

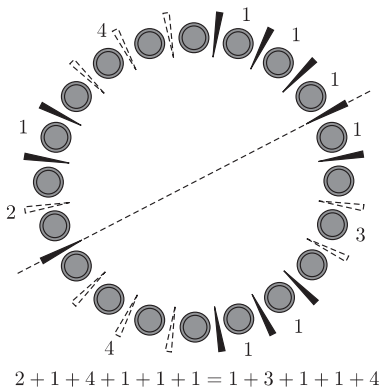
Partíciós gyakorlatok

PATAKI JÁNOS

Bevezetés Az alábbi feladatkör egy részét a mátrafüredi MaMut táborban dolgoztuk fel 2008. augusztusában 9. évfolyamos diákokkal. A probléma igen természetes és nagyon gazdag, számos matematikai gondolatot mozgósít. Az egyes részállítások bizonyítása során látszólag kiaknázzuk a feltételek adta lehetőségeket, aztán kiderül, hogy a módszer finomításával, illetve új megközelítéssel erősebb eredmény kapható. A kiinduló feladatot a 80-as évek végén tűzték ki az Arany Dániel verseny döntőjében a haladó spec. mat. kategóriában.

Első változat. 51 pozitív egész szám összege 100. Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő $-50 - 50$ - összegű csoportba oszthatók.

1. megoldás. Rendezzünk el 100 zsetont egy kör mentén, az 51 számot pedig közéjük illesztett összesen 51 pöcckel jelöljük ki úgy, hogy a szomszédos pöccök által közrefogott zsetonok száma rendre egy-egy adott számmal legyen egyenlő. Ekkor egy pöcc és annak a kör középpontjára vonatkozó tükörképe éppen 50 zsetont fog közre. Mivel a 100 zseton között pontosan 100 „köz” van, az 51 pöccök és 51 tükörképük nem lehetnek valamennyien különbözők: van olyan pöcc, amelynek a tükörképében is pöccök van: ez a két átellenes pöccök pedig megvalósítja a kívánt felosztást.



Vadon Viktória megoldása

Az ábra 20 zsetonra és 11 számra illusztrálja a gondolatmenetet. ■

A továbbiakban nevezzük pozitív egészek egy listáját *felezhetőnek*, ha a lista számai két egyenlő összegű csoportba oszthatók. A lista számainak az összegét hívjuk egyszerűen a *lista összegének*, a lista elemeinek a számát pedig a *lista méretének*. Egy t méretű $\mathcal{L}$ listát $\mathcal{L}_t$ -vel jelölünk, az $\mathcal{L}$ lista méretét $|\mathcal{L}|$, összegét pedig $s(\mathcal{L})$ jelöli. Eszerint ha $|\mathcal{L}| = 51$ és $s(\mathcal{L}) = 100$, akkor az $\mathcal{L}$ lista felezhető. Ez a tulajdonság a lista méretében nyilván monoton: ha egy 100 összegű lista mérete nagyobb 51-nél, akkor a lista nyilván felezhető.

Megjegyzések. 1.) Számok *listájáról* beszélni talán tudálékosan hangzik, de itt pontatlan volna halmazokat emlegetni, hiszen az adott számok között lehetnek egyenlők is: az egyes értékeket a gyakoriságokkal együtt vesszük figyelembe. A *lista* elemeiről a továbbiakban értelemszerűen fölteszük, hogy pozitív egészek.

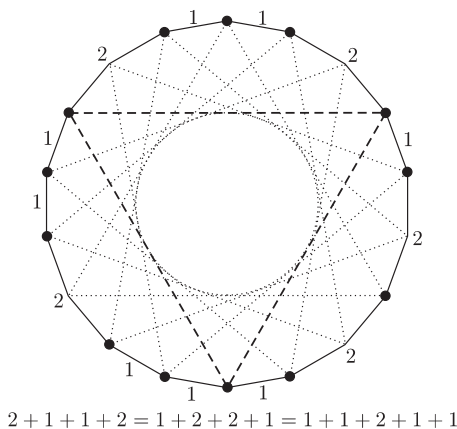
2.) A bizonyítás ugyanígy működik, ha egy $(m + 1)$ méretű lista összege $2m$. A kapott általános eredmény úgy is fogalmazható, hogy ha egy lista átlaga kisebb mint 2 és az összege páros, akkor a lista felezhető. Most el lehet gondolkodni a következő feladaton:

1. feladat. 41 pozitív egész szám összege 60. Bizonyítsuk be, hogy a számok beoszthatók három egyenlő összegű csoportba.

3.) Aki azonnal tovább olvas, annak a feladat már nem lesz túl érdekes; *Csajbók Bence* észrevette, hogy az 1. megoldás ötlete természetes módon kiterjeszthető:

Legyen $S = q \cdot n$, és tegyük fel, hogy S előáll $m = 1 + (q - 1) \cdot n$ darab pozitív egész összegeként. Ekkor ezek a pozitív egészek q csoportba oszthatók úgy, hogy mindegyik csoportban ugyanannyi a számok összege.

Vegyünk ugyanis egy szabályos S -oldalú sokszöget. Ha ennek pirosra festjük m darab csúcsát, azzal megadjuk a sokszög S darab élének egy m elemű partícióját, és így S felbontását m darab egész szám összegére. Megfordítva, S bármely partíciója megkapható megfelelő csúcsok kijelölésével.



Tekintsük most azokat a szabályos q -szögeket, amelyeknek a csúcsai az S csúcsai közül valók! Ilyen sokszög $S/q = m$ darab van és ezek természetesen diszjunktak. (A közölt megoldásban $q = 2$, a szabályos „2-szögek” pedig átmérők.)

A *skatulya elv* biztosítja, hogy van olyan szabályos q -szög, amelynek minden egyes csúcsa piros. Ez a q csúcs pedig megadja az élek – és így az S – egy igazságos q -részre bontását. ■

4.) Az állítás jellege alapján várható hogy felbukkan a *skatulya elv*. A most következő bizonyítás is ezt aknázza ki egy örökzöld feladat eredményének újra-hasznosításával. A feladatra általában ezt a megoldást szokták megtalálni; ez nem csoda, hiszen a bizonyításban felhasznált eredmények folklór.

2. megoldás. Ismert – és kezdőknek nagyon nehéz – feladat a következő: m darab pozitív egész között létezik néhány – esetleg csak egy – amelyek összege osztható m -mel. Ha a számok $d_1, d_2, \dots, d_m$, akkor a szokásos bizonyítás szerint ha az alábbi

$$\begin{array}{c} d_1 \\ d_1 + d_2 \\ \vdots \\ d_1 + d_2 + \dots + d_m \end{array}$$

összesen m darab összeg között nincs m -mel osztható, akkor legfeljebb $(m-1)$ -féle maradékot adhatnak m -mel osztva. Van tehát két egyenlő maradékot adó összeg, ezek különbsége pedig a kívánt típusú és valóban osztható m -mel.

Hagyjuk most el az 51 szám egyikét; bármelyiket. A fenti eredmény szerint a megmaradó 50 darab szám között van néhány, amelyek összege osztható 50-nel. Minden összeg határozottan pozitív és kisebb, mint 100, az egyetlen lehetőség, hogy az 50-nel osztható összeg éppen 50. ■

Megjegyzések. 1.) Tanulságos, ahogyan egy *gyengébb* állítás – létezik 50-nel *osztható* összeg – nyomán kapjuk az eredményt.

