

A differenciálhányados fogalmának általánosításai

MÓRICZ FERENC*

1. Bevezetés

A Kalkulus bevezető előadásaiból ismerjük a függvény differenciálhányadosának, vagy röviden: deriváltjának a fogalmát. Legyen f valós értékű függvény, amelynek értelmezési tartománya az $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ valós egyenes valamely (a, b) nyitott intervalluma, jelben $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Akkor mondjuk, hogy az f függvény differenciálható egy $x_0 \in (a, b)$ helyen, ha az

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ún. különbségi (=differencia) hányadosnak létezik a (véges) határértéke, ha $h \rightarrow 0$, amely esetben a

$$(1.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

határértéket az f függvény differenciálhányadosának, vagy röviden: deriváltjának nevezzük az x_0 helyen.

A derivált fogalma alapvető a természettudományokban. Például a fizikában egy mozgó test pillanatnyi sebességét az út-idő függvénynek a deriváltja adja. Hasonlóan a derivált segítségével írják le egy kémiai átalakulás reakciósebességét. A derivált fogalma ugyancsak nélkülözhetetlen szerepet játszik a differenciálható függvények grafikonjának diszkussziójában: a monotonitás, konvexség (konkávság) vizsgálatában, a szélsőérték helyek és inflexiós pontok megtalálásában, stb.

Viszont a differenciálhatóság, más szóval a derivált létezése erős feltételt jelent a szóban forgó függvényre nézve. Például, az $f(x) := |x|$ függvény nem differenciálható az $x_0 = 0$ helyen. Ennek következtében több olyan általánosított derivált fogalmat vezettek be a matematikában, amelyek olyan esetekben is létezhetnek,

* Ez a dolgozat a T 046 192 sz. OTKA pályázat támogatásával készült.

ha a hagyományos derivált nem létezik; továbbá, egybeesnek a hagyományos deriválttal, ha az létezik. És végül, de nem utolsó sorban, ezek az általánosított deriváltak is eredményesen alkalmazhatók többek között a függvények grafikonjának diszkussziójában, a különféle függvényosztályok vizsgálatában, stb.

Dolgozatunk 2. részében ismertetjük a függvények szimmetrikus (első és második) deriváltjainak fogalmát, ezek viszonyát a hagyományos (első és második) deriváltakhoz és alapvető tulajdonságait. A 3. részben a monoton növekvő, illetve csökkenő függvényeket jellemezzük az ún. szimmetrikus derivált számokkal. A 4. részben a konvex, illetve konkáv függvényeket jellemezzük a Schwarz derivált számokkal. Az 5. részben tárgyaljuk az ún. síma függvények fogalmát és legfontosabb tulajdonságait. A befejező 6. részben visszatérünk a hagyományos derivált fogalmához és bizonyítjuk a derivált függvény Darboux tulajdonságát, amely a numerikus matematika egyes eljárásainak hibaanalízisében nélkülözhetetlen.

A dolgozatunkban tárgyalt anyag nagyobb része nem található meg a Kalkulussal foglalkozó hazai tankönyvekben, jegyzetekben. Ilyenek például a valós függvények elméletében fontos szerepet játszó síma függvények vizsgálata; vagy a numerikus matematikában a határozott integrálok közelítő kiszámítása (az ún. kvadratúraformulák képlethibájának becslése) során a derivált függvény Darboux tulajdonságának kihasználása; stb.

Viszont az ismertetésre kerülő tételek bizonyításaiban csak olyan összefüggéseket használunk fel dolgozatunkban, amelyek szerves részei a Kalkulus címszó alatti egyetemi vagy speciális matematika tagozatos középiskolai tantárgynak. Például, ezek közé tartozik Lagrange középértéktétele, vagy a határozott integrálok (pontos) kiszámítására szolgáló Newton–Leibniz formula. Megjegyzés szintjén még a "majdnem mindenütt" érvényes tulajdonság fogalma is említésre kerül, amely a Lebesgue szerint nullamértékű halmaz fogalmával kapcsolatos.

2. Szimmetrikus deriváltak

A különféle deriváltak alábbi definícióiban feltesszük, hogy a vizsgált f függvény értelmezve van az x_0 hely valamely környezetében.

Definíció. Az f függvény *szimmetrikus (első) deriváltját* az x_0 helyen a

$$(2.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} =: D_1 f(x_0)$$

képlettel definiáljuk feltéve, hogy ez a (véges) határérték létezik.

Ez a közönséges derivált általánosítása, amint ezt a következő tétel mutatja.

2.1. Tétel. Ha $f'(x_0)$ létezik, akkor $D_1f(x_0)$ is létezik és a két derivált megegyezik.

Bizonyítás. A (2.1) baloldalán álló differenciahányadost alakítjuk át:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \right],$$

ahonnan h -t 0-hoz tartatva nyerjük, hogy

$$D_1f(x_0) = \frac{1}{2}[f'(x_0) + f'(x_0)] = f'(x_0).$$

■

Viszont $D_1f(x_0)$ létezhet olyan esetben is, amikor az f nem differenciálható x_0 -ban. Például, ha f páros függvény, akkor az $x_0 = 0$ helyen

$$D_1f(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{2h} = 0.$$

Többek között ilyen az $f(x) := |x|$ függvény is.

Definíció. Az f függvény *szimmetrikus második deriváltját* az x_0 helyen a

$$(2.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} =: D_2f(x_0)$$

képlettel definiáljuk feltéve, hogy ez a (véges) határérték létezik. Az irodalomban ezt Schwarz (ritkább esetben Riemann) deriválnak is nevezik, mivel ezek a német matematikusok vezették be vizsgálataikban a 19. század közepén.

Mivel (2.1)-ben és (2.2)-ben a baloldalon álló differenciahányadosok számlálója h -nak páros függvénye, ezért a határérték meghatározásakor mindig feltehetjük, hogy $h > 0$.

A következő tételben bizonyítjuk, hogy $D_2f(x_0)$ az $f''(x_0)$ második derivált általánosítása.

