

EGY ÖTLET

Egy meglepetés

PINTÉR LAJOS

A parciális integrálás nem tartozik a „súlyos” problémák közé, mégis tartogat meglepetéseket. Most egy ilyen érdekességről lesz szó. Példákat mutatunk.

$$\int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - e^x + 1.$$

Mi történik, ha fordítva, t -t integráljuk és az e^t -t differenciáljuk?

$$\begin{aligned} \int_0^x te^t dt &= \left[\frac{t^2}{2} e^t \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2} e^t dt \\ &= \frac{x^2}{2} e^x - \left[\frac{t^3}{3!} e^t \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^3}{3!} e^t dt \\ &= \frac{x^2}{2} e^x - \frac{x^3}{3!} e^x + \left[\frac{t^4}{4!} e^t \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^4}{4!} e^t dt \\ &= \frac{x^2}{2} e^x - \frac{x^3}{3!} e^x + \frac{x^4}{4!} e^x - \left[\frac{t^5}{5!} e^t \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^5}{5!} e^t dt. \end{aligned}$$

Folytatjuk, míg az integrál „el nem tűnik”. Végül a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \int_0^x te^t dt &= e^x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots \right) \\ &= e^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) - e^x + xe^x \\ &= e^x e^{-x} - e^x + xe^x = xe^x - e^x + 1. \end{aligned}$$

Ugyanazt kaptuk, mint az előző estben. Jó ez? Elfogadjuk?

Egy másik példa.

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \int_0^x \cos t dt = [t \cos t]_0^x - \int_0^x t(-\sin t) dt \\
 &= x \cos x - \left[\frac{t^2}{2} (-\sin t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^2}{2} (-\cos t) dt \\
 &= x \cos x + \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{x^3}{3!} \cos x - \left[\frac{t^4}{4!} \sin t \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^4}{4!} \cos t dt \\
 &= x \cos x + \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{x^3}{3!} \cos x - \frac{x^4}{4!} \sin x + \left[\frac{t^5}{5!} \cos t \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^5}{5!} (-\sin t) dt.
 \end{aligned}$$

Folytatjuk, míg az integrál „eltűnik”. Ekkor lesz

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \cos x + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \sin x \\
 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \cos x + \left(-1 + \frac{x^2}{2} - \dots \right) \sin x + \sin x.
 \end{aligned}$$

Azaz

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \cos x + \left(-1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \sin x = 0.$$

Az

$$A = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{és a} \quad B = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

jelölésekkel

$$A \cos x - B \sin x = 0.$$

Ugyanígy módon

$$\begin{aligned}
 1 - \cos x &= \int_0^x \sin t dt = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \sin x + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \cos x \\
 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \sin x + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \cos x - \cos x.
 \end{aligned}$$

A bevezetett jelölésekkel

$$A \sin x + B \cos x = 1.$$

Az A és B -re egy kétismeretlenes egyenletrendszert kaptunk:

$$A \cos x - B \sin x = 0,$$

$$A \sin x + B \cos x = 1.$$

Ezekből $A = \sin x$, $B = \cos x$. Másrészt

$$A = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{és} \quad B = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

Igy tehát

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots.\end{aligned}$$

A $\sin$ és $\cos$ függvény hatványsorát kaptuk. Jó ez? Elfogadjuk?

Mindkét esetben arról volt szó, hogy „folytatjuk, míg az integrál el nem tűnik”. De eltűnik? Nézzük általánosan. $g^{(n)}$ jelentse a g függvény n -edik deriváltját, $f^{-(n)}$ pedig az f függvény n -edik antideriváltját. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)dt &= [f^{-1}(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f^{-1}(t)g'(t)dt \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{-(k+1)}(t)g^{(k)}(t) \right]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{-(n)}(t)g^{(n)}(t)dt.\end{aligned}$$

Tekintsük most a következő becslést:

$$\left| \int_a^b f^{-(n)}(t)g^{(n)}(t)dt \right| \leq (b-a) \sup \left\{ |f^{-(n)}(t)g^{(n)}(t)| : a \leq t \leq b \right\}.$$

Ha itt

$$\sup \left\{ |f^{-(n)}(t)g^{(n)}(t)| : a \leq t \leq b \right\} \rightarrow 0,$$

ha $n \rightarrow \infty$, akkor előbbi példánk eredménye jogos. Az első példában a

$$\sup \left\{ \frac{t^n}{n!} e^t; \quad 0 \leq t \leq x \right\}$$

kifejezést kell vizsgálni. Tudjuk, hogy

$$\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty,$$

minden a esetén. Ezért

$$\frac{x^n}{n!} e^x \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty.$$

A második példa igazságának eldöntését az olvasóra bízunk, helyette egy harmadik példát csinálunk. A részletes számolást kissé rövidítjük.