2.) Ezek után az a benyomása támadhat az embernek, hogy itt nincs szükség mind az 51 darab számra, hiszen az első lépésben minden további nélkül elhagyhatunk közülük egyet. Igazság szerint azt bizonyítottuk be, hogy ha 50 pozitív egész összege kisebb 100-nál, akkor van a számok között néhány, amelyeknek 50 az összege.

Érdekes figyelni arra, hogy ebben a megfogalmazásban megtörik a feladat eredeti szimmetriája: „*Keressünk két egyenlő összegű részhalmazt!*” helyett úgy vetődik föl a kérdés, hogy „*Keressünk 50 összegű részhalmazt!*” Ez így csak árnyaltnyi hangsúlyeltolódás, de valójában többről van szó: általában is igen hatékony

bizonyítási stratégia, ahogy a feladat egy konstansát egy *változó mennyiség adott értékének tekintve* azt kérdezzük, hogy a speciális 50 helyett *általában* milyen t -re van t -összegű lista a megadott számokon? A későbbiekben kiderül, hogy ha $m + 1$ pozitív egész összege $2m$, akkor ez *minden* $1 \leq t \leq 2m$ egészre teljesül.

2. feladat. *Bizonyítsuk be ezt az állítást.*

3.) Az eddigi bizonyítások nem vették figyelembe a megadott számok listájának a szerkezetét. A további megoldásokban különböző szinten vizsgáljuk ezt a listát. Az első közülük – na végre! – teljes indukció – a következő pedig váratlan környezetbe helyezi a feladatot.

3. megoldás. Az m -re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy ha $m + 1$ pozitív egész szám összege $2m$, akkor a számok két egyenlő összegű csoportba oszthatók. Ha $m = 1$, akkor a feltétel szerint két pozitív egész összege 2, ami csak úgy lehetséges, ha mindkettő 1, az állítás igaz.

Legyen most $m > 1$ és tegyük föl, hogy az állítás igaz minden, m -nél kisebb számra. Tekintsünk $m + 1$ darab pozitív egészt, amelyek összege tehát $2m$. A számok átlaga, $\frac{2m}{m+1}$ kisebb mint 2, azért van köztük 1-es és mivel $m > 1$, az átlag most 1-nél nagyobb, a számok között van 1-nél nagyobb is. Hagyjunk el a számaink közül egy darab 1-est, az egyik 1-nél nagyobb számot pedig csökkentsük 1-gyel. Így 1-gyel kevesebb, $m = (m - 1) + 1$ darab pozitív egészhez jutunk, az összegük pedig 2-vel csökkent, tehát $2m - 2 = 2(m - 1)$.

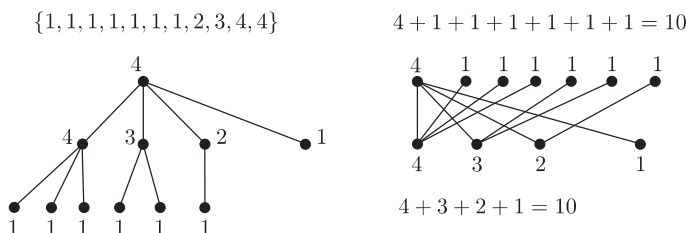
Az indukciós feltevés szerint ez az $m = (m - 1) + 1$ darab szám két egyenlő összegű csoportba osztható. A két csoport egyikében ott van az 1-gyel csökkentett eredeti szám, ennek adjuk vissza korábbi értékét, a másik csoporthoz pedig vegyük hozzá a félretett 1-est. Ezzel megvalósítottuk az $m + 1$ szám igazságos felosztását. ■

3. feladat. *Érdemes visszalapozni a 2. feladatra, mit is ér ez az indukció.*

Megjegyzés. Tapasztalataim szerint az indukciós bizonyítás elég nehezen születik meg. A megoldásból látszik az 1-esek szerepe: velük lehet „finomra vágni” a közéltő egyenlőséget. Mielőtt mutatnék egy olyan okoskodást, amelyik ténylegesen ezt valósítja meg, az olvasó figyelmébe ajánlom az iménti megoldás egy egy meglepő variánsát.

3'. megoldás. Az előző bizonyítás ismerős lehet: szó szerint ez az indukció bizonyítja be azt a gráfelméleti tételecskét, amelyik azt mondja ki, hogy ha a pozitív egész $d_1, d_2, \dots, d_m$ számokra $d_1 + d_2 + \dots + d_m = 2m - 2$ ($= 100$), akkor létezik olyan m ($= 51$) csúcsú fa (összefüggő, körmentes gráf), amelyben az egyes csúcsok

fokszámai rendre $d_1, d_2, \dots, d_m$. Ebben a fában pedig már csak le kell olvasni a mi feladatunk állítását ...



Elég arra hivatkozni, hogy egy fa *páros gráf*. A csúcsok halmazát ennek megfelelően két osztályba sorolva éppen a fokszámsorozat egyenlő összegű felosztását kapjuk: páros gráfban az egyik osztályból kilépő élek a másik osztály csúcsaiba futnak, a két osztály csúcsaiból kilépő élek száma egyenlő. ■

4. megoldás – a kiegyensúlyozó algoritmus. Tetszőleges $i \geq 1$ egészre jelöljük f_i -vel az i érték *gyakoriságát* – tehát az előfordulásainak a számát – a megadott számok között. Ekkor nyilván

$$\sum_{i=1}^{51} i \cdot f_i = 100.$$

Ha a $d > 1$ érték előfordul a számaink között, akkor a d -től különböző 1-nél nagyobb értékeket 2-vel becsülhetjük alulról, és így

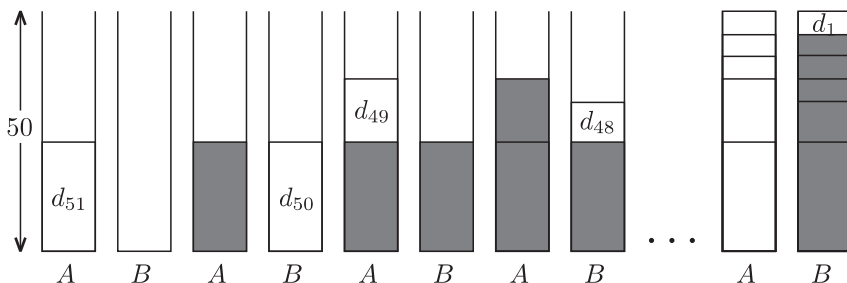
$$(f_1) \quad f_1 \cdot 1 + (51 - f_1 - 1) \cdot 2 + 1 \cdot d \leq 100.$$

Innen $d \leq f_1$, tehát minden 1-nél nagyobb d értékhez van a számok között legalább d darab 1-es. Ezt persze elegendő a számok maximumára kimondani, bár $d = 1$ -re azt a trivialitást adja, hogy a megadott feltételek esetén a legalább két 1-es van a számok között.

Megmutatjuk, hogy az alábbi *kiegyensúlyozó algoritmus* igazságos felosztást valósít meg.

