

Lebesgue-integrál és teljesség

PETER D. LAX

A Lebesgue-integrál elméletét az integrálható függvények osztályának bővítéseként szokás tanítani. A Riesz–Fischer-tétel, amely az L^p -terek teljességét állítja, egy következmény.

Modern szemszögből nézve az elmélet célja az, hogy teljes függvényttereket konstruáljunk, mivel a funkcionálanalízis alaptételeihez szükség van a teljességre. A következő oldalakon azt mutatom meg, hogy hogyan építhető fel a Lebesgue integrál a kívánt objektumból, az L^1 térből kiindulva, ami nem más mint az $\mathbb{R}^n$ valamely zárt hiperkockáján értelmezett folytonos függvények terének teljes burka az L^1 normában. Ezután leírom, hogy hogyan lehet egyszerű módon hozzárendelni L^1 bármely f eleméhez egy $f(x)$ majdnem mindenhol értelmezett függvényt, majd igazolom a Lebesgue integrálható függvényekkel kapcsolatos alaptételeket.

A mi felépítésünkben a Lebesgue-mérték másodlagos fogalom. Egy S halmaz mérhető, ha karakterisztikus függvénye L^1 -ben van. Mértéke, definíció szerint, a karakterisztikus függvényének integrálja. Egy ilyen felépítés nyilvánvalóan nem a valószínűségszámítással foglalkozók szája íze szerint való; a szerintük kívánatos objektum a mérhető halmazok σ -algebrája.

1. Jelölje K az $\mathbb{R}^n$ tér valamely zárt *hiperkockáját*; legyenek $c(x), d(x), \dots$ folytonos függvények a K halmazon. $I(c)$ jelöli a c függvény Riemann-integrálját a K halmazon:

$$(1) \qquad I(c) = \int_K c(x) \, dx.$$

A G nyílt halmaz¹ $V(G)$ térfogatát a következőképpen definiáljuk:

¹ Itt és az egész dolgozatban „nyílt halmaz” K -ra nézve értendő, azaz $G \subseteq K$ nyílt, ha van olyan G^* halmaz, amely nyílt $\mathbb{R}^n$ -ben és $G = G^* \cap K$.

Definíció. Adott G nyílt halmaz esetén a c folytonos függvény *megengedett* G -re nézve, ha

$$(2) \quad c(x) \leq \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in G, \\ 0, & \text{ha } x \notin G. \end{cases}$$

A G nyílt halmaz esetén a $V(G)$ térfogatot a következő módon definiáljuk:

$$(3) \quad V(G) = \sup I(c), \text{ } c \text{ megengedett } G\text{-re nézve.}$$

1. Tétel. V megszámlálhatóan szubadditív:

$$(4) \quad V(\cup G_n) \leq \sum V(G_n),$$

és itt egyenlőség teljesül, amennyiben a G_n halmazok páronként diszjunktak.

Ennek az eredménynek egy bizonyítását a Függelékben adjuk meg.

A következő becslés a Csebisev-egyenlőtlenség egy változata:

2. Tétel. Legyen d nemnegatív folytonos függvény; jelölje G_a azon pontok halmazát, amelyekre $d(x) > a$. Ekkor

$$(5) \quad V(G_a) \leq I(d)/a.$$

Bizonyítás. Tetszőleges G_a -ra nézve megengedett c_a függvényre

$$(6) \quad c_a(x) \leq d(x)/a.$$

Ugyanis (6) teljesül minden $x \in G_a$ pontban; és mivel d nemnegatív, ezért teljesül minden $x \notin G_a$ pontban is. (6) integrálásával kapjuk, hogy

$$I(c_a) \leq I(d)/a.$$

Mivel $I(c_a)$ szuprémuma $V(G_a)$, ezért kapjuk az (5) egyenlőtlenséget. ■

Definíció. Egy ponthalmazt *elhanyagolhatónak* nevezünk, ha lefedhető tetszőlegesen kis térfogatú nyílt halmazzal.

Az 1. Tételből következik, hogy megszámlálható sok elhanyagolható halmaz egyesítése elhanyagolható. A szokásos szóhasználatot követve „majdnem mindenhol”, rövidítve m. m. azt jelenti, hogy „egy elhanyagolható halmaztól eltekintve mindenhol”.

2. Jelölje $C = C(K)$ a K halmazon értelmezett folytonos függvények halmazát. C vektortér, amely a

$$(7) \quad |c|_L = I(|c|)$$

L -normával normált lineáris tér.

Definíció. Legyen L a C tér teljes burka az L -normában².

Az $f \in L$ elemek folytonos függvények $\{c_n\}$ Cauchy-sorozatainak ekvivalencia-osztályai. Ha $\{c_n\}$ az f egy eleme, azt mondjuk, hogy $\{c_n\}$ konvergál f -hez, és hogy f a $\{c_n\}$ határértéke. L normált lineáris tér;

$$I(f) = \lim I(c_n)$$

lineáris funkcionál L -en, amelynek $|f|_L$ korlátja.

Most megmutatjuk, hogy hogyan lehet tetszőleges $f \in L$ elemhez $f(x)$ értékeket rendelni, x -ek egy elhanyagolható halmazától eltekintve.

Definíció. A K halmazon majdnem mindenhol definiált $f(x)$ függvény *realizációja* az $f \in L$ elemnek, ha az f -et megadó ekvivalencia-osztályában létezik olyan $\{c_n\}$ Cauchy-sorozat, amely majdnem mindenhol konvergál $f(x)$ -hez:

$$\lim c_n(x) = f(x) \text{ m.m.}$$

3. Tétel. (i) *Bármely $f \in L$ -nek létezik realizációja.*

(ii) *f bármely két realizációja majdnem mindenhol egyenlő.*

(iii) *Ha $f, g \in L$ nem egyenlők, akkor bármely $f(x)$ és $g(x)$ realizációjuk nem egyenlő egy olyan halmazon, amely nem elhanyagolható.*

Bizonyítás. Azt mondjuk, hogy a folytonos függvényekből álló $\{c_n\}$ sorozat *gyorsan konvergál*, ha létezik olyan k konstans, amelyre

$$(8) \quad |c_n - c_{n+1}|_L < k/n^4$$

teljesül bármely n esetén. Ha még $\{c_n\}$ az f ekvivalencia-osztályba tartozik, akkor azt is mondjuk, hogy $\{c_n\}$ gyorsan konvergál f -hez.