$$\begin{aligned}
 \pi &= 4 \arctan 1 = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{i} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right) dx \\
 &= \frac{2}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\left(\frac{1}{1-i} \right)^k - \left(\frac{1}{1+i} \right)^k \right) \\
 &= \frac{2}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+i)^k - (1-i)^k}{2^k k} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k (e^{\frac{k\pi i}{4}} - e^{-\frac{k\pi i}{4}})}{2^k k 2i} \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k}{4}}{2^{\frac{k}{2}} k} = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3} - \frac{1}{2^3 \cdot 5} - \dots \right).
 \end{aligned}$$

Talán érdemes megemlíteni, hogy ha

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{i} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right) dx$$

egyenlőségben csak az egyik tagot tekintjük, akkor

$$\sup \left\{ f^{-(n)}(x) g^{(n)}(x) : 0 \leq x \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{x^n}{n!} \frac{n!}{(x+a)^{n+1}} \right| ; 0 \leq x \leq 1 \right\}$$

(Itt $a = \pm i$.)

$$\frac{x^n}{(x+a)^{n+1}} \rightarrow 0$$

ha $n \rightarrow \infty$, hisz $\left| \frac{x}{x+a} \right| < 1$.

Persze lehet, hogy az előbbi sup-pal „baj van”. Tekintsük a következő példát.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx &= [e^x \sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos 2x dx \\
 &= e^{\frac{\pi}{4}} - 2[e^x \cos 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx,
 \end{aligned}$$

ebből

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5} (e^{\frac{\pi}{4}} + 2).$$

Most folytassuk a másik irányban:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx &= e^{\frac{\pi}{4}} + 2 - 4[e^x \sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} + 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx \\
 &= e^{\frac{\pi}{4}} + 2 - 4e^{\frac{\pi}{4}} + 8[e^x \cos 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} + 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx \\
 &= e^{\frac{\pi}{4}} + 2 - 4(e^{\frac{\pi}{4}} + 2) + 15[e^x \sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} - 32 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos 2x dx \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Most a megfelelő supremum:

$$\sup \{e^x 2^n \sin, \text{ vagy } \cos 2x : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\}$$

és ez nem tart 0-hoz $n \rightarrow \infty$ esetén.

Érdekes megjegyezni, hogy ahogyan láttuk:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5} (e^{\frac{\pi}{4}} + 2).$$

A másik oldalról tovább folytatva megjelenik a

$$(e^{\frac{\pi}{4}} + 2) - 2^2 (e^{\frac{\pi}{4}} + 2) + 2^4 (e^{\frac{\pi}{4}} + 2) - \dots$$

sor is. Itt pedig az

$$1 - 2^2 + 2^4 - \dots$$

sor ugyan nem konvergens, de (-2) kvóciensű geometriai sor. Ha erre alkalmazzuk az összegformulát (az $|x| < 1$ -gyel nem törődve), akkor

$$1 - 2^2 + 2^4 - \dots = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}.$$

Éppen azt az $\frac{1}{5}$ -öt kaptuk, mint a másik eljárásnál.

Befejezésül egy példa, amelyben egy nagyon „csúnya” dolog van, de az eredmény nagyon „szép”.

$$\begin{aligned}
 \pi &= 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1+x} \sqrt{1-x} dx \\
 &= 4 \left[-\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1} (2n-3)!!}{2^n (1+x)^{\frac{2n+1}{2}}} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} (1-x)^{\frac{2n+1}{3}}}{(2n+3)!!} \right]_0^1 \\
 &= 4 \left[-\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-x)^{\frac{2n+3}{2}}}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)(1+x)^{\frac{2n-1}{2}}} \right]_0^1 \\
 &= \frac{8}{3} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)}.
 \end{aligned}$$

A „csúnya” dolog a harmadik lépés, ahol csak felírtuk az egyenlőséget, azt kiszámolni hosszú volna (de igaz). Talán érdemes még megemlíteni, hogy

$$\begin{aligned}\pi &= 8 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 3} - \frac{1}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} - \dots \right) \\ &\approx 8 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 3} - \frac{1}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \right) = 3,124 \dots\end{aligned}$$

Ez a sor (ahogyan az sejthető) tényleg elég gyorsan konvergál.

Pintér Lajos, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi Vértanúk tere 1, e-mail: pinter@math.u-szeged.hu