Nyissunk két üres listát, $\mathcal{A}$ -t és $\mathcal{B}$ -t és a legnagyobb számmal kezdve – legyen ez d – egyesével, csökkenő sorrendben tegyük a számokat a két lista valamelyikébe az alábbiak szerint:

- ha a két lista számainak összege egyenlő, akkor a következő számot tegyük az $\mathcal{A}$ listába. (Így például d az $\mathcal{A}$ listába kerül.)
- ha a két lista számainak az összege különböző, akkor a soronkövetkező szám kerüljön abba a listába, amelyben a számok összege *kisebbséget* képez.



Vegyük észre, hogy a két lista összegének eltérése egyik lépés után sem haladja meg d értékét: ezt maga az eljárás biztosítja. Így aztán akkor is ez a helyzet, ha már elhelyeztük valamennyi 1-nél nagyobb számot. Láttuk, hogy ekkor még legalább d darab 1-esünk van, ezekkel tehát biztosan helyreállítható az egyensúly. Ebben az egyensúlyi helyzetben a két listában egyenlő a számok összege, az eddig elhelyezett számok összege tehát *páros*. Ebből azonnal adódik, hogy a még nyakunkon maradt 1-esek száma is páros. (Lehetséges persze, hogy egy sem maradt.) Felváltva rakosgatva őket a két listába az egyensúly az eljárás végén is helyreáll. ■

Lakos Gyula megoldása

Megjegyzések 1.) Ez a megoldás természetes módon szövegeezhető, ha a számokra súlyokként hivatkozunk, az eljárás során pedig ezeket a súlyokat kell egy kétkarú mérleg két serpenyőjében elhelyezni úgy, hogy a végén egyensúlyban legyen a mérleg.

2.) Szemben a korábbi egzisztenciabizonyításokkal ez a kiegyensúlyozó algoritmus ténylegesen elő is állít egy igazságos felosztást. Az eljárás tulajdonképpen kézenfekvő, egy háziasszony nyilván így fogna a dologhoz. Az más kérdés, hogy hajlandó volna-e az 1-esek számára vonatkozó becslés kiszámolására is. :-) A bizonyításból kiderül, hogy a „felhasználónak” szerencsére nincs szüksége ilyesmire: az egyensúly automatikusan létrejön, nincs más teendő, mint pakolni.

Eddig megvolnánk. A bizonyítások elegánsak és mintha kiaknáznák a feladat feltételeit. Szemügyre véve az első két bizonyítást, ott ha nem is többet, de valamivel erősebb állítást igazoltunk: a számok *tetszőlegesen rögzített sorrendjéhez* vannak olyan, ebben a sorrendben ciklikusan szomszédos számok, amelyek összege 50. Ez azt mutatja, hogy igen sok ilyen összeg lehet, nem nagy csoda, hogy sikerült ilyet találnunk. Az is gyanús lehet, ahogy a második megoldásban egy számot – akármelyiket – egyszerűen félretehettünk.

Elképzelhetőnek látszik, hogy már *kevesebb* mint 51 szám jelenléte is biztosítja az igazságos felosztást. Nos, a következő 50 darab szám: $51 + 49 \cdot 1$ mutatja, hogy

ilyesmi általában nem várható. Itt persze az a baj, hogy az 51 túl nagy. Ha a feltételhez hozzávesszük azt a természetes megszorítást – erre 51 szám esetén nincs szükség (miért?) – hogy a számok között nincs 50-nél nagyobb, akkor a következőt kapjuk:

Második változat. 50 pozitív egész összege 100 és egyikük sem nagyobb 50-nél. Ekkor a számok két egyenlő összegű csoportba oszthatók.

Megjegyzés. Ez az állítás közvetlenül nem általánosítható: ha m darab szám összege $2m$, akkor még úgy sem rendezhetők feltétlenül két egyenlő összegű csoportba, ha feltesszük, hogy egyikük sem nagyobb mint m , a lista mérete: például 15 – vagy általában, páratlan sok – 2-esből nem lehet az összegük felét előállítani, az most páratlan. (Ez elbizonytalaníthatja azokat, akik ismét indukcióval próbálkoznak.) Még ha érzi is az ember, hogy várhatóan ez az egyetlen kivétel, – így van – az általában szükséges további megszorítás, hogy az m értékének párosnak kell lennie, némileg elbonyolítja a feladat feltételrendszerét.

Ami a bizonyítást illeti, ha az embernek nincs új ötlete, akkor vagy valamilyen *bizonyítást* próbál megpatkolni, vagy pedig a gyengébb *állítást alkalmazásával* kísérletezik az új helyzetben. Nézzük az első lehetőséget:

A 2. megoldás – újratöltve. Feltehető, hogy a számok nem mind egyenlők, akkor ugyanis 50 darab 2-esünk van, továbbá az is, hogy mindegyikük határozottan kisebb 50-nél. Legyen tehát $d_1 \neq d_2$ és ismét távolítsunk el egyet a megmaradó számok közül, majd tekintsük megint a következőt, ezúttal csak 49 részletösszeget (mod 50):

$$d_1, \quad d_1 + d_2, \quad d_1 + d_2 + d_3, \quad \dots, \quad d_1 + d_2 + \dots + d_{49}.$$

Ha egyikük 0 vagy van köztük két egyenlő, akkor az eredeti megoldás szellemében készen vagyunk, így az az eset marad, ha éppen a 49 *nem nulla* maradékot soroltuk fel valamilyen sorrendben (mod 50). Ha most a fenti listában a legelső elemet, d_1 -et kicseréljük d_2 -re, akkor a további összegek változatlanok. Ha tehát ekkor sem kapunk megoldást, akkor $d_1 \equiv d_2 \pmod{50}$, ahonnan most $d_1 = d_2$ következik, ami ellentmondás. ■

Megjegyzések 1.) Ami a stratégiát – ha rövid a bizonyítás, toldd meg egy lépéssel – illeti, valójában a felhasznált *segéd-tételt javítottuk fel*, a bizonyításhoz ezután már hozzá se kellett nyúlni. Azt igazoltuk ugyanis, hogy $m - 1$ egész szám között vagy van néhány, amelyek összege osztható m -mel, vagy pedig valamennyi szám ugyanazt a maradékot adja m -mel osztva. (Páros m -re persze ilyenkor is van m -mel osztható összeg.) Vagy másképpen: ha az $m - 1$ elemű listában legalább kétféle

maradék fordul elő mod (m) , akkor a listának van m -mel osztható összegű része is. Az ember megpróbálkozhat ennek a segédételnek a további kiterjesztésével.

4*. feladat. (Tardos Gábor) *Legyen $m > 1$ pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathcal{L}$ listában több mint $m - |\mathcal{L}|$ maradék fordul elő mod m , akkor a lista elemeiből készíthető m -mel osztható összeg.*

2.) Ebben a megközelítés az egész partíciós modellt más környezetbe kerül. Az alapfeladat 2. megoldása azt adja, hogy egy 51 elemű listának van olyan valódi része, amelyben az elemek összege osztható 50-nel. (***) ezt még meg kell nézni

5. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha 49 egész összege kongruens 0-val mod 100, akkor van olyan részletösszeg, amelyik kongruens 0-val mod 50.*

3.) Az 5. feladatban egy kicsit előreszaladtunk; a kérdésre még visszatérünk, de előbb nézzük meg, mire megy a 100 összegű 50 elemű lista elfelezésével a 4. megoldás kiegyensúlyozó algoritmus.