Könnyű megmutatni, és az olvasóra bízunk az igazolását, hogy bármely Cauchy-sorozatnak létezik gyorsan konvergáló részsorozata. ■

² Ennek konstrukciója a következő. Az L -norma megad egy metrikát $C(K)$ -n: $\varrho(c, d) = |c - d|_L$. Erre a metrikára nézve egy $\{c_n\} \subseteq C(K)$ sorozat Cauchy-sorozat, ha $|c_n - c_m| \rightarrow 0$ ha $n, m \rightarrow \infty$. Két $\{c_n\}$ és $\{d_n\}$ Cauchy-sorozatot ekvivalensnek nevezünk, ha fésűs egyesítésük is Cauchy-sorozat. Mármost az L teljes burok ezen Cauchy-sorozatok ekvivalencia-osztályából áll: a $\{c_n\}$ sorozat f ekvivalencia-osztályának normája legyen $|f|_L = \lim_n |c_n|_L$. Megmutatható, hogy a műveleteket értelemszerűen definiálva L normált lineáris tér, amely teljes a norma által indukált metrikára, azaz ha $\{f_n\} \subseteq L$ Cauchy-sorozat ($|f_n - f_m|_L \rightarrow 0$ ha $n, m \rightarrow \infty$), akkor van olyan $f \in L$, hogy $|f_n - f|_L \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$. Az alábbiak megértését lényegesen megkönnyíti, ha mindig szem előtt tartjuk, hogy minden $f \in L$ elem Cauchy-sorozatok ekvivalencia-osztálya. Persze $c \in C(K)$ esetén a $c_n = c$ Cauchy-sorozat ekvivalencia-osztályát továbbra is c -vel jelöljük, azaz $C(K) \subseteq L$ ebben az értelemben.

4. Lemma. (i) *Folytonos függvények gyorsan konvergáló $\{c_n(x)\}$ sorozata majdnem mindenhol konvergens.*

(ii) *Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, bármely gyorsan konvergáló sorozat egyenletesen konvergál kivéve x -ek egy olyan halmazát, amely benne van egy ε -nál kisebb térfogatú nyílt halmazban.*

Bizonyítás. Jelölje D_n azoknak az x -eknek a halmazát, amelyekre

$$(9) \quad |c_n(x) - c_{n+1}(x)| > 1/n^2.$$

A 2. Tétel és (8) felhasználásával

$$(10) \quad V(D_n) \leq |c_n - c_{n+1}|_L / (1/n^2) < k/n^2.$$

Válasszunk egy tetszőleges N természetes számot; tegyük fel, hogy x nincs benne a $D_N \cup D_{N+1} \cup \dots$ halmazban. Ekkor

$$(*) \quad |c_m(x) - c_{m+1}(x)| < 1/m^2$$

amennyiben $m > N$, ezért a

$$c_n(x) = c_0(x) + \sum_1^n [c_m(x) - c_{m-1}(x)]$$

sorozat konvergál. Mivel a térfogat megszámlálhatóan szubadditív, ezért

$$V(D_{N+1} \cup D_{N+2} \cup \dots) \leq \sum_{N+1}^{\infty} V(D_n);$$

(10) alapján ez az összeg kisebb mint

$$(11) \quad \sum_{N+1}^{\infty} k/n^2 < k/N.$$

Ez azt mutatja, hogy azoknak az x -eknek a halmaza, amelyekre $\{c_n(x)\}$ nem konvergál lefedhető egy nyílt halmazzal, amelynek térfogata kisebb mint k/N . Ha N tart a végtelenbe, akkor k/N tart a nullához; ezért ez a halmaz elhanyagolható. Ezzel beláttuk a 4. Lemma (i) részét; a (ii) rész következik (11)-ből és $(*)$ -ból. ■

Mivel bármely Cauchy-sorozatnak létezik gyorsan konvergáló részsorozata, ezért a 4. Lemmával együtt a 3. Tétel (i) részét is beláttuk.

Tegyük fel, hogy $\{c_n\}$ és $\{d_n\}$ m.m. konvergens Cauchy-sorozatok az f ekvivalencia-osztályban. Ekkor választhatunk egy gyorsan konvergáló sorozatot, amely végtelen sok elemét tartalmazza $\{c_n\}$ -nek és $\{d_n\}$ -nek is. Ez azt mutatja, hogy $f(x)$ két realizációja legfeljebb egy elhanyagolható halmazon különbözik. Ezzel beláttuk a 3. Tétel (ii) részét.

A (iii) rész bizonyítását a 4. részre halasztjuk.

Megjegyzés. A gyors konvergencia (8) definíciójában k/n^4 helyett ε_n^2 is vehető, ahol $\varepsilon_n > 0$ és $\sum \varepsilon_n$ konvergál.

Megjegyzés. A cikk hátralévő részében $f(x)$ az f tetszőleges L -beli realizációját jelöli.

5. Tétel. (i) Ha $f(x)$ egy realizációja f -nek, akkor bármely a szám esetén $af(x)$ egy realizációja af -nek.

(ii) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ m.m. bármely $f, g \in L$ esetén.

(iii) Ha egy $\{f_n\}$ sorozat normában konvergál f -hez L -ben, és $\lim f_n(x)$ létezik m.m., akkor

$$(12) \quad \lim f_n(x) = f(x) \text{ m.m.}$$

Bizonyítás. Az (i) rész nyilvánvaló. (ii) igazolásához jegyezzük meg, hogy ha $\{c_n\}$ gyorsan konvergál f -hez és $\{d_n\}$ gyorsan konvergál g -hez, akkor $\{c_n + d_n\}$ gyorsan konvergál $(f + g)$ -hez.

(iii) a következő eredménnyen alapul:

6. Tétel. Legyen $\{g_n\}$ L -beli elemek egy sorozata, amely gyorsan konvergál a következő értelemben:

$$(13) \quad |g_n - g_{n+1}|_L < 1/n^4.$$

Mivel L teljes, ezért $\{g_n\}$ tart egy g határértékhez L -ben: $\lim |g - g_n|_L = 0$. Ekkor $\{g_n(x)\}$ pontonként konvergens:

$$(14) \quad \lim g_n(x) = g(x) \text{ m.m.}$$

Bizonyítás. A 4. Lemma (ii) része alapján mindegyik g_n közelíthető egy c_n folytonos függvénnyel úgy, hogy

$$(13)' \quad |g_n - c_n|_L < 1/n^4$$

és

$$(15) \quad |g_n(x) - c_n(x)| < 1/n,$$

kivéve egy $1/n^2$ -nél kisebb térfogatú nyílt halmaz pontjait. (13) és (13)'-ből következik, hogy $\{c_n\}$ gyorsan konvergál g -hez. Ezért, a 4. Lemma (i) és 3. Tétel (ii) alapján

$$(16) \quad \lim c_n(x) = g(x) \text{ m.m.}$$

(15) és (16) alapján (14) következik. ■

Mi marad hátra? A Lebesgue elmélet egy alapvető eredmény a Domináns Konvergencia Kritérium:

7. Tétel. Legyen $\{f_n\}$ L -beli elemek egy sorozata amelyre

- (i) $f_n(x)$ m.m. konvergens.
- (ii) Létezik L -nek olyan g eleme, amelyre bármely n esetén

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ m.m.}$$

Ekkor az $\{f_n\}$ sorozat normában konvergál L -ben valamely f határértékhez és

$$f(x) = \lim f_n(x) \text{ m.m.}$$

Mi a helyzet a Lebesgue mértékkel?

