POLYGON
XVIII.köt., 1.sz., 2009. okt.

Kötélgörbe, avagy miért hasonlítanak egymásra a kupolák

Kurusa Árpád

1. Kupolák és kötelek

Amikor egy bazilika kupoláján nézegetjük a freskókat, eszünkbe juthat, hogyan is volt lehetséges ilyen hatalmas tetőt építeni anélkül, hogy oszlopok tartanák. A feladat nem éppen egyszerű: úgy kell kialakítani a tető alakját, hogy megtartsa önmagát a tartófalak tetején és kisebb „behatások” se omlasszák be. A feladat nagysága sosem riasztotta el az építészeket, hogy hatalmas kupolák építésével kísérletezzenek. A sokszor balul sikerült kísérlet, vagyis a beomlás hatására el is terjedt köztük az úgy nevezett 5-perces szabály: „amely kupola 5 perc alatt nem omlik be, az 500 évig is állva marad”.

A vatikáni Szent Péter bazilika kupolája 1546 és 1564 között Michelangelo irányításával készült, majd Giacomo della Porta irányításával 1593-ban fejezték be. Ez a világ legnagyobb kupolája, százhuszonhárom méteres magasságát egyetlen más kupola sem éri el.

Manapság már nem megengedhető a kísérleti építkezés, tehát át kell gondolni mit is jelent egy ilyen kupola a fizika nyelvén: A kupola szerkezete *egyensúlyi helyzetben* van, és ebből külső hatások sem mozdítják ki könnyen, vagyis ez az egyensúlyi helyzet *stabil.* A stabilitás azt jelenti, hogy a szerkezet potenciális energiája az adott helyzetben minimális.

Feltételezve a bazilikáknál a kupolák alatt megszokott köralakú alaprajzot, a kupolának a kör középpontjában állított merőleges egyenesre való forgásszimmetriája adódik. Emiatt matematikai értelemben a kupola leírható egyetlen görbével, melynek tengely körüli forgása végigsúrolja a kupola felületét.

Hogyan kereshetnénk meg ezt a görbét, vagy esetleg görbéket?

Az ötlet egyszerű: gondolatban fordítsuk a kupolát fejjel lefelé! A fentiekben megfogalmazott feltételek egyike sem változik, de a potenciális energia minimumát így már könnyű megkeresni, hiszen két pont közé kifeszítve egy, a két pont távolságánál hosszabb, de nem nyújtható kötelet, a kötél a hajlékonysága miatt addig mozog, amíg nem kerül stabil nyugalmi állapotba. Ez a stabil nyugalmi helyzet éppen a potenciális energia minimumánál valósul meg, ami magától megoldja a körkupola építésének problémáját és rámutat a körkupolák egyformaságának fizikai okára.

Bár az építészet mechanikai problémáját matematika alkalmazása nélkül oldottuk meg, a tervezhetőség és a címben feltett kérdésre adandó válasz érdekében meg kell találni a nyugalmi állapotú kötél alakját leíró matematikai függvényt, melynek grafikonját a fentiek miatt kötélgörbének[1)] nevezik.

2. A kötélgörbe

Ebben a szakaszban a kötél nyugalmi helyzetében ható erők egyensúlyából kiindulva határozzuk meg a kötélgörbét.

Legyen az ℓ hosszúságú és σ „hosszsűrűségű” (a köteleket, mivel átmérőjük gyakorlatilag állandó és igen kicsiny, általában a méterenkénti súlyukkal szokás jellemezni, most is ez mutatkozik meg a σ számban) kötél két végénél az $A = (x_A, y_A)$ és $B = (x_B, y_B)$ pontokra akasztva, ahol a trivialitás kizárása érdekében feltesszük, hogy $x_A \neq x_B$ és $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 < \ell$. Világos, hogy a görbe két pontja nem eshet egymás fölé, ezért van egy olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek grafikonja az $[x_A, x_B]$ intervallumon éppen a kötél pontjaiba esik. A kalkulációink érdekében feltesszük, hogy f kétszer folytonosan differenciálható.