A 4. megoldás – újratöltve. A 4. megoldás kiegyensúlyozó algoritmusának sikeres lefutásához szükség volt az 1-esek gyakoriságára kapott becslésre. Most már meg-
eshet, hogy a listában egyáltalán nincs 1-es, ilyenkor persze 50 darab 2-esünk van és a lista triviálisan felezhető.

Legyen most is d az $\mathcal{L}_{50}$ lista legnagyobb eleme és ha föltesszük, hogy nem az azonosan 2 listáról van szó, akkor $d > 2$. A 4. megoldás (f_1) becsléséhez hasonlóan most is felírhatjuk, hogy

$$(f_1)' \quad f_1 \cdot 1 + (50 - f_1 - 1) \cdot 2 + 1 \cdot d \leq 100,$$

ahonnan ezúttal $d - 2 \leq f_1$ adódik. Indítsuk el ismét a kiegyensúlyozó algoritmust és állítsuk meg a filmet abban a pillanatban, amikor fölkerültek a serpenyőkbe az 1-nél nagyobb súlyok. A két serpenyő eltérése most sem haladhatja meg d értékét. Ha van elegendő 1-es az egyensúly helyreállításához, akkor a 4. megoldás gondolatmenete szerint az algoritmus elfelezi a listát. Ha nincs, akkor még mindig tegyük be az 1-eseket a könnyebbik serpenyőbe. Ezek után a két serpenyő eltérése páros (az összegük páros) és mint láttuk, legfeljebb 2: az eltérés eszerint *pontosan* 2. Ez csak úgy lehetséges, ha az 1-esek felrakása előtt az eltérés éppen d volt, amiből több dolog következik: egyrészt hogy $f_1 = d - 2$, másrészt hogy az 1-nél nagyobb listaelemek között *nem lehet d -nél kisebb*, végül az is hogy f_d páratlan.

Ha tehát a kiegyensúlyozó algoritmus nem egyensúllyal ér véget, az lényegében meghatározza az $\mathcal{L}_{50}$ lista szerkezetét:

$$(K_{50}) \quad \mathcal{L}_{50}^* = \underbrace{\{1, 1, \dots, 1\}}_{d-2} \underbrace{\{d, \dots, d\}}_{\text{ptlan}}!$$

Innen a lista összege

$$100 = (d - 2) \cdot 1 + (50 - d + 2) \cdot d$$

ahonnan

$$(Q) \quad 0 = d^2 - 53d + 102 = (d - 2)(d - 51).$$

Mivel $d > 2$, az egyetlen lehetőség, ha $d = 51$; az így adódó lista ugyan nem felezhető, de ezt a kiegészítő $d \leq 50$ feltétellel kizártuk. ■

Megjegyzések 1.) Elhangzott, hogy egy erősebb állítás bizonyításakor nem csak a korábban bevált módszert, hanem magát az állítást is megkísérelhetjük felhasználni. Hogy ezzel most újabb bizonyítást kapunk-e, az majd kiderül...

Bővítsük ki az $\mathcal{L}_{50}$ listát két extra 1-essel. A kapott

$$\mathcal{L}_{52} = \{1, 1, d_1, d_2, \dots, d_{50}\}$$

listában nyilván $s(\mathcal{L}_{52}) = 102 = 2 \cdot 51$. Az alapfeladat általános változata szerint ez a lista minden további nélkül felezhető, a számok két 51 összegű $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ listába rendezhetők. Ha mind a két lista tartalmaz 1-est, akkor ezeket eltávolítva az eredeti számok igazságos felosztását kapjuk. Tegyük fel tehát, hogy a felezés nyomán az f_1 darab $\mathcal{L}_{52}$ -beli 1-es mindegyike ugyanoda, mondjuk az $\mathcal{A}$ listába került. A 4. megoldás kezdetén kiszámoltuk, hogy f_1 legalább akkora, mint az $\mathcal{L}_{52}$ lista legnagyobb eleme, így speciálisan $f_1 \geq b$ a $\mathcal{B}$ lista tetszőleges b elemére is.

Ha most van olyan $b \in \mathcal{B}$, amelyre határozottan $f_1 > b$ teljesül, akkor cseréljük ki ezt a b értéket az $\mathcal{A}$ lista b darab 1-esére. A kapott igazságos felosztásban már mindkét lista tartalmaz 1-est és ez, mint láttuk, elég. Hajtsuk végre ezt a cserét még akkor is, ha $b = f_1$ teljesül minden $b \in \mathcal{B}$ esetén. Ekkor az f_1 darab 1-es átkerül a $\mathcal{B}$ -be és most már az $\mathcal{A}$ listában kezdhetünk olyan számot keresni, amelyre $f_1 > a$.

Akkor vagyunk bajban, ha ilyet sem találunk. Ez viszont csak úgy fordulhat elő, ha a kibővített $\mathcal{L}_{52}$ lista az $f_1 \geq 2$ darab 1-esen kívül csupa azonos, egyenként f_1 értékű számot tartalmaz. Ilyen szám $(52 - f_1)$ darab van, így a kibővített lista

elemeinek összegéről szóló feltétel most $f_1 + (52 - f_1)f_1 = 102$. Rendezés után – no lám! – megkapjuk az előző megoldás baráti (Q) feltételét:

$$0 = f_1^2 - 53f_1 + 102 = (f_1 - 2)(f_1 - 51).$$

Ha $f_1 = 2$, akkor az eredeti lista 50 darab 2-esből áll, ha pedig $f_1 = 51$, akkor az eredeti lista

$$\mathcal{L}_{50} = \{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{49}, 51\},$$

de ezt a pótlólagos feltétellel kizártuk. ■

2.) Látványos, ahogy a két gondolatmenet ugyanabba a számolásba torkollik. Az Olvasó eltöprenghet, miben különbözik ez a két bizonyítás...

3.) Szó szerint ugyanígy okoskodhatunk, ha m darab pozitív egész összege $S = 2m$. A (Q) feltétel az általános esetben is

$$(Q) \quad 0 = t^2 - (m + 3)t + 2m + 2 = (t - 2)(t - (m + 1))$$

alakú. A t változó jelentheti az előbbi megoldás szerinti maximális d elemet, de az utóbbi változatban az 1-esek f_1 gyakoriságát is. Tanulságos, hogy ez a két mennyiség valamilyen értelemben azonos szerepet játszik.

Az igazságos felosztás mindenestre két speciális súlyeloszlás kivételével *általában* is megvalósítható: ha a lista minden eleme 2-es, akkor páratlan m -re a lista nem felezhető; a másik kivétel az, ha az $\mathcal{L}_m$ lista legnagyobb eleme $(m + 1)$, (a többi persze ilyenkor 1-es).

Ezek most valódi akadályok, hiszen az általános (Q) feltétel felírásakor sem azt nem használtuk fel, hogy az m páros, sem pedig azt, hogy a számok között nincsen m -nél nagyobb. A bizonyítás maga adja ki ezeket az ellenpéldákat, ahogy azt is, hogy más ellenpélda nincs! Érdekes, hogy a vizsgált esetekben az igazságos elosztásnak csak triviális akadályai vannak; ha ezeket az akadályokat pótlólagos feltételekkel kizárjuk, akkor a felosztás már megvalósítható. A bizonyításokért persze meg kell dolgozni...