2.2. Tétel. Ha $f''(x_0)$ létezik, akkor $D_2f(x_0)$ is létezik és a két derivált megegyezik.

Bizonyítás. Ha $f''(x_0)$ létezik, akkor f' folytonos az x_0 helyen, és ezért f' korlátos az x_0 hely egy környezetében. Ha $x_0 \pm h$ is ebbe a környezetbe esik, akkor a Newton–Leibniz formula szerint

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = \int_0^h [f'(x_0 + t) - f'(x_0 - t)] dt.$$

Ennek alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} - f''(x_0) \\ = \int_0^h \frac{2t}{h^2} \left[\frac{f'(x_0 + t) - f'(x_0 - t)}{2t} - f''(x_0) \right] dt. \end{aligned}$$

Mindkét oldal abszolút értékét véve, majd az integrálokra vonatkozó háromszög egyenlőtlenséget alkalmazva adódik, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} - f''(x_0) \right| &\leq \\ &\leq \int_0^h \frac{2t}{h^2} \left| \frac{f'(x_0 + t) - f'(x_0 - t)}{2t} - f''(x_0) \right| dt \leq \\ &\leq \max_{t \in (0, h)} \left| \frac{f'(x_0 + t) - f'(x_0 - t)}{2t} - f''(x_0) \right| \int_0^h \frac{2t}{h^2} dt = \\ &= \max_{t \in (0, h)} \left| \frac{f'(x_0 + t) - f'(x_0 - t)}{2t} - f''(x_0) \right| \rightarrow 0, \quad \text{ha } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

tekintve, hogy a 2.1. Tétel szerint az $f''(x_0) = (f')'(x_0)$ derivált létezéséből következik az f' függvény szimmetrikus deriváltjának létezése és a két derivált megegyezik:

$$D_2 f(x_0) = D_1 f'(x_0) = (f')'(x_0) = f''(x_0).$$

■

Másrészt, $D_2 f(x_0)$ létezik olyan esetben is, amikor $f''(x_0)$ nem létezik. Ha f folytonos és páratlan függvény, akkor az $x_0 = 0$ helyen

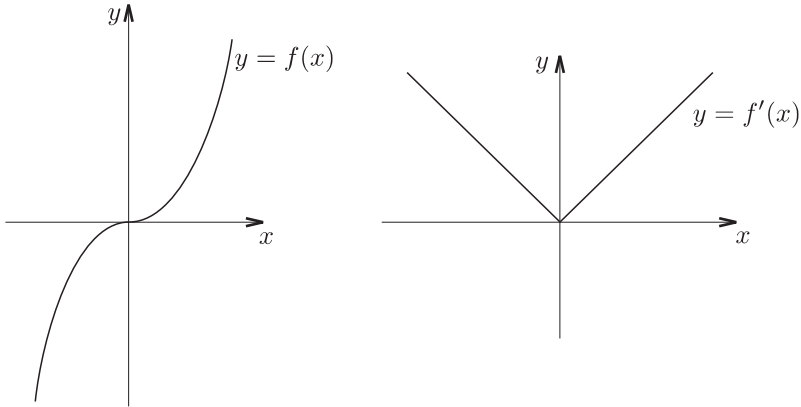
$$f(h) + f(-h) - 2f(0) = f(h) + f(-h) = 0$$

minden h -ra. Így $D_2 f(0) = 0$, míg $f''(0)$ nem feltétlenül létezik.

Példa. Az

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény (lásd az 1. ábrát) mindenütt differenciálható és első deriváltja $f'(t) = |x|$, amely az $x = 0$ helyen nem differenciálható. Tehát $f''(0)$ nem létezik, míg $D_2 f(0) = 0$ létezik.



1. ábra

Az első deriváltra vonatkozó Lagrange középértéktételnek egyenes következménye a következő állítás: Ha az f függvény folytonos a zárt $[a, b]$ intervallumon, differenciálható a nyitott (a, b) intervallumon és ott $f'(x) \equiv 0$, akkor az f függvény állandó $[a, b]$ -ben. Ezzel analog állítást bizonyítunk a szimmetrikus második deriváltra.

2.3. Tétel. *Ha az f függvény folytonos a zárt $[a, b]$ intervallumon, $D_2f(x)$ létezik a nyitott (a, b) intervallumon és ott $D_2f(x) \equiv 0$, akkor $f(x)$ lineáris függvény $[a, b]$ -ben.*

A bizonyítás előtt két észrevételt teszünk:

(i) Tetszőleges $f(x) := Ax + B$ lineáris függvényre (ahol A és B állandók),

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \equiv 0,$$

és így $D_2f(x) \equiv 0$.

(ii) Ha az f függvénynek x_0 -ban lokális maximuma van és $D_2f(x_0)$ létezik, akkor $D_2f(x_0) \leq 0$; míg ha f -nek x_0 -ban lokális minimuma van, akkor $D_2f(x_0) \geq 0$. Ez a két állítás egyből következik abból, hogy ha f -nek maximuma van x_0 -ban, akkor

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0) \leq 0;$$

míg ha f -nek minimuma van x_0 -ban, akkor

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0) \geq 0$$

minden elegendően kicsi h -ra (a lokális szélsőértéknek megfelelően).

2.3. Tétel bizonyítása. Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ szám esetén tekintsük a

$$(2.3) \quad g(x) = g_\varepsilon(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + \varepsilon(x - a)(x - b), \quad x \in [a, b],$$

segédfüggvényt. Nyilvánvaló, hogy g folytonos $[a, b]$ -ben és

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Azt fogjuk belátni, hogy a $g(x)$ függvényérték nem lehet pozitív az (a, b) intervallum egyetlen x helyén sem. Ezt indirekt módon igazoljuk.

Tehát induljunk ki abból, hogy $g(x) > 0$ valamely $x \in (a, b)$ -re. A g függvény folytonossága következtében létezik olyan $x_0 \in (a, b)$, amelyre

$$g(x_0) = \max_{x \in [a, b]} g(x).$$

A fentebbi (ii) észrevételünk szerint

$$(2.4) \quad D_2 g(x_0) \leq 0.$$

Másrészt, alkalmazzuk a 2.2. Tételt (2.3) jobboldalára:

$$D_2 g(x) = D_2 f(x) + \varepsilon[(x - a)(x - b)]' = D_2 f(x) + 2\varepsilon,$$

ahonnan (2.4)-et figyelembevéve adódik, hogy

$$D_2 f(x_0) = D_2 g(x_0) - 2\varepsilon \leq -2\varepsilon.$$

Az így nyert egyenlőtlenség ellentmond annak, hogy $D_2 f(x) \equiv 0$ az (a, b) intervallumon. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $g(x) \leq 0$ az $[a, b]$ intervallumon, ami (2.3) szerint azzal ekvivalens, hogy

$$(2.5) \quad \begin{aligned} f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) &\leq -\varepsilon(x - a)(x - b) = \\ &= \varepsilon(x - a)(b - x) \leq \varepsilon(b - a)^2, \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Sőt, ha a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget is kihasználjuk, akkor (2.5) baloldala még az $\varepsilon \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ mennyiségnél is kisebb vagy egyenlő.

Ha (2.3) jobboldalán az ε előtti ”+” jelet ”–” jelre cseréljük át, akkor a fenti gondolatmenethez hasonló módon láthatjuk be, hogy $g(x) \geq 0$ az $[a, b]$ intervallumon. Ez az egyenlőtlenség pedig (2.3) szerint azzal ekvivalens, hogy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) &\geq \varepsilon(x - a)(x - b) = \\ &= -\varepsilon(x - a)(b - x) \geq -\varepsilon(b - a)^2, \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Egybevetve (2.5)-öt és (2.6)-ot írhatjuk, hogy

$$(2.7) \quad \left| f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right| \leq \varepsilon(b - a)^2, \quad x \in [a, b].$$

Mivel ε tetszőlegesen kicsi pozitív számnak választható, ezért (2.7) baloldalának azonosan zérusnak kell lennie, amiből az következik, hogy

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Tehát f lineáris függvény. ■

Példa. Az

$$f(x) := \begin{cases} |x| = -x, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ 2|x| = 2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/2, \end{cases}$$

akkor

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ 2, & \text{ha } 0 < x \leq 1/2, \end{cases}$$

f nem differenciálható $x_0 = 0$ -ban, viszont

$$D_1 f(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Ezen a példán mutatjuk meg, hogy a szimmetrikus derivált *nem* rendelkezik több olyan tulajdonsággal, mint amivel a közönséges derivált rendelkezik.