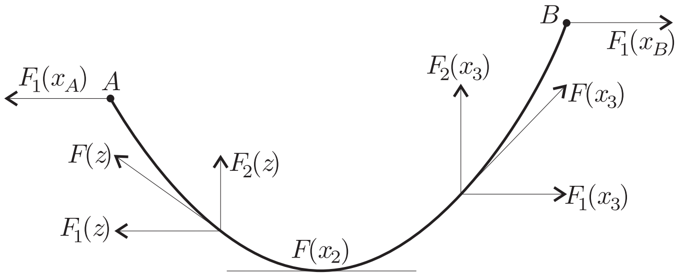
A kötél által felvett $r(x) = (x, f(x))\colon [x_A, x_B] \to \mathbb{R}^2$ görbe bármely $z < x$ abcisszájú pontjai közötti darabjának hosszát az $\dot{r}(x) = (1, f'(x))$ érintőjének hosszából az $\int_z^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ formula adja [2], így annak súlya

$$s(z, x) = \sigma \int_z^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Mivel a kötél nyugalmi helyzetben van, az $r(x)$ pontjára ható erők $\overrightarrow{F}(x) = (F_1(x), F_2(x))$ összege a görbe érintőjével párhuzamos irányba mutat, vagyis $F_2(x) = \pm f'(x) F_1(x)$.

---

1) Ezt láncgörbének is hívják, mert két pontra való felfüggesztésekor a hosszához képest apró szemekből álló lánc is ugyanezen görbe alakját veszi fel.



A kötél minden $z < x$ abcisszájú pontjai közötti darabját az $\overrightarrow{F}(z)$ és $\overrightarrow{F}(x)$ erők, valamint az $\overrightarrow{S}(z,x) = (0, -s(z,x))$ súlyerő tartják egyensúlyban, ezért $\overrightarrow{F}(z) + \overrightarrow{F}(x) + \overrightarrow{S}(z,x) = 0$, amiből

$$F_2(z) + F_2(x) = s(z,x),$$
$$F_1(z) + F_1(x) = 0$$

adódik. Utóbbiból azonnal kapjuk, hogy $F_1(x) = c$ konstans[2)], és minden pontban éppen a baloldali tartópontban jelentkező $F_1(z)$ vízszintes erő ellentettje.

Az $F_2(z)+F_2(x) = s(z,x)$ egyenlet x szerinti deriválásával a szakasz jobboldali végpontjában

$$F_2'(x) = \sigma\sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

következik. Ezt felhasználva a másodrendű

$$(*) \qquad \sigma\sqrt{1 + (f'(x))^2} = F_2'(x) = (\pm f'(x)F_1(x))' = (\pm cf'(x))' = \pm cf''(x)$$

differenciálegyenlethez jutunk, aminek átrendezésével

$$\frac{\sigma}{c} f'(x) = \frac{f'(x)f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = \left(\sqrt{1 + (f'(x))^2}\right)'$$

adódik, amiért

$$\frac{\sigma}{c} f(x) + d = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

valamely d valós számra.

A $(*)$ egyenlet baloldala a $\sigma > 0$ konstansnál sosem kisebb, ezért a jobboldal sem lehet nulla, így az a folytonossága miatt nem válthat előjelet. Ennek következtében minden megoldásfüggvény f'' második deriváltja az egész számegyenesen pozitív, vagy negatív. Előbbi esetben f alulról nézve szigorúan konvex (a deriváltja

[2)] A c persze nagyon is függ az A, B pontok megválasztásától, a kötél ℓ hosszától és a kötél σ hosszsűrűségétől is.

szigorúan monoton növekvő), utóbbi esetben pedig szigorúan konkáv (a deriváltja szigorúan monoton fogyó) lenne, ami egy kötél esetében kizárt. Tehát f alulról nézve szigorúan konvex, és így $(*)$ alapján $f''(x) \geq \frac{\sigma}{c} > 0$. Eszerint

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) - f'(0) = \lim_{x\to\pm\infty} \int_0^x f''(t)dt = \pm\infty,$$

amiből következőleg

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{c}{\sigma}\big(\sqrt{1+(f'(x))^2} - d\big) = \infty.$$

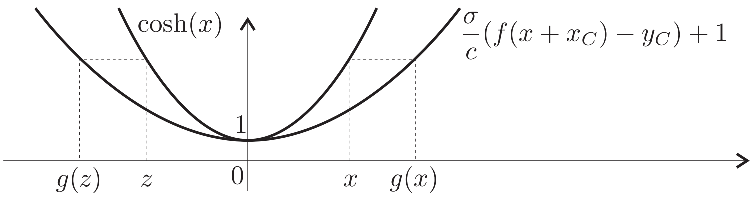
Mivel $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ és f folytonos, minden elég nagy x_+ számhoz van olyan x_-, hogy $f(x_-) = f(x_+)$. Az f az $[x_-, x_+]$ zárt intervallumon folytonos, így ebben felveszi minimumát, amit viszont konvexitásának szigorúsága miatt csak pontosan egy pontban tehet. Minthogy $x_+ \to \infty$ esetén a $[x_-, x_+]$ zárt intervallumok lefedik a számegyenest, ebből az következik, hogy az f függvénynek pontosan egy minimumhelye van.