Intermezzo. Vegyük szemügyre a kiegyensúlyozó algoritmus működését a módosított 4. megoldásban. Kiderült, hogy ha „...nem egyensúllyal ér véget, az lényegében meghatározza az $\mathcal{L}_{50}$ lista szerkezetét:

$$(K_{50}) \quad \mathcal{L}_{50}^* = \underbrace{\{1, 1, \dots, 1\}}_{d-2} \underbrace{\{d, \dots, d\}}_{\text{ptlan}}."$$

Ennyi lényegében elég volt a bizonyítás befejezéséhez, most azonban vegyük közelebbről szemügyre ezt az $\mathcal{L}_{50}^*$ listát. Először is jegyezzük meg, hogy egy ilyen lista nem csak a kiegyensúlyozó algoritmust dögleszti le; ha $d > 2$, akkor egyáltalán nem lehet elfelezni! A páratlan sok d értéket elhelyezve legalább d különbség lesz a két csoport között és ezt az 1-esekkel nem lehet kiigazítani. (Ehhez egyébként annyi is elég, hogy az 1-esek száma d -nél kisebb.) Ha $d > 1$, akkor az

$$\mathcal{L}^* = \underbrace{\{1, 1, \dots, 1\}}_{<d} \underbrace{\{d, \dots, d\}}_{\text{ptlan}}$$

típusú listák a listamérettől és listaösszeztől függetlenül nem felezhetők! Ha eltekintünk a listamérettől és megnézzük, hogy $s(\mathcal{L}^*) = 100$ mit tesz lehetővé, akkor $d(1 + f_d) = 102$ adódik. Ha nagyméretű felezhetetlen listát akarunk, akkor vagy d értékét érdemes nagyra választani, (ekkor sok lesz az 1-es), vagy pedig f_d -t. Előbbi esetben $d = 51$ választással megkapjuk a szokásos 50 elemű felezhetetlen listát, de ezt ki szoktuk zárni. Ha $d = 3$, akkor a 34 elemű

$$\mathcal{L}_{34}^* = \{1, \underbrace{3, \dots, 3}_{33}\}$$

listát kapjuk! Ez a lista az eddigiek szerint nem felezhető. Van-e ennél nagyobb, mondjuk 35 elemű lista, amely még mindig nem felezhető?

Tekintsük az ugyancsak 35 elemű

$$\mathcal{L}_{35} = \{17, 17, \underbrace{2, \dots, 2}_{33}\}$$

listát. Ez ugyan felezhető, de a kiegyensúlyozó algoritmus 49 : 51-es állást hoz létre. A kiegyensúlyozó algoritmus tehát nem a bölcsek köve, megbicsaklik egy triviálisan felezhető listán. Most persze az ember nyomban látja a megoldást: újra kell kezdeni az egészet, éppenséggel ugyanabba serpenyőbe téve a két nagy páratlan súlyt! Általában, ha egy $\mathcal{L}$ listát nem felez el a kiegyensúlyozó algoritmus, akkor mondjuk azt, hogy a lista *kiegyensúlyozatlan*. Egy ilyen lista persze lehet felezhető, a fenti $\mathcal{L}_{35}$ éppen erre példa.

A kiegyensúlyozás kényszere túl erős megkötésnek látszik, olykor, mint láttuk, éppenséggel meg kell szegni: szabaduljunk hát meg tőle, de őrizzük meg jó emlékezetünkben...

A sietős algoritmus. Lazítsuk fel a kiegyensúlyozó algoritmust a következőképpen: két serpenyő helyett tegyük most a súlyokat egy-egy 50 „ürméretű” tartályba. Rögzítsük eközben valahogyan a súlyok sorrendjét, de – egyelőre – még azt se írjuk elő, hogy ez csökkenő legyen. A *Lovász-Gács* könyv ezt a nagyon kötetlen eljárást *sietős* algoritmusnak nevezi. Ennek során tehát a súlyok egy rögzített sorrendjében az éppen kézbevetett súlyt bármelyik tartályba betehetjük, amelyikbe befér. Nincs szó tehát „kiegyensúlyozásról”, csak pakolunk, amíg van hely vagy súly. Ha ez az algoritmus lefut, azaz minden súlyt sikerül elhelyeznünk, akkor a két tartály színiültig van, szükségképpen egyenlő összegeket állítunk elő!

Az eljárás persze „túlsordulhat”: megeshet, hogy a kézbevetett súly már egyik tartályban sem fér el. (A kiegyensúlyozó algoritmus ilyenkor vakon továbblép.) Nézzük meg, hogy ez mivel jár. Számozzuk meg a súlyokat 1-től 50-ig és végezzük ezt a sietős pakolást az indexek *csökkenő* sorrendjében – elnézést, ennek a fordított indexelésnek oka van – tehát a d_{50} -nel kezdve: $d_{50}, d_{49}, \dots, d_k, \dots$. Tegyük fel, hogy a d_k súllyal elakadtunk, az már egyik tartályban sem fér el. Először is jegyezzük meg, hogy ilyenkor szükségképpen $d_k > 1$. Valóban, a súlyok egészek, 1-est tehát csak akkor nem lehet elhelyezni, ha a tartályok már megteltek. Ehhez viszont az összes súlyt fel kell használnunk, ez pedig ellentmondás.

Ha a d_k súllyal a kézben az első tartályból még h_1 , a másodikból pedig h_2 hiányzik az 50-hez, akkor a túlsordulás azt jelenti, hogy $d_k > h_1$ és $d_k > h_2$, tehát egészekről lévén szó, $2d_k \geq 2 + h_1 + h_2$. (Ezen a kis nyereségen múlik majd minden!) Mivel pedig a már felrakott és a még fel nem rakott súlyok összege a két tartály együttes kapacitása, azért a hiányok összege: $h_1 + h_2 = d_1 + d_2 + \dots + d_k$, a még fel nem rakott súlyok összege. Rendezés után kapjuk, hogy $d_k \geq 2 + d_1 + \dots + d_{k-1}$.

Azt kaptuk, hogy ha az eljárás a d_k súllyal – tehát az $(51 - k)$ -adik lépésben – akad el, akkor szükségképpen

$$(\overline{U}_k) \quad d_k > 1 + d_1 + \dots + d_{k-1},$$

ez a k -adik súly határozottan nehezebb, mint az első $k - 1$ darab súly 1-gyel megnövelt összege.

A fentiekből következik, hogy ha a súlyok megadott sorrendjében *minden* $1 \leq k \leq 50$ esetén a fenti $\overline{U}_k$ *tagadását* tesszük föl, azaz hogy

$$(U_k) \quad d_k \leq 1 + d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1}$$

akkor a sietős algoritmus túlcsoordulás nélkül lefut! (Miért?)

Megjegyzések. 1.) Jegyezzük meg, hogy az (U_1) feltétel ($k = 1$) formálisan azt adja, hogy a pakolás sorrendjében legutolsó d_1 súly 1. Az U_{50} feltétel pedig most $d_{50} \leq 1 + d_1 + d_2 + \dots + d_{49} = 101 - d_{50}$, ez pedig teljesül, hiszen kiegészítő feltevésünk szerint a súlyok egyike sem nehezebb 50-nél.

2.) Az 1960. évi *Kürschák-versenyen* tűzték ki a következő feladatot:

Ha adott a pozitív egész számok $d_1, d_2, \dots$, sorozata, akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy minden pozitív egész számot elő lehessen állítani a d_n sorozat néhány alkalmas elemének az összegeként, az, hogy

$$d_k \leq 1 + d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1}$$

teljesüljön minden pozitív egész k -ra. (Ez éppen az (U_k) feltétel.)