Definíció. A K halmaz egy S részhalmaza mérhető, ha létezik olyan f_S elem L -ben, amelyre majdnem minden x esetén

$$f_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in S, \\ 0, & \text{ha } x \notin S. \end{cases}$$

A 3. Tétel alapján legfeljebb egy ilyen f_S létezik. Az S halmaz $m(S)$ mértékét a következőképpen definiáljuk:

$$(17) \quad m(S) = I(f_S).$$

Ha N elhanyagolható halmaz, akkor $f_N = 0$ választható; ezért $m(N) = 0$.

Meg kell mutatnunk, hogy az így definiált mérték rendelkezik a szokásos tulajdonságokkal.

8. Tétel. (i) Bármely G nyílt halmaz mérhető és

$$m(G) = V(G).$$

(ii) Bármely S mérhető halmazra $m(S) = \inf V(G)$, $G \supset S$.

(iii) Bármely $f \in L$ és bármely a szám esetén azon x -ek halmaza, amelyekre $f(x) < a$ mérhető.

(iv) A mérhető halmazok σ -algebrát alkotnak.

(v) Bármely $f \in L$ esetén

$$(18) \quad I(f) = \int v \, dF(v),$$

ahol

$$F(v) = m(\{x | f(x) < v\}).$$

A 7. Tétel bizonyítása a 4. részben, míg a 8. Tételé az 5. részben szerepel. A 3. részben egy függvénykalkulust adunk meg, amelyre szükségünk lesz majd ezekben a bizonyításokban.

A Lebesgue-elmélet egy másik fontos eredménye, a Fubini Tétel, belátható ennek a cikknek a keretei között.

3. A függvénykalkulus a következő megfigyelésen alapul:

9. Tétel. Legyen $\varphi(s)$ egyváltozós Lipschitz folytonos függvény, amelyre bármely s és t esetén teljesül

$$(19) \quad |\varphi(s) - \varphi(t)| \leq k|s - t|.$$

Bármely $f \in L$ elemre definiálható egy $\varphi(f) \in L$ elem a következő tulajdonságokkal:

$$(20) \quad (i) \quad |\varphi(f) - \varphi(g)|_L \leq k|f - g|_L.$$

$$(ii) \quad \varphi(f)(x) = \varphi(f(x)) \text{ m.m.}$$

Bizonyítás. Bármely két folytonos c, d függvényre és bármely x pontra

$$(20)' \quad |\varphi(c(x)) - \varphi(d(x))| \leq k|c(x) - d(x)|.$$

Integráljuk mindkét oldalt a K halmazon; azt kapjuk, hogy

$$(20)'' \quad |\varphi(c) - \varphi(d)|_L \leq k|c - d|_L.$$

(20)''-ből következik, hogy ha $\{c_n\}$ Cauchy-sorozat, akkor $\{\varphi(c_n)\}$ is az.

Definíció. Legyen $\{c_n\}$ egy Cauchy-sorozat, amely tart f -hez. Ekkor legyen $\varphi(f)$ a $\{\varphi(c_n)\}$ sorozat határértéke.

(20)''-ből következik, hogy nem számít, hogy melyik Cauchy-sorozatot választjuk.

Legyen $\{d_n\}$ egy Cauchy-sorozat, amely tart g -hez. Ekkor $\{\varphi(d_n)\}$ tart $\varphi(g)$ -hez. Mivel

$$|\varphi(f) - \varphi(g)|_L = \lim |\varphi(c_n) - \varphi(d_n)|_L,$$

ezért (20) következik (20)'-ből.

(20)'-ből következik, hogy ha $\{c_n\}$ gyorsan konvergáló Cauchy-sorozat, akkor $\{\varphi(c_n)\}$ is az. Ezzel beláttuk (ii)-t. ■

A $\varphi_+(s) = \max(s, 0)$ és $\varphi_-(s) = \min(s, 0)$ függvények különösen hasznosak.

Definíció. $f_+ = \varphi_+(f)$, $f_- = \varphi_-(f)$.

Az f_+ és f_- elemeket az f pozitív és negatív részének nevezzük. Mivel $\varphi_+(c) + \varphi_-(c) = c$ és $\varphi_+(c) - \varphi_-(c) = |c|$, ezért

$$(21) \quad f = f_+ + f_-, \quad |f|_L = I(f_+) - I(f_-).$$

Definíció. f pozitív, ha $f = f_+$ és negatív, ha $f = f_-$.

Definíció. $f \leq g$, ha $g - f$ pozitív.

Összegezzük az L pozitív elemeinek néhány tulajdonságát:

10. Tétel. (i) Két pozitív elem összege pozitív.

(ii) Ha f pozitív, akkor $f(x) \geq 0$ m.m.

(iii) Ha f pozitív, akkor $|f|_L = I(f)$.

Bizonyítás. Mivel f akkor és csak akkor pozitív, ha határértéke egy pozitív folytonos függvényekből álló Cauchy-sorozatnak, ezért (i) és (ii) könnyen következik; (iii) következik (21)-ből. ■

Hasonló állítások teljesülnek L negatív elemeire is.

Ugyanilyen hasznos a következő függvény is:

$$\varphi_a(s) = \begin{cases} -a, & \text{ha } s \leq -a, \\ s, & \text{ha } -a < s < a, \\ a, & \text{ha } a \leq s. \end{cases}$$

Definíció. Jelölje f_a a $\varphi_a(f)$ függvényt. Az $f \in L$ elem korlátos, ha $f = f_a$ valamely a számra.

Világos, hogy f akkor és csak akkor korlátos, ha a határértéke egyenletes korlátos folytonos függvényekből álló Cauchy-sorozatnak:

$$|c_n(x)| \leq a.$$

Jelöljön f egy korlátos függvényt. Nem nehéz megmutatni, hogy létezik egy *legkisebb* a szám, amelyre $f = f_a$; ezt az a számot az f szuprénum normájának nevezzük és így jelöljük: $|f|_{\text{sup}}$.