Legyen az f egyetlen minimumhelye x_C és a görbe ehhez tartozó pontja $C = (x_C, y_C)$. A fentiek szerint az f függvény az x_C előtti félegyenesen szigorúan monoton fogy, az x_C utáni félegyenesen pedig szigorúan monoton nő.

A cosh függvény[3)] (lásd a függelékben) a pozitív félegyenesen szigorúan monoton nő, a negatív félegyenesen pedig szigorúan monoton fogy, és mindkét félegyenest bijektíven képezi az $(1,\infty)$ félegyenesre, ezért a

$$\cosh(g(x)) = \frac{\sigma}{c}(f(x+x_C) - y_C) + 1 \quad \text{és} \quad \operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$$

feltételek meghatároznak egy $g\colon [x_A, x_B] \to \mathbb{R}$ függvényt.



Ez a g függvény az f és a cosh függvény inverzének differenciálhatósága miatt differenciálható, és

$$f(x) = \frac{c}{\sigma}\cosh(g(x-x_C)) + \big(y_C - \frac{c}{\sigma}\big), \qquad x \in [x_A, x_B],$$

valamint $g(0) = 0$.

[3)] Választhattunk volna más, a pozitív és negatív félegyenest is az $(1,\infty)$ félegyenesre bijektíven képező függvényt, de a differenciálegyenletünket ez egyszerűsíti leginkább.

Eszerint $f'(x) = \frac{c}{\sigma}\sinh(g(x-x_C))g'(x-x_C)$, így differenciálegyenletünk a

$$\begin{aligned}\cosh(g(x-x_C)) + \big(\frac{\sigma}{c}y_C - 1 + d\big) &= \frac{\sigma}{c}f(x) + d = \sqrt{1+(f'(x))^2}\\ &= \sqrt{1+\big(\frac{c}{\sigma}\sinh(g(x-x_C))g'(x-x_C)\big)^2}\end{aligned}$$

formát veszi fel. Ennek mindkét oldalát az $x = x_C$ pontban kiszámítva $d + \frac{\sigma}{c}y_C = 1$ adódik, amit ugyanoda visszaírva

$$\cosh^2(g(x-x_C)) = 1 + \big(\frac{c}{\sigma}\sinh(g(x-x_C))g'(x-x_C)\big)^2$$

következik. A $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$ azonosság alapján ebből $\frac{\pm\sigma}{c} = g'(x-x_C)$ adódik, amiért $g(x) = \frac{\pm\sigma}{c}x$, hiszen $g(0) = 0$.

Visszahelyettesítéssel tehát azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{c}{\sigma}\cosh\big(\frac{\sigma}{c}(x-x_C)\big) + \big(y_C - \frac{c}{\sigma}\big),$$

ami a kötélgörbe matematikai alakja.

A kötél pontos elhelyezkedésének meghatározásához ki kell még számolnunk a c konstans értékét és a $C = (x_C, y_C)$ pontot.

Az $f(x_A) = y_A$ és $f(x_B) = y_B$ egyenletek különbségéből az

$$(\dagger)\qquad \begin{aligned} y_A - y_B &= \frac{c}{\sigma}\big[\cosh\big(\frac{\sigma}{c}(x_A-x_C)\big) - \frac{c}{\sigma}\cosh\big(\frac{\sigma}{c}(x_B-x_C)\big)\big]\\ &= \frac{2c}{\sigma}\sinh\big(\frac{\sigma}{2c}(x_A-x_B)\big)\sinh\big(\frac{\sigma}{2c}(x_A+x_B-2x_C)\big)\end{aligned}$$

egyenlethez jutunk.