(i) f -nek totális minimuma van az $x_0 = 0$ helyen, de $D_1 f(0) \neq 0$. Tehát egy függvény szélsőérték helyeinek megtalálása a szimmetrikus deriválttal nem mindig lehetséges.

(ii) A fenti f függvény folytonos a $[-1, 1/2]$ intervallumon, a belső pontokban a $D_1 f$ szimmetrikus derivált létezik és $f(-1) = f(1/2)$; de nem létezik olyan $x \in (-1, 1/2)$ hely, amelyben $D_1 f(x) = 0$ lenne. Tehát a közönséges deriváltra vonatkozó Rolle tétel nem érvényes a szimmetrikus derivált esetén.

(iii) A fenti példában $D_1 f$ csak három értéket vesz fel: -1 , 1 és 2 . Tehát a szimmetrikus derivált függvény a Darboux tulajdonsággal sem rendelkezik (lásd a Darboux tulajdonság definícióját a 6. részben).

3. Monoton függvények jellemzése szimmetrikus derivált számokkal

Emlékeztetünk arra, hogy az f függvényt akkor nevezzük *monoton növénynek* az I intervallumon, ha

$$(3.1) \quad f(x_1) \leq f(x_2) \text{ valahányszor } x_1, x_2 \in I\text{-re } x_1 < x_2.$$

Szokás azt is mondani, hogy ekkor az f függvény tágabb értelemben monoton növény az I intervallumon; míg az f függvényt szigorú értelemben monoton növénynek nevezzük I -n, ha

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ valahányszor } x_1, x_2 \in I\text{-re } x_1 < x_2.$$

Cikkünkben a monoton növény függvény fogalmát mindig a tágabb értelemben értjük.

A monoton csökkenő függvény fogalmát hasonló módon definiáljuk. Az f függvényt akkor nevezzük *monoton csökkenőnek* az I intervallumon, ha

$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ valahányszor } x_1, x_2 \in I\text{-re } x_1 < x_2.$$

Mivel egy függvény szimmetrikus deriváltja nem mindig létezik, ezért bevezetjük az alsó és felső szimmetrikus deriváltak fogalmát.

Definíció. Legyen az f függvény értelmezve az x_0 hely valamely környezetében. Az f *alsó szimmetrikus deriváltját* a

$$\underline{D}_1 f(x_0) := \liminf_{0 < h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

a *felső szimmetrikus deriváltját* pedig a

$$\overline{D}_1 f(x_0) := \limsup_{0 < h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

képletekkel definiáljuk, amelyeknek értéke ún. *kiterjesztett valós szám* (azaz, a valós számok halmazához még hozzávesszük a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokat is).

Megjegyezzük, hogy a "lim inf" a latin "limes inferior" szókapcsolat rövidítése, amelyet magyarrá "alsó határértéknek" fordíthatjuk; a "lim sup" pedig a latin "limes superior" szókapcsolat rövidítése, amelyet "felső határértéknek" fordíthatunk. Ezeknek a definíciója a következőképpen adható meg.

Definíció. Legyen a g függvény értelmezve az x_0 hely környezetében, mondjuk az $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ intervallumon, ahol $\delta_0 > 0$ adott valós szám. Legyen $0 < \delta < \delta_0$, egyébként δ tetszőleges szám, és legyen

$$m(\delta) := \inf\{g(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\},$$

$$M(\delta) := \sup\{g(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}.$$

Az "inf" (=infimum) és "sup" (=supremum) fogalmát ismertnek tételezzük fel. Nyilván $m(\delta)$ monoton nő, míg $M(\delta)$ monoton csökken, ha δ csökken:

$$m(\delta_1) \geq m(\delta_2) \quad \text{és} \quad M(\delta_1) \leq M(\delta_2), \quad \text{ha} \quad 0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta.$$

Ezért léteznek a

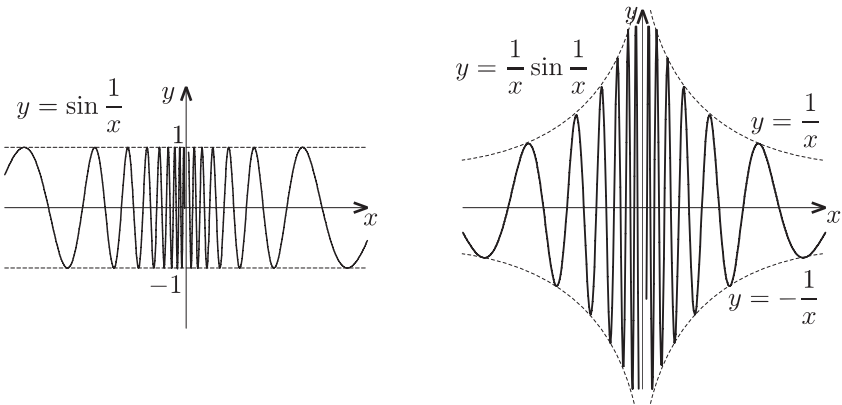
$$\lim_{0 < \delta \rightarrow 0} m(\delta) =: \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{0 < \delta \rightarrow 0} M(\delta) =: \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

határértékek a kiterjesztett valós számok körében (azaz, ezek lehetnek $+\infty$ vagy $-\infty$ is).

A következő összefüggés könnyen igazolható:

$$(3.2) \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) = - \liminf_{x \rightarrow x_0} (-g(x)).$$



2. ábra

Példa (lásd a 2. ábrát).

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = -1 \quad \text{és} \quad \limsup_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 1; \\ \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{és} \quad \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = +\infty. \end{aligned}$$

Ezen előzmények után a következő tételben a monotonitást jellemezzük az alsó és felső szimmetrikus deriváltakkal, amelyeket röviden *szimmetrikus derivált számoknak* szokás nevezni.

3.1. Tétel. *A nyitott I intervallumon folytonos f függvény akkor és csak akkor monoton növekvő I -n, ha*

$$(3.3) \quad \underline{D}_1 f(x) \geq 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Bizonyítás. *Szükségesség.* Tegyük fel, hogy az f függvény monoton növekvő az I intervallumon. Legyen $x_0 \in I$ tetszőleges és legyen $h > 0$ olyan kicsi, hogy $x_0 \pm h \in I$. A (3.1) egyenlőtlenség szerint

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \geq 0,$$

amely a $h \rightarrow 0$ határátmenettel (3.2)-be megy át.