11. Tétel. Bármely $f \in L$ elemre

$$\lim f_a = f, \text{ ha } a \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy c folytonos függvény, amelyre

$$(22) \quad |f - c|_L < \varepsilon.$$

A 9. Tétel (i) részéből, a $k = 1$ választással, következik, hogy bármely $g \in L$ esetén

$$|f_a - g_a|_L \leq |f - g|_L.$$

Ezért (22)-ből következik, hogy

$$|f_a - c_a|_L \leq \varepsilon.$$

Mivel $c(x)$ folytonos függvény a K kompakt halmazon, ezért korlátos. Így $c_a = c$ elég nagy a esetén, és ezért ilyen a -ra

$$(22)' \quad |f_a - c|_L < \varepsilon.$$

(22) és (22)' összevetésével kapjuk, hogy elég nagy a -ra

$$|f - f_a|_L = |f - c + c - f_a|_L \leq |f - c|_L + |c - f_a|_L < 2\varepsilon.$$

■

12. Tétel. Legyen f egy korlátos eleme L -nek. Ekkor az fg szorzat bármely $g \in L$ elemre definiálható úgy, hogy teljesüljenek a következő tulajdonságok:

- (i) $f(g + h) = fg + fh$ bármely $g, h \in L$ elemekre.
- (ii) $(fg)(x) = f(x)g(x)$ m.m.
- (iii) $|fg|_L \leq |f|_{\sup}|g|_L$.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy ha f és g mindketten korlátosak, akkor a szorzatuk definiálható. Valóban, legyenek $\{c_n\}$ ill. $\{d_n\}$ egyenletesen korlátos folytonos függvények Cauchy-sorozatai amelyek konvergálnak f -hez ill. g -hez. A $\{c_n d_n\}$ szorzat szintén Cauchy-sorozat; ez látható az alábbi felbontásból:

$$c_n d_n - c_m d_m = (c_n - c_m) d_n + c_m (d_n - d_m).$$

Az fg szorzat legyen egyenlő a $\{c_n d_n\}$ sorozat határértékével. Világos, hogy ez a határérték nem függ a sorozatok választásától.

Az (i) tulajdonság közvetlenül következik fg konstrukciójából. A (iii) tulajdonság abból a megfigyelésből következik, hogy folytonos függvényekre

$$|c_n d_n|_L \leq |c_n|_{\sup} |d_n|_L.$$

(ii) bizonyításához válasszunk gyorsan konvergáló $\{c_n\}$ és $\{d_n\}$ sorozatokat, és figyeljük meg, hogy $\{c_n d_n\}$ szintén gyorsan konvergál.

Az fg szorzat definíciójának kiterjesztéséhez tetszőleges $g \in L$ elemre közelítjük g -t. A 11. Tétel szerint g_a tart g -hez az L -normában. Mivel (iii) teljesül korlátos g -re, ezért

$$|f(g_a - g_b)|_L \leq |f|_{\sup} |g_a - g_b|_L.$$

Mivel g_a tart g -hez az L -normában, ezért fg_a konvergál az L -normában egy határértékhez; nevezzük ezt fg -nek.

Az fg szorzat (i) és (iii) tulajdonságai következnek fg megfelelő tulajdonságaiából korlátos g -re. (ii) igazolásához jegyezzük meg, hogy

$$(fg_a)(x) = f(x)g_a(x) \text{ m.m.}$$

a korlátos g esetén teljesülő (ii) alapján. Ezért

$$\lim(fg_a)(x) = f(x)g(x) \text{ m.m. ha } a \rightarrow \infty.$$

Alkalmazva az 5. Tétel (iii) részét kapjuk, hogy

$$(fg)(x) = \lim(fg_a)(x) = f(x)g(x) \text{ m.m.}$$

■

13. Tétel. Legyen $\{f_n\}$ L -beli elemek egy növekvő sorozata, azaz

$$f_n \leq f_{n+1},$$

melyre $I(f_n)$ korlátos. Ekkor $\{f_n\}$ L -normában konvergál egy $f \in L$ határértékhez, és

$$(23) \quad \lim f_n(x) = f(x) \text{ m.m.}$$

Hasonló igaz csökkenő sorozatokra is.

Bizonyítás. A 10. Tétel (i) része szerint pozitív elemek összege pozitív. Ebből következik, hogy $f_m \leq f_n$, ha $m \leq n$. A 10. Tétel (iii) része alapján

$$(24) \quad |f_n - f_m|_L = I(f_n - f_m) = I(f_n) - I(f_m).$$

Emiatt $I(f_n)$ növekvő számsorozat. Mivel a feltevés szerint a sorozat korlátos, ezért konvergens. De akkor (24)-ből következik, hogy $\{f_n\}$ tart egy f határértékhez.

A 10. Tétel (ii) része szerint egy pozitív függvény majdnem mindenhol pozitív értékeket vesz fel. Mivel $f_{n+1} - f_n$ pozitív, ezért $\{f_n(x)\}$ egy növekvő számsorozat majdnem minden x -re. Így $\lim f_n(x)$ létezik majdnem minden x -re, ha ∞ -t is elfogadjuk határértékként. Az 5. Tétel (iii) része alapján ez a pontonkénti határérték véges és egyenlő $f(x)$ -szel majdnem minden x -re. ■

4. Most rátérünk a 2. részben kimondott 3. Tétel igazolására. A bizonyítás a következő lemmán alapul:

14. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $f \in L$ elemre teljesül $f(x) \leq 0$ m.m. Ekkor*

$$(25) \quad I(f) \leq 0.$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy bármely $a > 0$ esetén

$$(25)_a \quad I(f_a) \leq 0.$$

Mivel a 11. Tétel szerint f_a tart f -hez az L -normában, ezért $I(f_a)$ tart $I(f)$ -hez; emiatt (25) következik (25)_a-ból.