A *Matematikai Versenytelek* két indukciós bizonyítást közöl, ha odafigyelünk, akkor a fentiekből egy harmadik is kiolvasható.

6. feladat. *Bizonyítsuk be a Kürschák feladat állítását!*

Igazság szerint az a tulajdonság, hogy minden pozitív egészt elő lehet állítani az adott sorozat egy véges részsorozatának az összegeként, nem annyira a sorozatra, mint inkább arra a listára jellemző, amelyet a sorozat elemei alkotnak. Erre a listára nézve a feltétel azt is jelenti, hogy az elemei sorozatba rendezhetők úgy, hogy minden k -ra teljesüljön az (U_k) feltétel. Házi használatra mindenesetre hívjuk *univerzálisnak* az ilyen sorozatokat. Univerzális sorozatok vannak, például az azonosan 1 vagy pedig a 2 hatványok sorozata. Egy kevésbé triviális példa a *Fibonacci számok* sorozata. Egy véges lista esetén is van értelme ilyesmiről beszélni: ekkor annyi várható, hogy az $\mathcal{L}$ lista elemeinek $s(\mathcal{L})$ összegéig lehessen minden számot előállítani. A 2. feladat állítása szerint ha adott pozitív egészek átlaga kisebb 2-nél, akkor ez a lista univerzális, azaz minden $1 \leq t \leq s(\mathcal{L})$ egész előáll $\mathcal{L}$ -beli számok összegeként.

7. feladat *Bizonyítsuk be ezt az állítást az (U) feltétel felhasználásával.*

Rendezzük a sietős algoritmust. Készítsük elő a sietős algoritmus lefutását a szokásos módon: rendezzük a számokat *csökkenő* sorrendbe; mostantól tehát $d_{50} \geq d_{49} \geq \dots \geq d_2 \geq d_1$. Tipikus *mohó algoritmussal* van dolgunk: lépésenként a lehető legnagyobb súlyt rakjuk föl, oda, ahová elfér. Ha a d_k súllyal akadunk el, akkor az $(\overline{U}_k)$ feltételben a jobb oldal értéke legalább k , azért innen következik, hogy $d_k \geq k + 1$. Ilyenkor tehát a súlyok csökkenő elrendezése miatt $i \geq k$ esetben $d_i \geq d_k \geq k + 1$, ha pedig $i < k$, akkor mindentől függetlenül $d_i \geq 1$. Elakadáskor tehát a következőképpen becsülhetjük alulról a súlyok összegét:

$$(B_k) \quad 100 = \sum_{i=1}^{50} d_i = \sum_{i < k} d_i + \sum_{i \geq k} d_i \geq (k-1) \cdot 1 + (51-k) \cdot (k+1),$$

ahonnan az $(\overline{U}_k)$ feltételből rendezés után

$$(E_k) \quad 0 \leq p(k) = k^2 - 51k + 50 = (k-1)(k-50)$$

adódik. A nagyvonalú becslések ellenére remekül használható célszerszámot kapunk: ha a rendezett sietős algoritmus a d_k súllyal elakad, akkor $p(k) \geq 0$. Nevezzük a továbbiakban ezt a $p(k)$ polinomot az adott paraméterekhez ($m = 50, S = 100$) tartozó *elakadásjelző polinomnak*. Az elnevezés talán körülményes, de találó: elakadáskor ez a polinom előjelet vált: negatívból pozitívrá. Érdemes följrajzolni a grafikonját.

Megjegyzés. Jegyezzünk meg annyit, hogy ha $p(k) = 0$, akkor valamennyi becslésben egyenlőség van és így

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } i < k, \\ k+1 & \text{ha } i \geq k. \end{cases}$$

A megoldásra visszatérve látható, hogy $p(k)$ *negatív*, ha $2 \leq k \leq 49$, ha tehát a k -adik súllyal akadunk el, akkor $k \geq 50$ vagy $k \leq 1$. Az eljárás tehát vagy rögtön a legelső lépésben lefullad a legnehezebb súllyal, d_{50} -nel, vagy pedig a legvégén, amikor már csak d_1 -et kéne felrakni.

Az első lehetőséget a kiegészítő feltétel – nincsen a számaink között 50-nél nagyobb – kizárja: az algoritmust legalábbis el tudjuk kezdeni.

Újra gondoljuk meg, hogy $p(k) \geq 0$ csupán *szükséges* ahhoz, hogy a d_k súllyal elakadjunk. Ennek a feltételnek a felírásakor nem is vettük figyelembe azt a kiegészítő megszorítást, hogy a súlyok között nincsen 50-nél nagyobb. Ha ettől eltekintünk, akkor az (E_k) feltétel éppen úgy adódik és valóban: ha a legnagyobb

súly 51, a többi pedig 1-es, akkor a legelső lépésben ($k = 50$) valóban elakad az eljárás.

A bizonyítás befejezéséhez ellenőriznünk kell, hogy túlsordulhat-e az eljárás a legutolsó lépésben, amikor már csak a legkönnyebb súly van a kezünkben, Nos, ha van a súlyok között 1-es, akkor d_1 , a legkisebb nyilván az és láttuk, hogy 1-essel az eljárás nem akadhat el. Ha pedig nincs 1-es a súlyok között, akkor mindegyik súly 2-es, ezekből pedig az 50 kirakható.

Megjegyzések. 1.) Ugyanez a számolás megy akkor is, ha általában m darab szám összege $S = 2m$. Ekkor a fenti becslés

$$2m \geq k - 1 + (m + 1 - k)(k + 1)$$

alakú, ahonnan az elakadási polinom segítségével a

$$0 \leq p(k) = k^2 - (m + 1)k + m = (k - 1)(k - m)$$

szükséges feltételét kapjuk annak, hogy az eljárás a d_k súlynál elakadjon. Itt most semmit nem írtunk elő a számokról és m -ről: elakadásra tényleg sor is kerülhet az eljárás kezdetén, ha a legnagyobb szám $m + 1$ – ekkor a többi 1-es – illetve a legutolsó lépésben is, ha minden szám 2-es és az m páratlan: az algoritmus ebben az esetben $(m - 1) : (m - 1)$ állásnál az utolsó 2-essel a kézben valóban elakad. Egyik esetben sem létezik igazságos felosztás, de a bizonyításból kiderül, hogy ezek az egyedüli kivételek. Ismét bebizonyítottuk hogy

2.5. változat: *Ha m darab pozitív egész összege $S = 2m$, akkor a számok beoszthatók két egyenlő összegű csoportba, kivéve ha a számok legnagyobbika $m + 1$ vagy pedig minden szám 2 és m páratlan.*

Mi a helyzet általában? Nézzük meg, hogyan akadhat el a *rendezett sietős algoritmus*, ha m darab pozitív egész számunk van, amelyek összege S . A súlyok összegére vonatkozó (B_k) becslés most

$$(B_k) \quad S = \sum_{i=1}^m d_i \geq \sum_{i < k} d_i + (m + 1 - k) \cdot d_k \geq (k - 1) \cdot 1 + (m + 1 - k) \cdot (k + 1),$$

ahonnan rendezés után

$$(E_k) \quad 0 \leq p(k) = k^2 - (m + 1)k + (S - m)$$

adódik az elakadás szükséges feltételeként.