Az $f'(x) = \sinh(\frac{\sigma}{c}(x-x_C))$ deriváltból a kötél hosszát kifejezve

$$(\ddagger)\qquad \begin{aligned}\ell &= \int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(f'(t))^2}dt = \int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+\big(\sinh\big(\frac{\sigma}{c}(x-x_C)\big)\big)^2}dt\\ &= \int_{x_A}^{x_B}\cosh\big(\frac{\sigma}{c}(x-x_C)\big)dt = \frac{c}{\sigma}\big[\sinh\big(\frac{\sigma}{c}(x-x_C)\big)\big]_{x_A}^{x_B}\\ &= \frac{c}{\sigma}\big[\sinh\big(\frac{\sigma}{c}(x_B-x_C)\big) - \sinh\big(\frac{\sigma}{c}(x_A-x_C)\big)\big]\\ &= \frac{2c}{\sigma}\sinh\big(\frac{\sigma}{2c}(x_B-x_A)\big)\cosh\big(\frac{\sigma}{2c}(x_B+x_A-2x_C)\big),\end{aligned}$$

adódik. Ezt előbbi egyenletünkkel összevetve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\ell^2 - (y_A - y_B)^2 & \\ &= \Big(\frac{2c}{\sigma}\Big)^2 \sinh^2\Big(\frac{\sigma}{2c}(x_A - x_B)\Big)\times \\ &\quad\times\Big(\cosh^2\Big(\frac{\sigma}{2c}(x_B + x_A - 2x_C)\Big) - \sinh^2\Big(\frac{\sigma}{2c}(x_A + x_B - 2x_C)\Big)\Big) \\ &= \Big(\frac{2c}{\sigma}\Big)^2 \sinh^2\Big(\frac{\sigma}{2c}(x_A - x_B)\Big).\end{aligned}$$

Ezt a praktikusabb

$$\frac{\sqrt{\ell^2 - (y_A - y_B)^2}}{(x_B - x_A)} = \frac{\sinh\big(\frac{\sigma}{2c}(x_B - x_A)\big)}{\frac{\sigma}{2c}(x_B - x_A)}$$

formában nézve világos, hogy $\frac{\sigma}{2c}$ meghatározásához a $h\colon t \in (0,\infty) \mapsto \frac{\sinh t}{t}$ függvényt kell invertálnunk. A h invertálható, mert $h(0) = (\sinh t)'|_{t=0} = \cosh(0) = 1$, $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{2t} = \infty$ és $0 = \sinh 0$ valamint $(t)' = 1 \leq \cosh t = \sinh'(t)$ miatt h szigorúan monoton növő.

A h inverzére a $\bar{h}$ jelölést alkalmazva az eddigiek alapján

$$c = \frac{\sigma}{2}\frac{x_B - x_A}{\bar{h}\Big(\frac{\sqrt{\ell^2-(y_A-y_B)^2}}{(x_B-x_A)}\Big)}$$

adódik. A (†) és (‡) összefüggések hányadosából a nyilvánvaló $|y_A - y_B| \leq \ell$ egyenlőtlenség miatt

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} - \frac{c}{\sigma}\operatorname{arctanh}\Big(\frac{y_A - y_B}{\ell}\Big)$$

adódik. A c és az x_C birtokában a minimumhely magasságát

$$y_C = y_B - \frac{2c}{\sigma}\sinh^2\Big(\frac{\sigma}{2c}(x_B - x_C)\Big)$$

adja.

Jegyezzük meg, hogy a két oszlopot egymásfelé kényszerítő c erő értékének és a minimumpont helyének és magasságának meghatározására a gyakorlatban (például a villanyvezetékek belógásának és a villanyoszlopok méreteinek kiszámításához) fenti formuláink helyett közelítő eljárásokat alkalmaznak, melyek Galileit[4)] idézve alapvetően a kötélgörbe parabolával való helyettesítésére épülnek.

4) Galilei azt gondolta, hogy a kötél a parabola alakját veszi fel.

Azt is vegyük észre, hogy bármely két kötélgörbe hasonló, mert az y-tengellyel párhuzamos eltolással mind egy $f(x) = a\cosh((x - x_C)/a)$ alakú függvény grafikonjába vihető, ahonnan egy x-tengellyel párhuzamos x_C/a nagyságú eltolással egy $g_a(x) = a\cosh(x/a)$ alakú függvény grafikonjába kerülnek. Márpedig a $g_1(x) = \cosh(x)$ függvény grafikonjának a-szorosára nagyított/kicsinyített megfelelője éppen g_a grafikonja.

Ezzel megkaptuk a cikk címében feltett kérdésre a választ: *minden kupola hasonló, mert formájukban az egymással hasonló kötélgörbék jelennek meg.*

3. A potenciális energia extrémumai

Ebben a szakaszban igazoljuk, hogy a kötélgörbe minimalizálja a potenciális energiát, vagyis az összes vele azonos hosszúságú és ugyanazon tartópontokon átmenő görbék közül neki van a legalacsonyabban a súlypontja.