A 9. Tétel (ii) részéből következik, hogy ha $f(x) \leq 0$ m.m., akkor $f_a(x) \leq 0$ m.m. Most alkalmazzuk a 4. Lemma (ii) részét: bármely $\varepsilon > 0$ esetén választhatunk egy c_ε folytonos függvényt a következő tulajdonságokkal:

$$(26) \quad (i) \quad |f_a - c_\varepsilon|_L < \varepsilon,$$

$$(26)' \quad (ii) \quad |f_a(x) - c_\varepsilon(x)| < \varepsilon,$$

kivéve egy ε -nál kisebb térfogatú G_ε nyílt halmazt. Mivel $f_a(x) \leq 0$ m.m., ezért létezik egy ε -nál kisebb térfogatú D_ε nyílt halmaz úgy, hogy

$$f_a(x) \leq 0, \text{ ha } x \notin D_\varepsilon.$$

Ebből és (26)'-ből következik, hogy

$$(27) \quad c_\varepsilon(x) \leq \varepsilon, \text{ ha } x \notin G_\varepsilon \cup D_\varepsilon.$$

Mivel f_a -nak felső korlátja a , ezért c_ε -t megválaszthatjuk úgy, hogy bármely x -re

$$(27)' \quad |c_\varepsilon(x)| < a.$$

Most definiáljuk a d_ε folytonos függvényt az alábbi módon:

$$(28) \quad d_\varepsilon(x) = (c_\varepsilon(x) - \varepsilon)/a.$$

(27) és (27)'-ből következik, hogy

$$d_\varepsilon(x) \leq \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin G_\varepsilon \cup D_\varepsilon, \\ 1, & \text{ha } x \in G_\varepsilon \cup D_\varepsilon. \end{cases}$$

Idézzük most fel a térfogat (3) definícióját. A d_ε függvényre vonatkozó fenti becslésekből következik, hogy d_ε megengedett függvény $G_\varepsilon \cup D_\varepsilon$ -ra nézve. Ezért

$$I(d_\varepsilon) \leq V(G_\varepsilon \cup D_\varepsilon).$$

Mivel $V(G_\varepsilon)$ és $V(D_\varepsilon)$ is kisebb mint ε , ezért következik, hogy

$$(29) \quad I(d_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Integráljuk (28)-at:

$$I(d_\varepsilon) = I(c_\varepsilon - \varepsilon)/a,$$

ahonnan

$$I(c_\varepsilon) = aI(d_\varepsilon) + \varepsilon I(1).$$

Ezt (29)-cel egybevetve kapjuk, hogy

$$I(c_\varepsilon) \leq 2a\varepsilon + \varepsilon I(1).$$

Ezért ha $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor

$$\lim I(c_\varepsilon) \leq 0.$$

Mivel (26) szerint $c_\varepsilon \rightarrow f_a$ normában, ezért valóban

$$I(f_a) \leq 0$$

adódik, ahogyan (25) a -ban állítottuk. ■

A 3. Tétel (iii) részének bizonyítása most már kézenfekvő. Elegendő megmutatni, hogy ha $f(x) = 0$ m.m., akkor $f = 0$. A 9. Tétel (ii) részéből következik, hogy ha $f(x) = 0$ m.m., akkor $f_+(x) = 0$ m.m. Ezért, a 14. Lemma alapján,

$$I(f_+) \leq 0.$$

A 10. Tétel (iii) része szerint $|f_+|_L = I(f_+)$; ezért $f_+ = 0$. f helyett $-f$ -et írva hasonlóan kapjuk, hogy $f_- = 0$; ezekből következik, hogy $f = 0$. ■

A következő tétel azt mutatja, hogy az $f \in L$ elemek pozitivitása, negativitása és korlátossága definiálható az $f(x)$ értékek alapján.

15. Tétel. *Legyen $f \in L$ tetszőleges.*

- (i) *Ha $f(x) \geq 0$ m.m., akkor f pozitív.*
- (ii) *Ha $f(x) \leq 0$ m.m., akkor f negatív.*
- (iii) *Ha $|f(x)| \leq a$ m.m., akkor f korlátos.*

Bizonyítás. (i) A 9. Tétel (ii) része szerint ha $f(x) \geq 0$ m.m., akkor $f_-(x) = \varphi_-(f(x)) = 0$ m.m. Ezért a 3. Tétel (iii) miatt $f_0 = 0$, és így $f = f_+ \geq 0$.

(ii) és (iii) bizonyítása hasonló. ■

Most rátérünk a 7. Tétel bizonyítására. Újra kimondjuk az állítást:

Ha L elemeinek egy $\{f_n\}$ sorozata majdnem mindenhol konvergens és

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ m.m. valamely } g \in L \text{ - lel,}$$

akkor $\{f_n\}$ normában konvergál egy $f \in L$ elemhez és

$$f(x) = \lim f_n(x) \text{ m.m.}$$

Bizonyítás. Először definiáljuk a kétváltozós $\varphi_{\max}$ függvényt az alábbi módon:

$$\varphi_{\max}(a, b) = \max(a, b).$$

Könnyű megmutatni, hogy $\varphi_{\max}$ teljesíti a

$$|\varphi_{\max}(a, b) - \varphi_{\max}(s, t)| \leq \max(|a - s|, |b - t|)$$

egyenlőtlenséget. Ezért $\varphi_{\max}$ Lipschitz folytonos függvény. Ebből következik, ugyanúgy mint a 9. Tételben, hogy bármely két $f, g \in L$ elemre definiálhatjuk a $\varphi_{\max}(f, g) \in L$ elemet. Jelölje ezt az elemet $\max(f, g)$. Ugyanúgy mint a 9. Tételben,

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ m.m.}$$

Ezután rekurzívan definiálhatjuk $\max(g_1, \dots, g_n)$ -et L -beli elemek bármely $\{g_1, \dots, g_n\}$ halmazára.

16. Tétel. Legyen $\{g_n\}$ L -beli elemek egy sorozata, amelyre valamely $g \in L$ esetén

$$|g_n(x)| \leq g(x) \text{ m.m., } n = 1, 2, \dots$$

Ekkor $\sup\{g_n\}$ definiálható mint egy $h \in L$ elem úgy, hogy

$$\sup\{g_n(x)\} = h(x) \text{ m.m.}$$

Bizonyítás. Legyen $h_n = \max(g_1, \dots, g_n)$. A feltétel miatt $|h_n(x)| \leq g(x)$ m.m., továbbá $\{h_n\}$ L -beli elemek egy növekvő sorozata. Ezért, a 15. Tétel és a 14. Lemma szerint,

$$I(h_n) \leq I(g).$$

A 13. Tételből következik, hogy h_n egy h határértékhez konvergál és

$$\sup\{g_n(x)\} = \lim h_n(x) = h(x) \text{ m.m.}$$



Legyen $\{f_n\}$ a 7. Tételben található sorozat. A 16. Tétel szerint definiálható

$$f_n^{\max} = \sup(f_n, f_{n+1}, \dots)$$

mint egy L -beli elem. A 15. Tétel szerint $\{f_n^{\max}\}$ csökkenő sorozat, és $|f_n^{\max}(x)| \geq -g(x)$ m.m. A 13. Tételből következik, hogy $f_n^{\max}$ konvergál egy $f^{\max}$ határértékhez L -ben és

$$\lim f_n^{\max}(x) = f^{\max}(x) \text{ m.m.}$$

Mivel az $\{f_n(x)\}$ sorozat majdnem mindenhol konvergál, ezért $f_n^{\max}$ definíciója alapján