Elegendőség. Most azt tesszük fel, hogy (3.3) fennáll. Sőt, először abból az erősebb feltételből indulunk ki, hogy

$$(3.4) \quad \underline{D}_1 f(x) > 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Azt, hogy ebben az esetben az f függvény monoton növekvő I -n, indirekt módon fogjuk bizonyítani. E célból induljunk ki ezen állítás tagadásából, vagyis abból, hogy az f függvény nem monoton növekvő I -n. Ekkor léteznek olyan $c, d \in I$ helyek, amelyekre

$$c < d \quad \text{és} \quad f(c) > f(d).$$

Legyen y tetszőleges olyan szám, amelyre

$$f(c) > y > f(d),$$

és legyen

$$(3.5) \quad \xi := \sup\{x \in [c, d] : f(x) > y\}.$$

Az f függvény feltételezett folytonosságából következik, hogy $c < \xi < d$ és hogy megadható olyan $\{x_n\}$ sorozat, amelyre

$$(3.6) \quad c < x_n < \xi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \quad \text{és} \quad f(x_n) > y, \quad n = 1, 2, \dots$$

Legyen

$$(3.7) \quad h_n := \xi - x_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

akkor

$$h_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \xi \quad \text{és} \quad f(\xi + h_n) \leq y, \quad n = 1, 2, \dots$$

Másrészt, (3.6) és (3.7) szerint

$$f(\xi - h_n) = f(x_n) > y,$$

és ennek következtében

$$\frac{f(\xi + h_n) - f(\xi - h_n)}{2h_n} < 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ebből pedig az $n \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik, hogy

$$\underline{D}_1 f(\xi) \leq 0.$$

Mivel $\xi \in (c, d) \subset I$, ez ellentmond (3.4)-nek. Tehát az a feltevés, hogy az f függvény nem monoton növekvő I -n ellentmondásra vezetett. Következésképpen a (3.4) speciális feltétel teljesülése esetén az f függvény monoton növekvő I -n.

Ezután rátérünk az általános eset bizonyítására, amikor csak azt tesszük fel, hogy $\underline{D}_1 f(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -re (lásd (3.3)-at). Vezessük be az

$$f_n(x) := f(x) + \frac{x}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

függvényeket. Mivel

$$\underline{D}_1 f_n(x) = \underline{D}_1 f(x) + \frac{1}{n} > 0 \quad \text{minden} \quad x \in I\text{-re,}$$

a fentebb már bizonyított részből következik, hogy az f_n függvények mindegyike monoton növekvő I -n:

$$(3.8) \quad f_n(x_1) \leq f_n(x_2) \quad \text{valahányszor} \quad x_1, x_2 \in I\text{-re} \quad x_1 < x_2.$$

Tekintve, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{minden} \quad x \in I\text{-re,}$$

a (3.8) egyenlőtlenség az f határérték függvényre is érvényes marad. Tehát f is monoton növekvő I -n. ■

A 3.1. Tétel megfelelője monoton csökkenő függvényekre a következő.

3.2. Tétel. *A nyitott I intervallumon folytonos f függvény akkor és csak akkor monoton csökkenő I -n, ha*

$$(3.9) \quad \overline{D}_1 f(x) \leq 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az f függvény akkor és csak akkor monoton csökkenő, ha a $(-f)$ függvény monoton növény. Tekintve, hogy (3.2) szerint

$$\overline{D}_1 f(x) = -\underline{D}_1(-f(x)),$$

ezért (3.8) fennállása azzal ekvivalens, hogy

$$\underline{D}_1(-f(x)) = -\overline{D}_1 f(x) \geq 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

A 3.1. Tételt a $(-f)$ függvényre alkalmazva nyerjük a 3.2. Tétel állítását. ■

A 3.1. és 3.2. Tételek együttes alkalmazásával adódik az alábbi

3.3. Korollárium. *Ha az f függvény folytonos a zárt $I := [a, b]$ intervallumon és*

$$(3.10) \quad D_1 f(x) = 0 \quad \text{minden } x \in (a, b)\text{-re,}$$

akkor f állandó I -n.

Bizonyítás. A (3.10) feltételből egyaránt következik, hogy

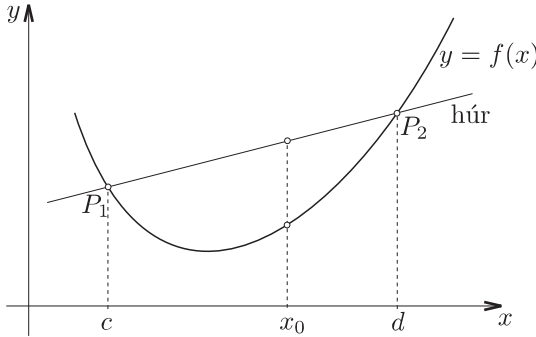
$$D_1 f(x) \geq 0 \quad \text{és} \quad D_1 f(x) \leq 0 \quad \text{minden } x \in (a, b)\text{-re.}$$

A 3.1. Tétel szerint az f függvény monoton növény, míg a 3.2. Tétel szerint f monoton csökkenő a nyitott (a, b) intervallumon. Tehát f ott szükségképpen állandó. A zárt $[a, b]$ intervallumon feltételezett folytonosság következtében f állandó a zárt $[a, b]$ intervallumon is. ■

4. Konvex (illetve konkáv) függvények jellemzése

Schwarz derivált számokkal

Emlékeztetünk arra, hogy valamely I (nyitott vagy zárt) intervallumon értelmezett valós értékű f függvényt akkor nevezünk konvexnek I -n, ha az $y = f(x)$, $x \in I$, grafikon bármely két pontja közötti ív minden pontja a két pontot összekötő húr alatt vagy esetleg azon van. Lásd a 3. ábrát, ahol $P_1(c, f(c))$ és $P_2(d, f(d))$ a két szóban forgó pont és $c < x_0 < d$.

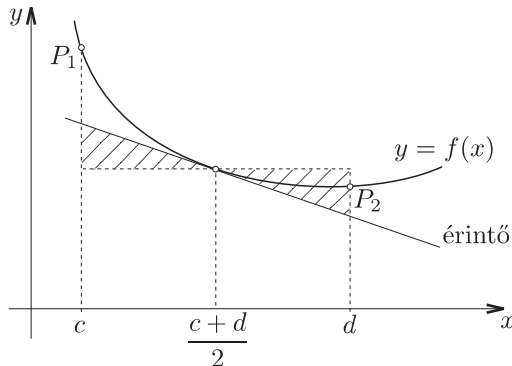


3. ábra

Az is jól ismert, hogy az f függvény akkor és csak akkor konvex az I intervallumon, ha az

$$(4.1) \quad f(\lambda c + (1 - \lambda)d) \leq \lambda f(c) + (1 - \lambda)f(d)$$

egyenlőtlenség fennáll minden $c, d \in I$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén. Továbbá, ha a konvex f függvény differenciálható a nyitott I intervallumon, akkor az $y = f(x)$, $x \in I$, grafikon tetszőleges $(x_0, f(x_0))$ pontjában húzott érintő minden pontja a grafikon alatt vagy esetleg azon van (lásd a 4. ábrát).