Szélsőértékek keresésére a differenciálszámítást szokás alkalmazni, azonban a görbék halmazát nem lehet véges sok paraméterrel leírni, így azt a megoldást választjuk, hogy egyszerre csak egy egyparaméteres függvénycsaládot vizsgálunk, viszont a minimális görbétől „elvárjuk”, hogy bármely ilyen családon belül a mérésünkre nézve minimális legyen. Ez az eljárás a *variációszámítás* legegyszerűbb megjelenési formája, melynek az alábbiakban pontosan kifejtjük a tartalmát.

Egy $\nu\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[x_A,x_B]\to\mathbb{R}$ ($\varepsilon>0$) differenciálható függvényt az $f\colon[x_A,x_B]\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény (fix végpontú) *variálásának* nevezünk, ha $\nu(t,x_A) = f(x_A)$, $\nu(t,x_B) = f(x_B)$ és $\nu(0,x) = f(x)$ minden $x\in[x_A,x_B]$ argumentumra és $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ paraméterre. A $\nu_t\colon[x_A,x_B]\to\mathbb{R}$ ($t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$) függvényeket, ahol $\nu_t(x) = \nu(t,x)$ az f variált függvényeinek nevezzük. (A $\hat\nu_x\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ függvényeket, ahol $\hat\nu_x(t) = \nu(t,x)$ az f transzverzális függvényeinek mondjuk.)

Az alkalmas $g\colon[x_A,x_B]\to\mathbb{R}$ függvények halmazán értelmezett $\mu\colon g\mapsto\mu(g)$ leképezést *mérésnek* nevezzük. Többek között ilyen például a függvény grafikonjának ℓ hossza, vagy a grafikon súlypontjának y-koordinátája.

Már megfogalmazott elvárásunk szerint a minimalitás a variálás választásától független kell legyen, ezért egy f függvényt a μ mérésre nézve akkor nevezünk *extremálisnak*, ha *minden* ν variálására $\mu_\nu'(0) = 0$, ahol $\mu_\nu(t) = \mu(\nu_t)$.

Tétel. *A kétszer differenciálható $f\colon[x_A,x_B]\to\mathbb{R}$ függvény, melynek deriváltja nem azonosan nulla, a vele azonos hosszúságú grafikonokkal rendelkező függvények között akkor és csak akkor extremális a súlypont y-koordinátájára nézve, ha grafikonja kötélgörbe.*

Bizonyítás. Legyen $f\colon[x_A,x_B]\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható. Ennek grafikonja az

$r_f(x) = (x, f(x))$ görbe, melynek hossza

$$\ell(f) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Az r_f görbe $r_f(x)$ pont körüli súlysűrűsége

$$s(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}{2\varepsilon} = \sigma\sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

a W_f súlypont pedig a görbe pontjainak ezen $s(x)$ függvénnyel súlyozott átlaga, vagyis

$$W_f = \frac{1}{\ell(f)}\Big(\int_{x_A}^{x_B} x\sigma\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx, \int_{x_A}^{x_B} f(x)\sigma\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx\Big).$$

Legyen ν az f függvény variálása. Ekkor a variált függvényhez tartozó $(x, \nu_t(x))$ görbe hossza, és súlypontjának magassága a fentiek szerint

$$\ell_\nu(t) = \ell(\nu_t) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (\nu_t'(x))^2}dx,$$
$$\mu_\nu(t) = w_2(\nu_t) = \frac{\sigma}{\ell_\nu(t)} \int_{x_A}^{x_B} \nu(t,x)\sqrt{1 + (\partial_2\nu(t,x))^2}dx,$$

ahol ∂_2 a második változó szerinti (parciális)deriválást jelenti.

Vegyük észre, hogy az azonos hosszúságú görbék között a μ mérésnek és a $\lambda = \mu\ell/\sigma$ mérésnek ha van extrémuma, akkor ugyanazon görbe esetében van, ezért a μ helyett elegendő a λ mérésre megkeresnünk az extremális függvényeket. A fentiekkel összhangban legyen $\lambda_\nu(t) = \mu_\nu(t)\ell_\nu(t)/\sigma$.