$$\lim f_n(x) = \lim f_n^{\max}(x) = f^{\max}(x) \text{ m.m.}$$

Hasonlóan definiáljuk az

$$f_n^{\min} = \inf(f_n, f_{n+1}, \dots)$$

elemeket. $\{f_n^{\min}\}$ növekvő sorozat, amelyre $|f_n^{\min}(x)| \leq g(x)$ m.m.; ezért a 13. Tétel alapján $f_n^{\min}$ konvergál egy $f^{\min}$ határértékhez L -ben. Mivel az $\{f_n(x)\}$ sorozat majdnem mindenhol konvergál, ezért következik, hogy

$$\lim f_n(x) = \lim f_n^{\min}(x) = f^{\min}(x) \text{ m.m.}$$

Így $f^{\max}(x) = f^{\min}(x)$ m.m., és ezért a 3. Tétel (ii) része alapján $f^{\max} = f^{\min}$. $f_n^{\min}$ és $f_n^{\max}$ definíciója alapján

$$f_n^{\min} \leq f_n \leq f_n^{\max},$$

ahonnan következik, hogy

$$0 \leq f_n - f_n^{\min} \leq f_n^{\max} - f_n^{\min}.$$

Mivel $\{f_n^{\min}\}$ és $\{f_n^{\max}\}$ ugyanahhoz a határértékhez tart L -ben, ezért az $\{f_n\}$ sorozat is ehhez a határértékhez tart. ■

5. Most áttérünk a 8. Tétel bizonyítására.

(i) Bármely G nyílt halmaz mérhető és $m(G) = V(G)$.

Bizonyítás. Ha $G = K$, akkor $m(G) = I(1) = V(G)$ világos, így a továbbiakban feltehető, hogy $G \neq K$. Jelölje $p_G(x)$ az x pont távolságát G komplementerétől. A komplementer K -ra nézve értendő. Világos, hogy $p_G(x) > 0$, ha $x \in G$ és $p_G(x) = 0$, ha $x \notin G$. Legyen φ^n a következő függvény:

$$\varphi^n(s) = \begin{cases} 0, & \text{ha } s \leq 0, \\ ns, & \text{ha } 0 < s < 1/n, \\ 1, & \text{ha } 1/n < s. \end{cases}$$

Világos, hogy a φ^n függvények Lipschitz folytonosak és

$$(30) \quad \varphi^n(s) \leq \varphi^{n+1}(s).$$

Definiáljuk a b_n függvényeket:

$$(31) \quad b_n(x) = \varphi^n(p_G(x)).$$

A b_n függvények folytonosak és $b_n(x) \leq 1$, ha $x \in G$ és $b_n(x) = 0$, ha $x \notin G$. (30)-ból és a (31) definícióból következik, hogy $b_n(x) \leq b_{n+1}(x)$ minden x -re és $b_n(x) \leq 1$. Ezért alkalmazhatjuk a függvények monoton sorozatairól szóló 13. Tételt, ami alapján kapjuk, hogy $\{b_n\}$ egy b_G határértékhez konvergál L -ben, és hogy

$$\lim b_n(x) = b_G(x) \text{ m.m.}$$

A b_n függvények (31) definíciójából következik, hogy

$$\lim b_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in G, \\ 0, & \text{ha } x \notin G. \end{cases}$$

Ez azt mutatja, hogy $b_G(x)$ a G halmaz karakterisztikus függvénye.

Az $I(b_G) = V(G)$ egyenlőséget a következőképpen igazoljuk: b_n megengedett G -re nézve, ezért

$$I(b_n) \leq V(G).$$

Mivel b_n konvergál b_G -hez L -ben, ezért ebből következik, hogy

$$(32) \quad I(b_G) \leq V(G).$$

Másrészt bármely G -re nézve megengedett c függvényre teljesül

$$c(x) \leq b_G(x) \text{ m.m.}$$

A 14. Lemma alapján

$$I(c) \leq I(b_G).$$

Mivel $I(c)$ szuprémuma $V(G)$, ezért

$$(32)' \quad V(G) \leq I(b_G).$$

(32) és (32)' összevetésével kapjuk, hogy $V(G) = I(b_G) = m(G)$, ahogyan állítottuk.

(ii) *Bármely S mérhető halmazra*

$$m(S) = \inf V(G), G \supset S.$$

Bizonyítás. (a) Ha $S \subset G$, akkor $f_G(x) \geq f_S(x)$ m.m., így a 14. Lemma alapján $I(f_G) \geq I(f_S)$. Ezzel beláttuk, hogy $V(G) \geq m(S)$.

(b) Legyen S mérhető halmaz. Ekkor, a 4. Lemma (ii) része szerint, tetszőleges ε pozitív számhoz van olyan c folytonos függvény és D nyílt halmaz, melyre

$$(33) \quad |c - f_S|_L < \varepsilon, |c(x) - f_S(x)| < \varepsilon, \text{ ha } x \notin D,$$

és $V(D) < \varepsilon$. A c függvény választható úgy, hogy nemnegatív legyen. Defináljuk a H halmazt a következő módon:

$$(33)' \quad H = \{x \mid c(x) > 1 - \varepsilon\}.$$

(33)-ból következik, hogy ha $x \in S \setminus D$, akkor $c(x) > 1 - \varepsilon$. Mivel minden ilyen x -re $x \in H$, ezért $S \subset H \cup D$.

A 2. Tétel szerint (33)'-ből következik, hogy $V(H) \leq I(c)/(1 - \varepsilon)$. (33)-ból viszont az adódik, hogy $I(c) < I(f_S) + \varepsilon$. Így, mivel $I(f_S) = m(S)$,

$$V(H \cup D) \leq V(H) + V(D) < \frac{m(S) + \varepsilon}{1 - \varepsilon} + \varepsilon.$$

Mivel $S \subset H \cup D$ és ε tetszőleges pozitív szám, ezért ebből következik, hogy $m(S) \geq \inf V(G), G \supset S$. Ebből az (a) rész felhasználásával kapjuk a (ii) állítást.

(iii) Bármely $f \in L$ esetén azon x -ek halmaza, amelyekre $f(x) < a$ mérhető.

Bizonyítás. f -ből egy konstans kivonásával elérhető, hogy $a = 0$. Defináljuk a φ_n Lipschitz függvényeket az alábbi módon:

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} s, & \text{ha } 1 \leq -1/n, \\ -ns, & \text{ha } -1/n < s < 0, \\ 0, & \text{ha } 0 \leq s. \end{cases}$$

A φ_n függvényekre teljesül $\varphi_n(s) \leq \varphi_{n+1}(s)$; így a $g_n = \varphi_n(f)$ elemekre $g_n \leq g_{n+1}$. Mivel $\varphi_n \leq 1$, ezért $g_n \leq 1$. A 13. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy g_n konvergál egy g határértékhez és

$$g(x) = \lim g_n(x) \text{ m.m.}$$

A φ_n függvények definíciója alapján, majdnem minden x -re

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f(x) < 0, \\ 0, & \text{ha } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Ezzel beláttuk (iii)-at.