4. ábra

Megjegyezzük, hogy a 3. és 4. ábrákból leolvasható *Hadamard* francia matematikus híres egyenlőtlensége (amelyet még 1893-ban talált), amelyben konvex függvény integrálközepére a következő alsó és felső becslést adta:

$$(4.2) \quad f\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(x)dx \leq \frac{f(c)+f(d)}{2}.$$

Mivel nyitott intervallumon konvex függvény szükségképpen folytonos is, ezért az f függvény Riemann integrálható. A második egyenlőtlenség fennállása (4.2)-ben a 3. ábra alapján nyilvánvaló, hiszen az f függvény grafikonja, az x -tengely és az $x = c, x = d$ függőleges egyenesek által határolt idom teljesen benne van a $\overline{P_1P_2}$ húr, az x -tengely és az $x = c, x = d$ egyenesek által határolt trapézban. Ezért az elsőként leírt idom területe (amelynek értékét a határozott integrál adja) nem lehet nagyobb, mint a másodikként leírt idom területe:

$$(4.3) \quad \int_a^b f(x)dx \leq (d-c) \frac{f(c)+f(d)}{2}.$$

Az első egyenlőtlenség (4.2)-ben pedig abból következik, hogy az $y = f(x)$ grafikon által felülről határolt idom területe (= a határozott integrál értéke) nem lehet kisebb, mint a $\left(\frac{c+d}{2}, f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right)$ pontban húzott érintő által felülről határolt trapéz területe. Az utóbbi terület viszont megegyezik annak a téglalapnak a területével, amelynek felső oldala az $y = f\left(\frac{c+d}{2}\right)$ egyenesen van (tekintve, hogy a két bevonalkázott háromszög egybevágó és ennek következtében azonos területű is):

$$(4.4) \quad \int_a^b f(x)dx \geq (d-c)f\left(\frac{c+d}{2}\right).$$

Megjegyezzük továbbá, hogy (4.3) speciális esete a határozott integrálok közelítő kiszámítására szolgáló trapéz formulának, míg (4.4) speciális esete az érintő formulának (amelyekre vonatkozóan a dolgozat végén a [3] alatt feltüntetett jegyzetre utalunk).

Ezen előzmények után rátérünk a konvex függvényeknek a címben jelzett jellemzésére. Mivel egy függvény szimmetrikus második deriváltja nem mindig létezik, ezért bevezetjük az alsó és felső Schwarz derivált fogalmát.

Definíció. Az f függvény *alsó Schwarz deriváltját* a

$$\underline{D}_2 f(x_0) := \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2},$$

a felső Schwarz deriváltját pedig a

$$\overline{D}_2 f(x_0) := \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}$$

képletekkel definiáljuk, amelyeknek értéke kiterjesztett valós szám. Ezeket röviden *Schwarz derivált számoknak* szokás nevezni.

4.1. Tétel. *Legyen az f függvény folytonos a nyitott I intervallumon.*

(i) *Ha f konvex I -n, akkor*

$$(4.5) \quad \underline{D}_2 f(x) \geq 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

(ii) *Ha*

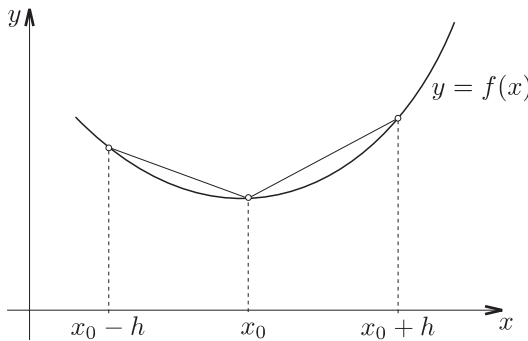
$$(4.6) \quad \overline{D}_2 f(x) \geq 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re,}$$

akkor f konvex I -n.

Bizonyítás. (i) Legyen $x_0 \in I$ tetszőleges és legyen $h > 0$ olyan kicsi, hogy még $x_0 \pm h \in I$. Mivel konvex függvény esetén a szelő meredeksége (= iránytangense) monoton nő, amint ez az 5. ábrán jól látható, ezért $h > 0$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} &= \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

A $h \rightarrow 0$ határátmenettel ez az egyenlőtlenség (4.5)-be megy át.



5. ábra

(ii) Két lépésben bizonyítunk. Először azt az erősebb feltételt tesszük fel (4.6) helyett, hogy

$$(4.7) \quad \overline{D}_2 f(x) > 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Azt, hogy ebben az esetben az f függvény konvex I -n, indirekt úton fogjuk bizonyítani. Ha ezen állítás tagadásából indulunk ki, vagyis abból, hogy az f függvény nem konvex I -n, akkor létezik I -nek olyan $[c, d]$ részintervalluma és létezik olyan $0 < \lambda < 1$ szám, amelyekre a (4.1) egyenlőtlenség nem teljesül, azaz ebben az esetben:

$$(4.8) \quad f(\lambda c + (1 - \lambda)d) > \lambda f(c) + (1 - \lambda)f(d).$$

Legyen $y = \ell(x)$ annak az egyenesnek az egyenlete, amely a $(c, f(c))$ és $(d, f(d))$ pontokon halad át. Jól ismert, hogy

$$(4.9) \quad \ell(x) = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c),$$

ahonnan az

$$(4.10) \quad x_0 := \lambda c + (1 - \lambda)d$$

helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \ell(x_0) &= f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}\{(\lambda - 1)c + (1 - \lambda)d\} = \\ &= f(c) + (1 - \lambda)\{f(d) - f(c)\} = \\ &= \lambda f(c) + (1 - \lambda)f(d). \end{aligned}$$

Nyilván $x_0 \in (c, d)$, továbbá a (4.8)–(4.11) összefüggésekből következik, hogy

$$f(c) = \ell(c), \quad f(x_0) > \ell(x_0) \quad \text{és} \quad f(d) = \ell(d).$$

Ezért a

$$(4.12) \quad g(x) := f(x) - \ell(x)$$

különbségre fennáll, hogy

$$g(c) = 0, \quad g(x_0) > 0 \quad \text{és} \quad g(d) = 0.$$

Az f függvény feltételezett folytonossága következtében (a lineáris ℓ függvény nyilván folytonos) a g függvény is folytonos $[c, d]$ -ben. Így g -nek a $[c, d]$ intervallum valamely x_0 belső pontjában maximuma van, $c < x_0 < d$. Ezért elég kicsi h -ra

(amelynek azért kell kicsinek lennie, hogy még $x_0 \pm h$ is a $[c, d]$ intervallumba essék) fennáll, hogy

$$(4.13) \quad g(x_0 + h) + g(x_0 - h) - 2g(x_0) \leq 0.$$

Egybevetve a (4.9), (4.12) és (4.13) összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) &\leq \ell(x_0 + h) + \ell(x_0 - h) - 2\ell(x_0) = \\ &= \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \{(x_0 + h - c) + (x_0 - h - c) - 2(x_0 - c)\} = 0. \end{aligned}$$

Innen pedig a $h \rightarrow 0$ határátmenettel $\overline{D}_2 f(x_0) \leq 0$ következik, ami ellentmond (4.7)-nek. Tehát (4.7) fennállása esetén az f függvény konvex az I intervallumon.