Az (m, S) paraméterekhez felírt elakadásjelző polinom tehát

$$(P) \quad p(k) = k^2 - (m+1)k + S - m.$$

Ennek a polinomnak az *előjele* felelős tehát általában is a rendezett sietős algoritmus lefutásáért.

Gondoljuk meg, hogy általában az algoritmus sikeres lefutásának *szükséges és elégséges* feltétele az $U_k : k = 1, 2, \dots, m$ egyenlőtlenségrendszer. (Ebbe $k = m$ esetben be van építve a $d_m \leq S/2$ kényszerfeltétel is.)

A feltételrendszer ebben a formában viszonylag nehezen kezelhető; az U_k tagadásának gyengítésével viszont a $p(k) \geq 0$ *szükséges* feltételét kapjuk annak, hogy – ha addig lefutott – a d_k súllyal elakadjon az eljárás. Ilyenformán pedig $p(k) < 0$ *elégséges* feltétele annak, hogy – ha addig lefutott az algoritmus – a d_k súlyt is el tudjuk helyezni. Szerencsés, hogy ez a gyengítés a kritikus esetekben kiélesedik¹ és így az elakadásjelző polinom előjelváltásakor pontos korlátokat kapunk.

Az (E_k) feltételre visszatérve: az elakadásjelző polinom $(m+1)/2$ -re szimmetrikus, $p(k) = p(m+1-k)$. Elakadásra tehát vagy az eljárás kezdetén kerülhet sor, ha a nagy számok túl nagyok, de ezt a szokásos módon elháríthatjuk a $d_m \leq S/2$ kényszerfeltétellel, vagy pedig – és ez valóban megeshet – az eljárás végefelé.

Vegyük észre azt is, hogy az (E_k) feltételhez vezető úton *nem volt szükségünk arra, hogy a két tartály mérete egyenlő*: csak annyi kellett, hogy az űrméretük összege S ! Mivel pedig $p(1) = S - 2m$, ami *negatív*, ha $S = 100$ és $m = 51$, a rendezett sietős algoritmus ilyenkor túlsordulás nélkül lefut, bármennyi legyen is a két tartály mérete. Amellett, hogy ezzel immár a hatodik megoldását kaptuk a kiinduló feladatnak, a 2. *feladatra* visszatérve ez éppen azt jelenti, hogy az eredeti feltételek mellett nem csak 50 összegű csoportot tudunk kijelölni, hanem tetszőleges $1 \leq t \leq 100$ esetén van az 51 darab számnak t összegű részhalmaza; az 51 számból álló 100 összegű lista *univerzális*! Ez persze általában is igaz: ha pozitív egész számok átlaga kisebb 2-nél, akkor ez a lista a számok összegéig *univerzális*.

A valódi korlát. Ami a *minimális elemszámú* igazságosan elosztható $S = 100$ összegű lista kérdését illeti, vegyünk észre, hogy az $(m, 100)$ paraméterekre felírt elakadásjelző polinomban $p(2) = p(m-1) = 102 - 3m$, ez pedig negatív, ha $m \geq 35$!

Ez azt jelenti, hogy ha 35 pozitív egész összege 100 és a számok egyike sem nagyobb 50-nél, akkor a rendezett sietős algoritmus legfeljebb a 35. lépésben, a

¹ Erben Péter megjegyzése

legkisebb számmal a kezünkben akadhat el. Ha ez 1-es, akkor persze ez sem fordulhat elő, hiszen, mint megjegyeztük, 1-essel nem csordulhat túl az algoritmus! Ha viszont a legkisebb szám 2-es, akkor igenis elakadhatunk: $2 \cdot 17 + 33 \cdot 2 = 100$ és ezekre a számokra az eljárás a 49 : 49 állásnál valóban túlsordul! (Az más kérdés, hogy ilyenkor a 2-esekből azonnal ki lehet rakni az 50-et.)

Hogy tétje is legyen a dolognak, emlékezzünk vissza, hogy a kiegyensúlyozó algoritmus vizsgálata során rátaláltunk egy 34 elemű nem felezhető listára:

$$\mathcal{L}_{34}^* = \{1, \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{33}\};$$

a kapott $m = 35$ korlát éles! Ezt a listát már ismerjük, de most tanulságos meggondolni, hogy ez az elakadásjelző polinom is kézenfogva elvezeti hozzá az embert.

Arról van szó, hogy miután kiderült, hogy $m \geq 35$ esetben az elakadásjelző polinom a 2 helyen negatívra vált, indokolt megnézni, mi van, ha $m = 34$! Ebben az esetben az elakadásjelző polinom

$$p(k) = k^2 - 35k + 66$$

és most $p(2) = 0$! Ha tehát 34 szám esetén $k = 2$ -nél elakadunk, akkor a (B_2) becslésben minden egyenlőtlenségben *egyenlőség* van! Innen pedig kiolvashatjuk, hogy $d_1 = 1$ és $d_i = 2 + 1$, ha $i \geq 2$: éppen a fenti, látszólag ad hoc ellenpéldát kaptuk! Az elakadás szükséges feltétele: $p(2) \geq 0$, most elégségesé válik: az algoritmus 32 darab 3-as igazságos elhelyezése után 48 : 48 állásnál az utolsó 3-assal a kézben elakad. Az elakadás ténye önmagában még nem feltétlenül jelenti azt, hogy az $\mathcal{L}_{34}$ listát nem lehet felezni, elvégre másképp is lehetne próbálkozni; a baj egy trivialis: 3-asok összegeként nem lehet az 50-et előállítani.

Vegyünk nagy levegőt és vágjunk bele:

Utolsó (?) változat. 35 pozitív egész összege 100 és egyikük sem nagyobb mint 50. Ekkor a számokat két egyenlő összegű csoportba lehet osztani.

Majdnem megvan a bizonyítás is, hiszen a fentiek után már „csak” az az eset maradt, ha a számok legkisebbike 2. Kínálkozó lehetőség, hogy ekkor a 2-eseket használjuk a „finomra vágásra”, úgy, ahogyan az eredeti változatban az 1-eseket. Most belőlük van elegendően sok. Az 1-esek számára adott becsléshez hasonlóan kapjuk, hogy ha a számok maximuma d és nincsen köztük 1-es, akkor a 2-esek száma legalább $d + 2$.

8. feladat. *Lássuk be ezt az állítást, aztán fejezzük be a bizonyítást.*

Ha megvan, akkor tanulságos lehet, hogy egy kis trükk révén a 2-eseket nem az 1-esekhez hasonlóan, hanem lényegében 1-esként lehet felhasználni!

Tegyük félre ugyanis egy 2-est! A megmaradó 34 szám összege páros, így páros sok páratlan van köztük. Készítsünk most már 17 darab párt úgy, hogy a párok összege páros legyen. Az eredeti 2-essel együtt ekkor összesen 18 darab páros számot kapunk, amelyek összege 100. Vegyük mindegyiknek a felét, így 18 pozitív egészhez jutunk, amelyek összege 50. E számok legkisebbike 1 és – gondoljuk meg – egyikük sem nagyobb 25-nél! (Ha az eredeti 35 szám legkisebbike 2, akkor bármely kettejük összege legfeljebb $100 - 33 \cdot 2 = 34$.)