Mivel a $\lambda_\nu(t)$ kifejezésében szereplő integrandus folytonosan differenciálható, az integrálás felcserélhető a deriválással, amiért

$$\lambda_\nu'(t) = \int_{x_A}^{x_B} \Big(\partial_1\nu(t,x)\sqrt{1 + (\partial_2\nu(t,x))^2} + \nu(t,x)\frac{\partial_2\nu(t,x)\partial_1\partial_2\nu(t,x)}{\sqrt{1 + (\partial_2\nu(t,x))^2}}\Big)dx,$$

amely a $t = 0$ helyen

$$\lambda_\nu'(0) = \int_{x_A}^{x_B} \Big(\partial_1\nu(0,x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} + f(x)\frac{f'(x)\partial_2\partial_1\nu(0,x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}\Big)dx.$$

A $\lambda'_\nu(0)$ integrandusának második tagját parciálisan integrálva

$$\begin{aligned}
&\int_{x_A}^{x_B} \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\partial_2\partial_1\nu(0,x)dx \\
&= [\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\partial_1\nu(0,x)]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} (\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}})'\partial_1\nu(0,x)dx \\
&= 0 - \int_{x_A}^{x_B} (\frac{(f'(x))^2+f(x)f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} - \frac{f(x)(f'(x))^2f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3})\partial_1\nu(0,x)dx \\
&= -\int_{x_A}^{x_B} \frac{(f'(x))^2(1+(f'(x))^2)+f(x)f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3}\partial_1\nu(0,x)dx
\end{aligned}$$

adódik, amiért

$$\lambda'_\nu(0) = \int_{x_A}^{x_B} \partial_1\nu(0,x)\frac{1+(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3}dx.$$

Ha f olyan, hogy $1+(f'(x))^2-f(x)f''(x)=0$, akkor $\lambda'_\nu(0)=0$ minden ν variálásra.

Ha f olyan, hogy $\lambda'_\nu(0)=0$ minden ν variálásra, akkor a $\nu(t,x)=f(x)+t(x-x_A)(x_B-x)(1+(f'(x))^2-f(x)f''(x))$ variálásra is $\lambda'_\nu(0)=0$, amiből

$$0=\lambda'_\nu(0)=\int_{x_A}^{x_B}(x-x_A)(x_B-x)\frac{(1+(f'(x))^2-f(x)f''(x))^2}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3}dx$$

következik. Mivel ebben az integrandus sehol sem negatív, az integrál csak úgy lehet nulla, ha az integrandus azonosan nulla, tehát $1+(f'(x))^2-f(x)f''(x)=0$.

Eszerint a $\lambda=\mu\ell/\sigma$ mérés, és ezzel együtt az azonos hosszúságú görbék között a súlypontmagasság μ mérésének extremális függvényei is pontosan azok, amelyekre $1+(f'(x))^2-f(x)f''(x)=0$.

Mivel $f'\neq 0$, differenciálegyenletünk ekvivalens a

$$(2\ln f(x))' = 2\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2f'(x)f''(x)}{1+(f'(x))^2} = (\ln(1+(f'(x))^2))'$$

egyenlettel, ami megegyezik az $f^2(x)=a^2(1+(f'(x))^2)$ egyenlettel valamely alkalmas nem nulla a konstansra. Ebből $f(x)=\pm a\sqrt{1+(f'(x))^2}$ következik, ami éppen a $\pm a=\sigma/c$ kötélgörbét meghatározó differenciálegyenlet, aminek egyedüli megoldása $f(x)=\frac{1}{\pm a}\cosh(\pm a(x-x_C))+(y_C-\frac{1}{\pm a})$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

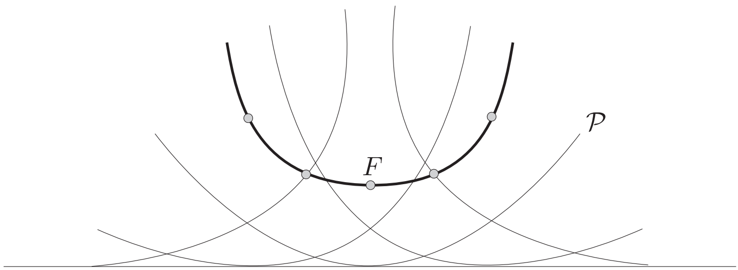
Vegyük észre, hogy az extremalitás görbéi a szó fizikai értelmében csak pozitív a szám esetén kötélgörbék. Ha a negatív szám, akkor igazából „kupolagörbéről” kellene beszélni, és ekkor nem minimalizálódik a potenciális energia, illetve a súlypont magassága, hanem éppenséggel maximalizálódik.