Ezután rátérünk az általános esetben való bizonyításra, amikor csak azt tesszük fel, hogy $\overline{D}_2 f(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -re (lásd (4.6)-ot). Vezessük be az

$$f_n(x) := f(x) + \frac{x^2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

függvényeket. Mivel

$$\overline{D}_2 f_n(x) = \overline{D}_2 f(x) + \frac{2}{n} > 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re,}$$

a fentebb már bizonyított részből következik, hogy az f_n függvények mindegyike konvex az I intervallumon.

Könnyen be tudjuk látni, hogy konvex függvények tetszőleges konvergens sorozatának határértéke is konvex. Ennek belátása céljából tekintsük a (4.1) egyenlőtlenséget az f helyett az f_n függvényekre, majd hajtsuk végre az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet. Az egyenlőtlenség a határérték függvényre is érvényes marad. Tehát a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) + \frac{x^2}{n} \right) = f(x)$$

függvény is konvex I -n. ■

A 4.1. Tétel következő három következményét érdemes korollárium formában is megfogalmaznunk.

4.2. Korollárium. *A nyitott I intervallumon folytonos f függvény akkor és csak akkor konvex I -n, ha a (4.6) feltétel teljesül.*

4.3. Korollárium. *Ha az f függvény folytonos a nyitott I intervallumon és a (4.6) feltétel teljesül, akkor a (4.5) feltétel is teljesül.*

4.4. Korollárium. *Legyen az f függvény kétszer differenciálható a nyitott I intervallumon. Az f akkor és csak akkor konvex I -n, ha*

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Valóban, a 2.2. Tétel szerint

$$D_2 f(x) = f''(x) \quad \text{minden } x \in I\text{-re}$$

fennáll, és ennek következtében az is fennáll, hogy

$$\underline{D}_2 f(x) = \overline{D}_2 f(x) = D_2 f(x) = f''(x) \geq 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

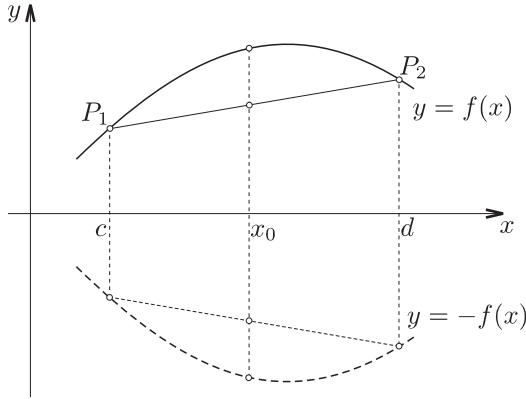
Bár eddig csak konvex függvényekkel foglalkoztunk, a feltételek mindegyike (triviális módosítással) átvihető konkáv függvényekre is.

Emlékeztetünk arra, hogy az f függvényt akkor nevezzük *konkávnak* az I intervallumon, ha tetszés szerinti $c, d \in I$ helyek esetén az $y = f(x)$ grafikon $P_1(c, f(c))$ és $P_2(d, f(d))$ pontjai közötti ív minden pontja a P_1 és P_2 pontokat összekötő húr felett vagy azon van.

A konkáv függvények tárgyalását teljes mértékben vissza tudjuk vezetni a konvex függvények tárgyalására azon elemi észrevétel alapján, hogy az f függvény akkor és csak akkor konkáv az I intervallumon, ha a $(-f)$ függvény konvex I -n (lásd a 6. ábrát). Így például (4.1)-ből következik, hogy az f függvény akkor és csak akkor konkáv I -n, ha az

$$f(\lambda c + (1 - \lambda)d) \geq \lambda f(c) + (1 - \lambda)f(d)$$

egyenlőtlenség fennáll minden $c, d \in I$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén.



6. ábra

A 4.1. Tétel analogonja konkáv függvényekre a következő.

4.5. Tétel. Legyen az f függvény folytonos a nyitott I intervallumon.

(i) Ha f konkáv I -n, akkor

$$\overline{D}_2 f(x) \leq 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

(ii) Ha

$$\underline{D}_2 f(x) \leq 0 \quad \text{minden } x \in I\text{-re,}$$

akkor f konkáv I -n.

Megjegyzés. A 4.1. és 4.5. Tételekből az is következik, hogy ha valamely f függvény konvex is és konkáv is az I intervallumon, akkor az f szükségképpen lineáris függvény. Ennek az állításnak a megfordítása triviálisan igaz. Ugyanis, ha $f(x) = Ax + B$ ahol A és B adott számok, akkor

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \equiv 0 \quad \text{minden } x\text{-re és } h\text{-ra;}$$

következésképpen $D_2 f(x) \equiv 0$. Tehát a 2.3. Tételt a 4.1. és 4.5. Tételekre támaszkodva is bizonyíthatjuk.

A konvex (illetve konkáv) függvények további tulajdonságai után érdeklődő olvasónak a dolgozat végén található [4] dolgozatot és [7] könyvet ajánljuk.

5. Síma függvények

Definíció. Legyen az f függvény értelmezve az x_0 hely valamely környezetében, azaz egy olyan nyitott I intervallumon, amely x_0 -t belsejében tartalmazza. Akkor mondjuk, hogy f *síma* (angolul: smooth) x_0 -ban, ha

$$(5.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h} = 0.$$

Nilvánvaló, hogy ha létezik a $D_2 f(x_0)$ szimmetrikus második derivált, akkor az f függvény síma x_0 -ban. Sőt, f már akkor is síma x_0 -ban, ha megadható olyan $\alpha > 1$ kitevő, amelyre az

$$(5.2) \quad \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^\alpha}$$

hányados korlátos az x_0 hely valamely környezetében.

Továbbá, ha az (5.1) határérték egyenletesen teljesül a nyitott $I := (a, b)$ intervallumon, azaz, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám úgy, hogy

$$\left| \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h} \right| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < h < \min\{\delta, x_0 - a, b - x_0\};$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény *egyenletesen síma* az I intervallumon.