Eresszük rá a rendezett sietős algoritmust most már erre a 18 számra! Ha lefut, akkor egyúttal az eredeti számok igazságos felosztását is kiadja, ha visszaszorozunk 2-vel és szétszedjük a párokat. Az általános elakadásjelző polinomban $p(2) = p(m-1) = S + 2 - 3m$, ami *negatív*, ha $S = 50$ és $m = 18$! Ez most is azt jelenti, hogy – elvileg – csak a legelső, vagy pedig a legutolsó lépésben akadhat el az algoritmus. Most azonban egyik sem lehetséges: a legelső, legnagyobb szám kisebb mint $S/2 = 25$, az utolsó szám pedig 1, amelyik már nem csordulhat túl. ■

Záró megjegyzések 1.) A bizonyításból az is kiderül, hogy ha 35 pozitív szám egyike sem nagyobb 50-nél, az összegük 100 és a számok legkisebbike 1, akkor ez a lista univerzális: minden $1 \leq t \leq 100$ esetén létezik t összegű rész. Ha a legkisebb szám 2, akkor legalábbis minden 2 és 100 közé eső *páros* szám kirakható. A $\{32, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{34 \text{ db}}\}$ lista mutatja, hogy ilyenkor ennél többet nem is várhatunk.

9. feladat. *Bizonyítsuk be ezt az állítást.*

2.) Úgy tűnik, tényleg eljutottunk egy határig. Hasonlóan bizonyítható, hogy ha $S/2$ páros és S előáll

$$m = \left\lfloor \frac{S+2}{3} \right\rfloor + 1$$

darab $S/2$ -nél nem nagyobb pozitív egész összegeként, akkor ezt az m darab számot két egyenlő, $S/2$ összegű csoportra lehet osztani. Az is igaz, hogy ha S nem osztható 3-mal, akkor ez az eredmény *éles*, az $S = (m-2) \cdot 3 + r$ felbontás $m-1$ darab olyan szám, amelyek nem oszthatók $S/2$ összegű csoportokba.

Ha S hárommal is osztható, tehát $S/2$ páros volta miatt 12-vel is, például $S = 120$, akkor a bizonyításból annyi jön ki, hogy $m = 41$ darab 60-nál nem nagyobb pozitív egész szám összegeként felírva ezek a számok két 60 összegű csoportba oszthatók.

10*. feladat. Jelölje $m(120)$ a fenti tulajdonságú m értékek minimumát; ezek szerint $m(120) \leq 41$. Mennyi $m(120)$? Ha megvan a válasz, akkor határozzuk meg $m(S)$ értékét tetszőleges pozitív egész S -re.

Hogyan tovább? Adott S pozitív egészre legyen q az S egy valódi osztója. Jelölje $m(q, S)$ azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy valahányszor S előáll $m(q, S)$ darab, S/q -nál nem nagyobb pozitív egész összegeként, akkor ezek a számok q darab, egyenként S/q összegű csoportba oszthatók. A 10. feladatban értelmezett $m(120)$ eszerint valójában $m(2, 120)$.

Láttuk, hogy $m(2, 100) = 35$. Az 1. feladat szerint $m(3, 60) \leq 41$, illetve általában is $m(q, nq) \leq 1 + (n-1)q$ (Csajbók Bence).

11. feladat. Bizonyítsuk be újra Csajbók Bence eredményét (ld. az 1. feladat környékét) a megfelelő „ q -tartályos” elakadásjelző polinom előjelvizsgálatával.

12. feladat. a) Mennyi $m(3, 99)$? b)* Mennyi $m(3, 6s)$?

Útmutatás: vizsgáljuk a megfelelő elakadásjelző polinomot három tartály esetén.

További feladatok

13. feladat Az L_5 listában az 1, 2, 3, 4, 5 számok fordulnak elő, az i érték gyakorisága $f_i = 5!/i$: $i = 1, 2, 3, 4, 5$. A lista elemeinek összege tehát $5 \cdot 5!$. Bizonyítsuk be, hogy az L_5 lista elemei beoszthatók $5!$ darab egyenlő, 5 összegű csoportba.

Útmutatás: Alkalmazzuk a rendezett sietős algoritmust.

14. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges t valós számra

$$[t] + \frac{[2t]}{2} + \frac{[3t]}{3} + \frac{[4t]}{4} + \frac{[5t]}{5} \leq [5t].$$

Útmutatás: Szorozzunk $5!$ -sal, használjuk az előző feladat eredményét, továbbá a minden valós x, y számra érvényes $[x] + [y] \leq [x + y]$ egyenlőtlenséget.

15. feladat. Általánosítsuk a 14. feladatot.

Megjegyzés. Ez az általános változat a maga idejében nagyon nehéz feladat volt az amerikai matematikai olimpián. Aztán, ahogy ez lenni szokott, felbukkant a *Kömalban* is.² A 2004. évi márciusi szám két megoldást közöl: az első Kós Géza szokásos varázslata, a másodikban Paulin Roland lényegében explicit módon megadja ennek a nagyon szimmetrikus partíciós feladatnak a megoldását. A 15. feladat megoldásához persze elegendő az egzisztencia.

² A. 311 feladat

16.** feladat Legyen s az $1 + 2 + \dots + n$ összeg egy n -nél nem kisebb osztója. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az első n darab pozitív egész számot be lehet osztani s összegű csoportokba.

Megjegyzések. 1.) A 15. feladat egy másik vonzó – és dögnehez – varáció. Érdemes figyelni arra, hogy a tárgyalt esetekhez hasonlóan a *triviálisan szükséges* feltételeken túl itt sincs másra szükség ahhoz, hogy ennek az igen szabályos listának az elemeit egyenlő összegű csoportokba lehessen rendezni. Abból a bizonyításból, amelyet ismerek, nem derül ki, hogy az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak pontosan milyen tulajdonságán múlik ez a dolog...)-:

2.) Lazításul egy friss (2008. december van) adalék. Az idei Arany Dániel versenyen a kezdők kategóriájának első fordulójában az egyik feladat azt kérdezte, be lehet-e osztani az első 2008 pozitív egész számot két egyenlő összegű csoportba. Az egyik tanítványom, Kabdebó Noémi – saját bevallása szerint azért, mert idegességében mindig elszámolta az egyébként triviális konstrukciót – a következőt sütötte ki:

A szóban forgó összeg páros, a kis Gauss ki is tudná számolni, mennyi. Jelölje az értékét $2s$; készítsünk két, egyenként s űrméretű tartályt és a legnagyobbik 2008-cal kezdve kezdjük csökkenő sorrendben bepakolni a számokat az egyik tartályba. Ha épp színültig tudjuk rakni, készen vagyunk, ha nem, akkor egy $1 < k < 2008$ számmal túlcordul az eljárás. A k -nál kisebb még fel nem használt számok között ekkor ott van az első tartály telítéséhez hiányzó érték. Tegyük ezt a helyére és fejezzük is be a bizonyítást.

3.) Levezetésképpen egy viszonylag közismert feladatot ajánlok, amely a fenti kérdések egy lehetséges további kiterjesztése felé mutat.

Fejtörő. Huszonegy olajoshordó közül hét üres, hét félig van, hét pedig tele. Helyezzük el a hordókat három teherautón úgy, hogy mindhárom rakományban ugyanannyi hordó és ugyanannyi olaj legyen.