(iv) A mérhető halmazok σ -algebrát alkotnak; azaz

- (a) Mérhető halmaz komplementere mérhető.
- (b) Két mérhető halmaz metszete mérhető.
- (c) Megszámlálható sok S_n mérhető halmaz egyesítése mérhető és

$$(34) \quad m(\cup S_n) \leq \sum m(S_n),$$

és itt egyenlőség van, amennyiben az S_n halmazok páronként diszjunktak.

Bizonyítás. (a) Az S halmaz mérhető, ha ú.n. karakterisztikus függvénye, az f_S elem, L -ben van. De akkor S komplementerének karakterisztikus függvénye $1 - f_S$ és ez is L -ben van.

(b) Legyenek S és T mérhető függvények f_S és f_T karakterisztikus függvénnyel. A 15. Tételből következik, hogy f_S és f_T korlátos függvények. A 12. Tétel szerint az $f_S f_T$ szorzat L -ben van és ez nem más mint $S \cap T$ karakterisztikus függvénye. Ez azt mutatja, hogy $S \cap T$ mérhető.

(c) (a)-ból és (b)-ből az egyik De Morgan szabály felhasználásával kapjuk, hogy két mérhető halmaz egyesítése mérhető. De akkor véges sok mérhető halmaz egyesítése is mérhető. Az $\cup S_n$ véges unió $f_{\cup}$ karakterisztikus függvényére teljesül

$$f_{\cup} \leq \sum f_{S_n}.$$

Ezért, a 14. Lemma alapján

$$I(f_{\cup}) \leq \sum I(f_{S_n}),$$

ami a (34) reláció véges unióra. A megszámlálható unió esetére szükségünk van a következő eredményre:

17. Lemma. Legyen $\{T_k\}$ mérhető halmazok növekvő sorozata:

$$T_k \subset T_{k+1}.$$

Ekkor az egyesítésük, jelölje ezt T , szintén mérhető és

$$(35) \quad \lim m(T_k) = m(T).$$

Bizonyítás. Jelölje f_k a T_k halmaz karakterisztikus függvényét. Mivel $T_k \subset T_{k+1}$, ezért $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ majdnem minden x -re, így a 15. Tétel szerint $f_k \leq f_{k+1}$. Mivel minden k -ra $f_k(x) \leq 1$ m.m., ezért a 14. Lemmából következik, hogy $I(f_k) \leq I(1)$. Ennélfogva a 13. Tétel alapján f_k konvergál az L -normában egy f határértékhez és

$$\lim f_k(x) = f(x) \text{ m.m.}$$

Ez az egyenlőség azt mutatja, hogy f a T karakterisztikus függvénye, így T mérhető. Mivel f_k konvergál f -hez az L -normában, ezért $I(f_k) = m(T_k)$ konvergál $I(f) = m(T)$ -hez, mint azt állítottuk.

Hasonlóan, ha C_k mérhető halmazok egy csökkenő sorozata: $C_k \supset C_{k+1}$, akkor

$$(35)' \quad m(\cap C_k) = \lim m(C_k).$$

■

Legyen $S_1, S_2, \dots$ mérhető halmazok egy sorozata; továbbá legyen $T_k = S_1 \cup \dots \cup S_k$. Ekkor $\{T_k\}$ mérhető halmazok egy növekvő sorozata és egyesítésük megegyezik $\{S_j\}$ egyesítésével. (35) alapján

$$(36) \quad \lim m(T_k) = m(\cup T_k).$$

Másrészt $T_k = S_1 \cup \dots \cup S_k$, ezért

$$(37) \quad m(T_k) \leq \sum_1^k m(S_j).$$

Ez mutatja, hogy

$$(37)' \quad \lim m(T_k) \leq \sum_1^\infty m(S_j).$$

(36) miatt ebből következik, hogy

$$m(\cup T_k) \leq \sum m(S_j).$$

Mivel $\cup T_k = \cup S_j$, ezért ezzel beláttuk (34)-et.

Ha az S_j halmazok páronként diszjunktak, akkor a T_k karakterisztikus függvénye az S_j -k karakterisztikus függvényeinek összege. Így (37) és (37)'-ben egyenlőség van, és ezért (34)-ben is.

(v) Bármely $f \in L$ esetén

$$(18) \quad I(f) = \int v \, dF(v),$$

ahol

$$(18)' \quad F(v) = m(\{x \mid f(x) < v\}).$$

Bizonyítás. Legyen

$$S_a^b = \{x \mid a \leq f(x) < b\}.$$

A 8. Tétel (iii) és (iv) részéből következik, hogy az S_a^b halmaz mérhető.

Jelölje f_a^b az S_a^b halmaz karakterisztikus függvényét:

$$f_a^b(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a \leq f(x) < b, \\ 0, & \text{ha } f(x) < a \text{ vagy } b \leq f(x) \text{ m.m. } x\text{-re.} \end{cases}$$

Könnyen következik az $F(v)$ függvény (18)'-beli definíciójából, hogy

$$(38) \quad I(f_a^b) = m(S_a^b) = F(b) - F(a).$$

Tegyük fel, hogy f korlátos függvény:

$$|f(x)| \leq a \text{ m.m. } x\text{-re.}$$

Jelöljön d egy pozitív számot; ekkor majdnem minden x -re

$$(39) \quad \sum dj f_{dj}^{d(j+1)}(x) \leq f(x) \leq \sum d(j+1) f_{dj}^{d(j+1)}(x),$$

ahol azokra a j egészekre összegziünk, amelyekre

$$-a \leq dj \leq a.$$

A 14. Lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(40) \quad \sum dj [F(d(j+1)) - F(dj)] \leq I(f) \leq d(j+1) [F(d(j+1)) - F(dj)],$$

ahol (38) alapján felhasználtuk, hogy

$$I(f_{dj}^{d(j+1)}) = F(d(j+1)) - F(dj).$$

Ha most d tart nullához (40)-ben, akkor kapjuk, hogy

$$(41) \quad I(f) = \int_{-a}^a v \, dF(v)$$

bármely $f \in L$ elemre, amelynek a felső korlátja. Így (41) érvényes f_a -ra is:

$$(41)_a \quad I(f_a) = \int_{-a}^a v \, dF(v).$$

Most a tartson a végtelenbe. A 11. Tétel szerint bármely $f \in L$ esetén f_a tart f -hez az L -normában. Ezért (41)_a bal oldala tart $I(f)$ -hez, amint a tart a végtelenbe. A jobb oldal (18) jobb oldalához tart; ezzel befejeztük (18) bizonyítását. ■

Functional Analysis [3] című könyvem Appendix A című részében egy ehhez hasonló konstrukcióval bizonyítom be a Riesz–Kakutani-tételt, amely azt mondja ki, hogy egy K kompakt metrikus téren értelmezett folytonos függvények terének duálisa a K -n értelmezett mértékek tere.