Megjegyezzük, hogy a "síma" szó arra utal, hogy ha az f függvény síma x_0 -ban, akkor az $y = f(x)$ grafikon nem lehet "szögletes" az $(x_0, f(x_0))$ pontban abban az értelemben, hogy az f -nek a bal- és jobboldali érintőjének egy egyenesbe kell esnie (amennyiben léteznek). Emlékeztetünk arra, hogy az f függvény $f'_-(x_0)$ *baloldali* és $f'_+(x_0)$ *jobboldali deriváltját* az

$$f'_-(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

és

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határértékekkel definiáljuk feltéve, hogy ezek a határértékek léteznek. Könnyen belátható, hogy az $f'(x_0)$ derivált akkor és csak akkor létezik, ha az $f'_-(x_0)$ és $f'_+(x_0)$ féloldali deriváltak léteznek és egyenlők, amely esetben

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

A fenti megjegyzésben levő állításunk precíz megfogalmazása a következő. Ha az f függvény sima x_0 -ban, és az $f'_-(x_0)$ és $f'_+(x_0)$ féloldali deriváltak egyike létezik, akkor a másik is létezik és a kettő egyenlő. Ez valóban így van, mivel (5.1) szerint

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h} = \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \rightarrow 0, \text{ ha } h \rightarrow 0, h > 0. \end{aligned}$$

Ennél erősebb állítást bizonyítunk a következő tételben.

5.1. Tétel. *Ha az f függvény sima x_0 -ban és a $D_1f(x_0)$ szimmetrikus derivált létezik, akkor az $f'(x_0)$ derivált is létezik és a kettő egyenlő.*

Bizonyítás. A tétel feltételei szerint a (2.1) és (5.1) határértékek léteznek. Ha (2.1)-et a

$$(5.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = 2D_1f(x_0)$$

alakban írjuk fel, majd az itt szereplő differenciahányadost összeadjuk az (5.1)-ben szereplő differenciahányadossal, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{2f(x_0 + h) - 2f(x_0)}{h} = 2D_1f(x_0),$$

amiből az következik, hogy $f'_+(x_0) = D_1f(x_0)$. Ha pedig a fentebbi két differenciahányadosnak a különbségét vesszük, akkor azt kapjuk, hogy

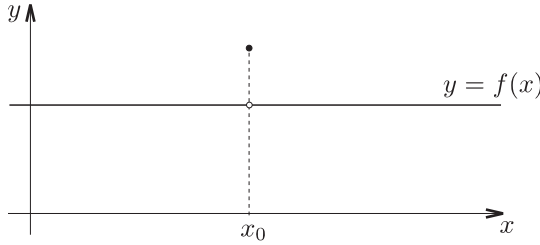
$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{2f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h} = -2D_1f(x_0),$$

amiből az következik, hogy $f'_-(x_0) = D_1f(x_0)$. Tehát $f'(x_0)$ is létezik és $f'(x_0) = D_1f(x_0)$. ■

Definíció. Az f függvényt akkor mondjuk *szimmetrikusan folytonosnak* az x_0 helyen, ha

$$(5.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)\} = 0.$$

Nyilvánvaló, hogy ha f folytonos x_0 -ban, akkor szimmetrikusan is folytonos x_0 -ban. De f lehet szimmetrikusan folytonos x_0 -ban úgy is, hogy x_0 -ban nem folytonos (lásd a 7. ábrát).



7. ábra

Emlékeztetünk arra, hogy ha az f függvény integrálható valamely $I := (a, b)$ intervallumon (a Riemann integrál, vagy a Lebesgue integrál értelmében), akkor f *integrálfüggvényének* az

$$(5.5) \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt + C, \quad x \in [a, b],$$

alakú függvényeket nevezzük, ahol C tetszőleges állandó lehet.

5.2. Tétel. *Ha az f függvény integrálható az $I := (a, b)$ intervallumon és szimmetrikusan folytonos az $x_0 \in I$ helyen, akkor az F integrálfüggvénye síma x_0 -ban.*

Bizonyítás. A határozott integrál additív tulajdonságát kihasználva, (5.5) szerint írhatjuk, hogy

$$(5.6) \quad \begin{aligned} F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0) &= \\ &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_a^{x_0-h} f(t)dt - 2 \int_a^{x_0} f(t)dt = \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0-h}^{x_0} f(t)dt = \\ &= \int_0^h \{f(x_0 + u) - f(x_0 - u)\}du. \end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. (5.4) szerint megadható $\delta = \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy

$$|f(x_0 + u) - f(x_0 - u)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < h < \min\{\delta, x_0 - a, b - x_0\} =: \bar{\delta}.$$

Ezt (5.6) jobboldalába helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0)| &\leq \int_0^h |f(x_0 + u) - f(x_0 - u)|du \\ &\leq \int_0^h \varepsilon dt = \varepsilon h, \quad \text{ha} \quad 0 < h < \bar{\delta}. \end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, az így kapott egyenlőtlenség bizonyítja, hogy F síma x_0 -ban. ■

Mivel zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen is folytonos, az alábbi korollárium az 5.2. Tételből következik.

5.3. Korollárium *Ha az f függvény folytonos a zárt $[a, b]$ intervallumon, akkor az F integrálfüggvénye egyenletesen síma a nyitott (a, b) intervallumon.*

A síma függvények további érdekes tulajdonságát mutatjuk be a következő tételben.

5.4. Tétel. *Ha az f függvény síma a nyitott I intervallumon és f -nek lokális szélsőértéke (azaz, maximuma vagy minimuma) van az $x_0 \in I$ helyen, akkor f differenciálható x_0 -ban és $f'(x_0) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $h > 0$ és tekintsük a símaság (5.1) definíciójában szereplő hányadost:

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}.$$

Ha f -nek x_0 -ban maximuma van, akkor a jobboldalon mindkét differenciahányados értéke ≤ 0 ; míg ha f -nek x_0 -ban minimuma van, akkor a jobboldalon mindkét differenciahányados értéke ≥ 0 . Tekintve, hogy a baloldal 0-hoz tart, ha $h \rightarrow 0$, ezért mindkét esetben a jobboldalon levő két differenciahányadosnak is 0-hoz kell tartania, ha $h \rightarrow 0$. Tehát

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0,$$

ami azzal ekvivalens, hogy $f'(x_0) = 0$. ■

Megjegyzés. A síma függvények elnevezésük ellenére nem feltétlenül differenciálhatók "majdnem minden" pontban. Sőt megadható olyan függvény is, amely egyenletesen síma valamely intervallumon és ennek ellenére az intervallum "majdnem minden" pontjában nem létezik a deriváltja. Itt a "majdnem minden" pont kifejezést a Lebesgue mérték értelmében használjuk. Más szóval, nullamértékű a szóban forgó intervallum azon pontjainak H halmaza, amelyekben a derivált létezik.

Definíció. A valós számok egy H halmazát akkor nevezzük *nullamértékűnek*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható nyitott intervallumoknak olyan véges vagy

végtelen $\{I_n : n = 1, 2, \dots\}$ sorozata, amelyeknek egyesítése (úniója) tartalmazza (lefedi) a H halmaz minden pontját, és ezen I_n intervallumoknak az összhossza kisebb, mint az előre megadott ε (lásd részletesebben *Szőkefalvi-Nagy Béla* [6] könyvében).

Bolzano cseh és *Weierstrass* német matematikusok adtak példát a 19. században olyan folytonos függvényekre, amelyek egyetlen pontban sem differenciálhatók. *Khintchine* orosz matematikus bizonyította (lásd a [2] cikket a Forrásmunkák jegyzékében a dolgozat végén), hogy egy folytonos függvény majdnem minden olyan pontban differenciálható, amelyben a szimmetrikus deriváltja létezik.