4. Szerkesztés

Világos, hogy a kötélgörbének a szó hagyományos értelmében, tehát körzővel és vonalzóval való szerkeszthetőségére nem számíthatunk, de a kötelek lógatása sem igazán kivitelezhető egy rajzasztalon, ezért a régóta bevált sablonozott vonalzók eszközéhez folyamodunk. Ilyeneket használtak a műszaki rajzolók, amíg a számítógép nem vette át teljesen a rajzolás terhét, és a pontosságát tekintetében is elfogadott eljárás volt, ha az egyik vonalzót vagy sablont a másikhoz igazítva, vagy amellett eltolva, görgetve kellett használni.

A kérdés tehát az, milyen sablonra van szükség a kötélgörbe megrajzolásához, ha megengedjük annak vonalzó melletti görgetését.

Tétel. *Egy $\mathcal{P}$ parabolát valamely e egyenes mentén görgetve a parabola fókusza egy kötélgörbén mozog.*



Bizonyítás. Mivel a parabolák (és persze az egyenesek is) hasonlók egymáshoz, elegendő egyetlen parabola-egyenes pár esetében igazolni az állítást.

Tekintsük az $y = x^2$ egyenletű $\mathcal{P}$ parabolát, melynek fókusza az $F = (0, 1/4)$ pont, vezéregyenese (direktrixe) pedig az $y = -1/4$ egyenes (mert $\sqrt{x^2 + (y - 1/4)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1/4)^2} = x^2 + 1/4 = y + 1/4$), és görgessük e parabolát az x-tengely mentén.

A $\mathcal{P}$ parabola e érintője az $E = (x, x^2)$ érintési pontban $2x$ meredekségű, amiért ezen érintő egységnyi irányvektora $\mathbf{i}_x = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(1, 2x)$, egységnyi normális vektora pedig $\mathbf{n}_{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(-2x, 1)$.

Az e érintő és az $F = (0, 1/4)$ fókusz távolsága megegyezik a $(0, 1/4) - (x, x^2)$ vektornak az érintő $\mathbf{n}_x$ normálisára eső

$$\psi(x) = \langle(-x, 1/4 - x^2), \mathbf{n}_x\rangle = \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{4}$$

vetületével.

Az F fókusz és az E érintési pont távolsága $\tau(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1/4)^2}$.

Az F fókusz e érintőre vett merőleges vetületének $\xi(x)$ távolsága az E érintési ponttól megegyezik a $(0, 1/4) - (x, x^2)$ vektornak az e érintő $\mathbf{i}_x$ irányvektorára vett vetületének hosszával, tehát

$$\xi(x) = \Big\langle(-x, 1/4 - x^2), \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}(1, 2x)\Big\rangle = \frac{2x\sqrt{1 + 4x^2}}{4}.$$

A $\mathcal{P}$ parabola $O = (0, 0)$ és $E = (x, x^2)$ pontjai között

$$\sigma(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (2t)^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2x} \sqrt{1 + z^2}\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arcsinh}(2x)} \cosh^2 t\, dt$$

a hossza. Ezen integrál kiszámításához figyeljük meg, hogy

$$\frac{1}{2}\int_0^b \cosh^2 t dt + \frac{1}{2}\int_0^b \sinh^2 t dt = \frac{1}{4}[\sinh(2t)]_0^b,$$
$$\frac{1}{2}\int_0^b \cosh^2 t dt - \frac{1}{2}\int_0^b \sinh^2 t dt = \frac{1}{2}[t]_0^b,$$

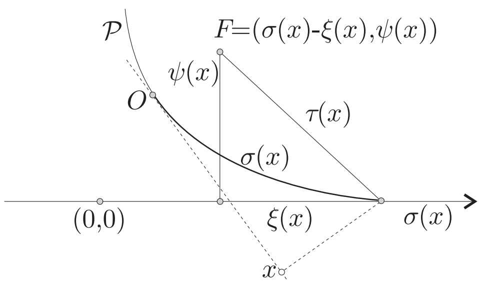
amiért

$$\int_0^b \cosh^2 t\, dt = \frac{1}{2}[t + \sinh t \cosh t]_0^b = \frac{b + \sinh b \cosh b}{2},$$

és így

$$\sigma(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arcsinh}(2x)} \cosh^2 t\, dt = \frac{\operatorname{arcsinh}(2x) + 2x\sqrt{1 + 4x^2}}{4}.$$

A $\mathcal{P}$ parabolát $\sigma(x)$ hosszan görgetve, az $E = (x, x^2)$ pont az x-tengelyre kerül, az x-tengely pedig az elgörgetett parabolának érintője lesz.



