u_2}{1} + \frac{u_2 - u_4}{2} + \cdots + \frac{u_{2n} - u_{4n}}{2n}, \end{aligned}$$

vagy

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{u_{2k}}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{u_k - u_{2k}}{k}.$$

Legyen

$$(8) \quad v_k = u_k - u_{2k}, \quad \text{ahol } k = 1, 2, \dots, 2n.$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{u_{2k}}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{v_k}{k},$$

vagyis

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_{2n-1}}{2n-1} - \frac{u_{2n}}{2n} &= \frac{u_{2n+2}}{n+1} + \frac{u_{2n+4}}{n+2} + \cdots + \frac{u_{4n}}{2n} + \\ &+ \frac{v_1}{1} + \frac{v_2}{2} + \cdots + \frac{v_{2n}}{2n}. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_{2n-1}}{2n-1} - \frac{u_{2n}}{2n} - \left(\frac{v_1}{1} + \frac{v_2}{2} + \cdots + \frac{v_{2n}}{2n} \right) \\ = \frac{u_{2n+2}}{n+1} + \frac{u_{2n+4}}{n+2} + \cdots + \frac{u_{4n}}{2n}. \end{aligned}$$

Határértékre áttérve (azaz $n \rightarrow \infty$), a jobboldalon álló kifejezésből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_{2n+2}}{n+1} + \frac{u_{2n+4}}{n+2} + \cdots + \frac{u_{4n}}{2n} \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \ln 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} u_n. \end{aligned}$$

Mindezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$(9) \quad \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} - \cdots - \left(\frac{v_1}{1} + \frac{v_2}{2} + \frac{v_3}{3} + \cdots \right) = U \cdot \ln 2,$$

ahol az $U = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, illetve a $v_1, v_2, v_3, \dots$ értékei a (8) összefüggés által vannak meghatározva.

Összefoglalva tehát

$$(9') \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{u_k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{k} = U \cdot \ln 2,$$

ahol $v_k = u_k - u_{2k}$, $k = 1, 2, \dots$

A folytatásban vizsgáljunk meg egy speciális esetet.

Legyen $u_k = \frac{[ak]}{k}$, ahol a egy tetszőleges pozitív valós szám, míg $[ak]$ az ak valós szám egész részét jelöli. Behelyettesítve az így értelmezett u_k -t a (8) összefüggésbe:

$$v_k = \frac{[ak]}{k} - \frac{[2ak]}{2k} = \frac{2[ak] - [2ak]}{2k}.$$

A $2[ak] - [2ak]$ különbség értelemszerűen 0 vagy -1 lesz annak függvényében, hogy a $[2ak]$ páros vagy páratlan lesz. Ezáltal az előbbi különbség átírható

$$2[ak] - [2ak] = \frac{(-1)^{[2ak]} - 1}{2} \quad \text{alakra, ezáltal} \quad v_k = \frac{(-1)^{[2ak]} - 1}{4k}$$

lesz.

Behelyettesítve a kapott u_k és v_k értékeket a (9)-es összefüggésbe és felhasználva, hogy

$$U = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{[ak]}{k} = a,$$

kapjuk, hogy

$$a \ln 2 = \frac{[a]}{1^2} - \frac{[2a]}{2^2} + \frac{[3a]}{3^2} - \dots - \left(\frac{(-1)^{[2a]} - 1}{4 \cdot 1^2} + \frac{(-1)^{[4a]} - 1}{4 \cdot 2^2} + \frac{(-1)^{[6a]} - 1}{4 \cdot 3^2} + \dots \right).$$

Végigszorozva 4-el és átrendezve

$$\begin{aligned} 4a \ln 2 = & \frac{4[a] - (-1)^{[2a]}}{1^2} - \frac{4[2a] + (-1)^{[4a]}}{2^2} + \frac{4[3a] - (-1)^{[6a]}}{3^2} - \frac{4[4a] + (-1)^{[8a]}}{4^2} \\ & + \dots + \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Felhasználva az ismert tényt, hogy

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

(lásd [6]) a kapott összefüggés átírható

$$\begin{aligned} 4a \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} = & \frac{4[a] - (-1)^{[2a]}}{1^2} - \frac{4[2a] + (-1)^{[4a]}}{2^2} + \frac{4[3a] - (-1)^{[6a]}}{3^2} \\ & - \frac{4[4a] + (-1)^{[8a]}}{4^2} + \dots \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} (10) \quad 4a \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} = & \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4[k a] + (-1)^k \cdot (-1)^{[k 2a]}}{k^2} \\ = & \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4[k a] + (-1)^{[k 2a] + k}}{k^2}. \end{aligned}$$

Ha $A = 4a \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$, ahonnan

$$a = \frac{A + \frac{\pi^2}{6}}{4 \ln 2} = \frac{6A + \pi^2}{24 \ln 2},$$

akkor a (10) összefüggés átalakul az alábbi alakra

$$(11) \quad A = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4 \left[k \cdot \frac{6A+\pi^2}{24 \ln 2} \right] + (-1)^{\left[k \cdot \frac{6A+\pi^2}{12 \ln 2} \right] + k}}{k^2}.$$

A 4. általánosítás Csebisev nevéhez fűződik. Catalan egy 1872-ben megjelent cikkére hivatkozva tovább általánosította az (1) összefüggést, majd megvizsgálta egy speciális esetben. A kapott eredményeket 1876-ban mutatta be – a franciaországi Clermont-Ferrandban a Társaság a tudomány fejlődéséért V. kongresszusán – a „*Sur la généralisation de la formule de M.Catalan et sur une formule arithmétique qui en résulte*” dolgozatában.

Irodalomjegyzék

- [1] Svetoslav Savchev – Titu Andreescu, *Mathematical Miniatures*, 2003, Mathematical Association of America, 21-23 o.
- [2] Németh József, *Előadások a végtelen sorokról*, Szeged, 2004, Polygon, 147-148 o.
- [3] Urbán János, *Határértékszámítás*, Budapest, 1975, Műszaki Könyvkiadó, 136-137 o.
- [4] Szász Pál, *A differenciál- és integrálszámítás elemei 1.*, Budapest, 2000, Typotex Kiadó, 261-262 o.
- [5] Markoff M.A. – Sonin N. (szerk.), *Oeuvres de P.L. Tchebychef*, Szentpétervár, 1907, 702-704 o.
- [6] Németh József, *Előadások a végtelen sorokról*, Szeged, 2004, Polygon, 53-58 o.
- [7] Molnár István, Alkalmazzuk a Catalán-összefüggést, *Polygon XVII. kötet* 1-2. sz., 2008. december, 126-133. o.

Molnár István, Szent István Egyetem Gazdasági Kar Alkalmazott Természettudományi Intézet, Békéscsaba, molnar@zeus.tsf.hu