Az ebben a részben tárgyalt kérdésekről az érdeklődő olvasó *Bary* orosz matematikus [1] könyvében és *Zygmund* lengyel matematikus [8] könyvének első kötetében tájékozódhat bővebben.

6. A derivált függvény Darboux tulajdonsága

Jól ismert, hogy zárt intervallumon folytonos függvény két értéke között minden értéket felvesz. Részletesebben szólva ez azt jelenti, hogy ha az f függvény folytonos az I intervallumon, akkor bármely $c, d \in I$ helyek és bármely olyan y szám esetén, amely az $f(c)$ és $f(d)$ függvényértékek közé esik, létezik olyan x hely c és d között, amelyre $f(x) = y$. Ezt a tulajdonságot nevezhetjük a *közbeeső érték tulajdonságnak* (angolul: intermediate value property).

Meglepő, hogy tetszőleges differenciálható f függvény f' deriváltja is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal annak ellenére, hogy az f' derivált nem feltétlenül folytonos függvény. Az alábbi tételt *Darboux* francia matematikus bizonyította 1875-ben.

6.1. Tétel. *Ha az f függvény differenciálható a nyitott I intervallumon, akkor az f' deriváltja ott rendelkezik a közbeeső érték tulajdonsággal.*

A tétel következtében a közbeeső érték tulajdonságot az irodalomban gyakran *Darboux tulajdonságnak* is nevezik.

Bizonyítás. Legyen $c, d \in I$ és legyen y tetszőleges, az $f'(c)$ és $f'(d)$ közé eső érték. Tegyük fel például, hogy

$$(6.1) \quad f'(c) < y < f'(d).$$

Bevezetjük a

$$(6.2) \quad g(x) := yx - f(x)$$

segédfüggvényt. Mivel f differenciálható I -n, ezért ott folytonos is. Így g folytonos a $[c, d]$ zárt intervallumon. A zárt intervallumon folytonos függvényekre jólismert tétel szerint van olyan ξ hely $[c, d]$ -ben, ahol g a legnagyobb értékét (maximumát) veszi fel. (6.1) és (6.2) alapján

$$g'(c) = y - f'(c) > 0 \quad \text{és} \quad g'(d) = y - f'(d) < 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a g függvény az $x = c$ hely elég kis környezetében szigorú értelemben monoton növekvő, míg az $x = d$ hely környezetében szigorú értelemben monoton csökkenő. Ennek következtében a g függvény a c -től jobbra és hozzá elég közel eső helyeken $g(c)$ -nél nagyobb értékeket vesz fel, a d -től balra és ahhoz elég közeli helyeken pedig $g(d)$ -nél nagyobb értéket vesz fel. Következésképpen a ξ hely, ahol a folytonos g függvény a $[c, d]$ -beli maximumát éri el, ezen intervallum belsejébe esik. Mivel a g függvény differenciálható az I intervallumon, ezért deriváltja eltűnik ξ -ben:

$$g'(\xi) = y - f'(\xi) = 0, \quad \text{azaz} \quad f'(\xi) = y.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

A most bebizonyított tételből az is következik, hogy ha az f' derivált valamely intervallumon sehol sem 0, akkor ott állandó előjelű.

Példa. Megadható olyan differenciálható f függvény, amelynek f' deriváltja nem folytonos, sőt nem is korlátos az intervallum egy belső pontjában.

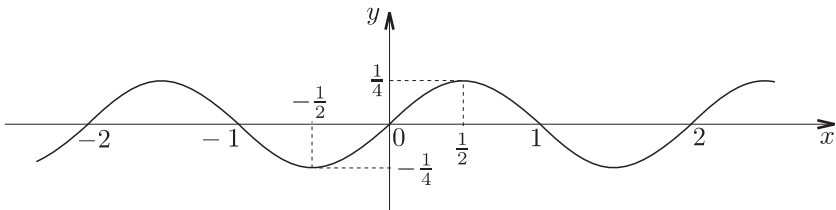
Ezen állításunk bizonyítása céljából először az alábbi g segédfüggvényt definiáljuk: legyen

$$g(x) := \begin{cases} x(1-x), & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ x(1+x), & \text{ha } -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

továbbá minden x -re legyen

$$g(x+2) := g(x)$$

(lásd a 8. ábrát).



8. ábra

Nyilván g páratlan függvény,

$$(6.3) \quad g(n) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

és g differenciálható az $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ helyeken. Azt is egyszerűen ellenőrizhetjük, hogy g differenciálható az $x = 0, \pm 1, \pm 2$ helyeknek is, mégpedig

$$g'(0) = 1 \quad \text{és} \quad g'(1) = -1;$$

és a periodicitás következtében

$$(6.4) \quad g'(2n) = 1 \quad \text{és} \quad g'(2n-1) = -1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Például $x = 0$ és $h > 0$ esetén

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1-h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1-h) = 1,$$

míg $h < 0$ esetén

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h) = 1;$$

tehát valóban g differenciálható $x = 0$ -ban és $g'(0) = 1$.

Ezen előzmények után a fenti Példában szereplő $f(x)$ függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 g\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ez a függvény az $x = 0$ helyen is differenciálható, mivel

$$f'(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} hg\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0,$$

tekintve, hogy a g függvény korlátos. Az f függvény deriváltját valamely $x \neq 0$ helyen a Kalkulusból jól ismert szabályok szerint számíthatjuk ki:

$$f'(x) = 2xg\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}g'\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0.$$

Ha n tetszőleges pozitív egész szám, akkor

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2n}}g(2n) - 2\sqrt{2n}g'(2n).$$

Figyelembevéve (6.3)-at és (6.4)-et innen adódik, hogy

$$f' \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = -2\sqrt{2n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Hasonló gondolatmenettel nyerjük, hogy

$$f' \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right) = 2\sqrt{2n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Tehát az f' derivált az $x = 0$ hely környezetében sem felülről, sem alulról nem korlátos.

A fenti példa és még további érdekes példák találhatók Szász Pál [5] könyvének első kötetében.

Forrásmunkák

- [1] N.K. Bary, A Treatise on Trigonometric Series, Pergamon Press (Oxford, 1964).
- [2] A. Khintchine, Recherches sur la structure des fonctions mesurables, Fund. Math., 9(1927), 212–279.
- [3] Móricz Ferenc, Numerikus Analízis I., Tankönyvkiadó (Budapest, 1978).
- [4] Móricz Ferenc, Konvex és konkáv függvények, Polygon, 13:1(2003), 29–50.
- [5] Szász Pál, Differenciál- és Integrálszámítás elemei, Typotex (Budapest, 2000).
- [6] Szőkefalvi-Nagy Béla, Valós Függvények és Függvénysorok, Tankönyvkiadó (Budapest, 1955).
- [7] R. Webster, Convexity, Oxford Univ. Press, 1994.
- [8] A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge Univ. Press, 1959.

Móricz Ferenc, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
 moricz@math.u-szeged.hu