A Lebesgue-integrálható függvények teljességének fontosságát hangsúlyozza Folland jól ismert valós függvénytani könyve [2].

Riesz Frigyes kidolgozta a Lebesgue-integrál egy elméletét (lásd Riesz és Sz.-Nagy klasszikus könyvét [4]) amely, hasonlóan a mi felépítésünkhöz, nem a Lebesgue-mértéken alapul.

A Fourier-analízisről szóló [1] jegyzetének Appendix C részében Bennewitz gyorsan konvergáló Cauchy-sorozatokat segítségével konstruálja meg az integrálható függvények terét.

Függelék

Bebizonyítjuk az 1. Tételt. Idézzük fel, hogy egy G nyílt halmaz térfogata definíció szerint

$$V(G) = \sup I(c),$$

ahol c végigfut azokon a folytonos függvényeken, amelyekre

$$c(x) \leq \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in G, \\ 0, & \text{ha } x \notin G. \end{cases}$$

Belátjuk, hogy V megszámlálhatóan szubadditív.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy V végesen szubadditív. Legyen G_1 és G_2 két nyílt halmaz. Bármely pozitív ε számhoz van olyan $G_1 \cup G_2$ -re nézve megengedett c függvény, amelyre

$$(A1) \quad I(c) > V(G_1 \cup G_2) - \varepsilon.$$

Definiáljuk a b függvényt a következő módon:

$$(A2) \quad b(x) = \max(c(x) - \varepsilon, 0);$$

b -nek a következő tulajdonságai vannak:

(i) b megengedett $G_1 \cup G_2$ -re nézve.

(ii) $b(x) = 0$ egy nyílt halmazon, amely tartalmazza $G_1 \cup G_2$ határát.

$$(A3) \quad (iii) \quad I(b) \geq I(c - \varepsilon).$$

Ezek közvetlen következményei a b függvény (A2) definíciójának.

Legyen $p_i(x)$ az x pont távolsága G_i komplementerétől, $i = 1, 2^3$. Világos, hogy $p_1(x) + p_2(x) > 0$, ha $x \in G_1 \cup G_2$. Legyen c_i , $i = 1, 2$, a következő:

$$c_i(x) = \begin{cases} \frac{p_i(x)}{p_1(x) + p_2(x)} b(x), & \text{ha } x \in G_1 \cup G_2, \\ 0, & \text{ha } x \notin G_1 \cup G_2. \end{cases}$$

A következő tulajdonságok következnek ebből a definícióból és b tulajdonságaiból:

(i) c_i megengedett G_i -re nézve, $i = 1, 2$.

$$(A4) \quad (ii) \quad c_1 + c_2 = b.$$

(i)-ből következik, hogy

$$(A5) \quad I(c_1) \leq V(G_1), I(c_2) \leq V(G_2).$$

Összeadva az (A5)-beli egyenlőtlenségeket (A4) felhasználásával kapjuk, hogy

$$I(b) \leq V(G_1) + V(G_2).$$

Összevetve (A3)-mal kapjuk, hogy

$$(A6) \quad I(c - \varepsilon) \leq V(G_1) + V(G_2).$$

A bal oldal egyenlő $I(c) - \varepsilon I(1)$ -el. Helyettesítsük ezt (A6)-ba és használjuk fel az (A1) becslést; azt kapjuk, hogy

$$V(G_1 \cup G_2) - \varepsilon - \varepsilon I(1) \leq V(G_1) + V(G_2).$$

³ Ha valamelyik $G_i = K$, akkor az állítás nyilvánvaló, így feltehető, hogy $K \setminus G_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$.

Ha $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor a

$$V(G_1 \cup G_2) \leq V(G_1) + V(G_2)$$

egyenlőtlenség adódik. Ebből indukcióval következik, hogy

$$(A7) \quad V(G_1 \cup \dots \cup G_n) \leq \sum_1^n V(G_i).$$

A megszámlálható szubadditivitást a következő módon igazoljuk: Legyen $G_1, G_2, \dots$ nyílt halmazok egy megszámlálható sorozata; jelöljük az $\cup G_n$ egyesítést G -vel. Tetszőleges pozitív ε számhoz van olyan G -re nézve megengedett c függvény, amelyre

$$(A8) \quad I(c) > V(G) - \varepsilon.$$

Definiáljuk b -t úgy, mint (A2)-ben. A b függvény (ii) tulajdonságából következik, hogy G tartalmazza b tartóját. Mivel a K hiperkocka kompakt, ezért b tartója kompakt, amit lefed a G_i halmazok egyesítése. Ezért egy véges $G_1, \dots, G_n$ rész-halmaz lefedi b tartóját. Ebből következik, hogy b megengedett a $G_1 \cup \dots \cup G_n$ halmazra nézve, és így

$$I(b) \leq V(G_1 \cup \dots \cup G_n).$$

Az (A3) egyenlőtlenség felhasználásával becsüljük a bal oldalt alulról és (A7) segítségével a jobb oldalt felülről; így a következőt kapjuk:

$$I(c) - I(\varepsilon) \leq \sum_1^n V(G_i).$$

Az (A8) egyenlőtlenség felhasználásával becsüljük a bal oldalt alulról és a jobb oldalon terjesszük ki az összegzést $n = \infty$ -ig:

$$V(G) - \varepsilon - \varepsilon I(1) \leq \sum_1^\infty V(G_i).$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért kapjuk, hogy

$$(A9) \quad V(G) \leq \sum_1^\infty V(G_i).$$

Az olvasóra bízunk annak igazolását, hogy ha a G_i halmazok páronként diszjunktak, akkor (A9)-ben egyenlőség teljesül.

Hivatkozások

- [1] C. Bennewitz, *Fourier Analysis, Lecture Notes*, Lund University, 2007.
- [2] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley, Hoboken, NJ, 1984.
- [3] P. D. Lax, *Functional Analysis*, John Wiley, Hoboken, NJ, 2002.
- [4] F. Riesz és B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, F. Unger, New York, 1955.

Peter Lax, Professor Emeritus, Courant Institute, New York University, lax@cims.nyu.edu