Az F fókusz ezért a görgetés közben úgy halad a görgetés irányába, hogy x-koordinátája $\sigma(x) - \xi(x)$ távolságot tesz meg, az x-tengelytől való távolsága pedig $\psi(x)$ lesz. Az F fókusz által súrolt görbe tehát annak az f függvénynek a grafikonja, melyre $\psi(x) = f(\sigma(x) - \xi(x))$, amiért

$$\frac{\sqrt{1+4x^2}}{4} = f\Big(\frac{\operatorname{arcsinh}(2x)}{4}\Big), \quad \text{vagyis} \quad f(x) = \frac{\cosh(4x)}{4}.$$

Ez bizonyítja az állítást. ∎

Függelék: hiperbolikus függvények

A valós számok halmazán értelmezett

$\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (szinusz-hiperbolikusz),

$\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (koszinusz-hiperbolikusz), és

$\tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ (tangens-hiperbolikusz)

függvényeket *hiperbolikus függvényeknek* nevezzük.

A definíciók alapján egyszerű számolással igazolhatók a

- $\cosh x = \cosh(-x)$, $\sinh x = -\sinh(-x)$ és $\tanh x = -\tanh(-x)$,
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

formulák, valamint a hiperbolikus addíciós képleteknek nevezett

- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$,
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$,
- $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$,

azonosságok. Utóbbiak felhasználásával adódnak a speciális

- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ és $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$,
- $\cosh^2(x/2) = (\cosh x + 1)/2$ és $\sinh^2(x/2) = (\cosh x - 1)/2$

egyenlőségek, amelyekből könnyen beláthatók a cikkben is használt

- $\cosh x = 1 + 2\sinh^2(x/2)$,
- $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\big(\frac{x+y}{2}\big)\sinh\big(\frac{x-y}{2}\big)$,
- $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\big(\frac{x+y}{2}\big)\cosh\big(\frac{x-y}{2}\big)$,
- $\sinh x - \sinh y = 2\cosh\big(\frac{x+y}{2}\big)\sinh\big(\frac{x-y}{2}\big)$,
- $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\big(\frac{x+y}{2}\big)\cosh\big(\frac{x-y}{2}\big)$

azonosságok.

Újra a definíciót használva könnyű számolás adja, hogy

- $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$ és $\tanh' x = 1 - \tanh^2 x$.

Fentiek alapján $\cosh'' x = \cosh x \geq 1$, amiért a cosh függvény alulról szigorúan konvex. A $\cosh' x = \sinh x$ miatt ugyanakkor a cosh függvény a negatív számok halmazán szigorúan monoton fogyó, a pozitív számok halmazán szigorúan monoton növő. A cosh függvény egyetlen minimumhelye a 0, $\cosh 0 = 1$ és $\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = \infty$.

Mivel $\sinh' x = \cosh x \geq 1$, a sinh függvény szigorúan monoton növő a teljes számegyenesen. Minthogy $\sinh'' x = \sinh x$, a sinh függvény a negatív számok halmazán alulról szigorúan konkáv, a pozitív számok halmazán pedig alulról szigorúan konvex. A sinh függvénynek nincs szélsőértéke, egyetlen inflexiós pontja a 0, $\sinh 0 = 0$ és $\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty$.

Mivel $\tanh' x = 1/\cosh^2 x \geq 0$, a tanh függvény szigorúan monoton növő a teljes számegyenesen. Minthogy $\tanh'' x = -2\cosh^{-3} x \sinh x$, a tanh függvény a negatív számok halmazán alulról szigorúan konvex, a pozitív számok halmazán pedig alulról szigorúan konkáv. A tanh függvénynek nincs szélsőértéke, egyetlen inflexiós pontja a 0, $\tanh 0 = 0$ és $\lim_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1$.

A cosh, sinh és tanh hiperbolikus függények inverzfüggvényeit a szögfüggvényeknél megszokott módon $\operatorname{arccosh}\colon (1,\infty) \to (0,\infty)$, $\operatorname{arcsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ illetve $\operatorname{arctanh}\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ jelöli.

Irodalomjegyzék

[1] H. S. M. Coxeter, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
[2] Kurusa Á., *Differenciálgeometria*, Polygon, Szeged, 1996.
[3] Pahio, Catenary, *PlanetMath*,
http://planetmath.org/encyclopedia/ChainCurve.html.

Kurusa Árpád, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
kurusa@math.u-szeged.hu