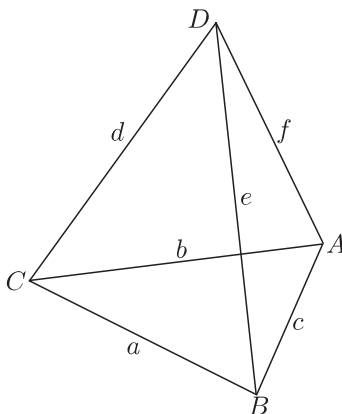


Heron-formula tetraéderre

STACHÓ LÁSZLÓ

A minap egy kémikus barátom jött hozzám azzal a kérdéssel, *hogyan fejezhető ki a tetraéder térfogata az oldalaival*. Ez szinte középiskolás problémának tűnik, mégsem találta a képletet az Interneten. Hogyhogy, kérdeztem magamban, hát Leonard Euler nem csinálta ezt meg egy szabad délutánján? Nekiálltam, és némi komputeralgebrai (MAPLE) segítséggel sikerült is megadnom a formulát. Így hangzik:

Legyenek a, b, c, d, e, f egy tetraéder oldalai, ahol a, b, c egy lapot határolnak, $\{a, f\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$ pedig átellenes párok. Ekkor a tetraéder V térfogatára



$$\begin{aligned}
 144V^2 = & a^2 f^2 [(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - (a^2 + f^2)] + \\
 & + b^2 e^2 [(a^2 + c^2 + d^2 + f^2) - (b^2 + e^2)] + \\
 & + c^2 d^2 [(a^2 + b^2 + e^2 + f^2) - (c^2 + d^2)] - \\
 & - [a^2 b^2 c^2 + a^2 d^2 e^2 + f^2 b^2 d^2 + f^2 e^2 a^2].
 \end{aligned}$$

A 2-dimenziós Heron-formula az a, b, c oldalú háromszög T területére ebben a stílusban:

$$16T^2 = 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

csak hogy ez szorzattá alakítható ($T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, ahol $2s = a + b + c$), míg a 3-dimenziós változat már nem.

A formula következő *gráfelméleti* átfogalmazása is érdekes lehet.

A tetraéder csúcsait és éleit egy gráf csúcsainak ill. éleinek tekintve,

$$144V^2 = \sum_{\substack{\{p,q,r\} \\ \text{nyitott út}}} p^2 q^2 r^2 - \sum_{\substack{\{p,q,r\} \\ \text{zárt út}}} p^2 q^2 r^2 - \sum_{\substack{\{p,q\} \\ \text{diszjunkt élpár}}} (p^2 q^4 + p^4 q^2).$$

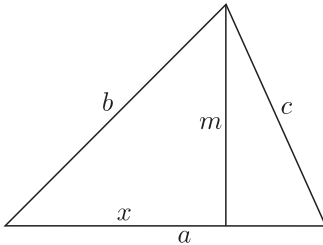




Mielőtt az elemi geometriai bizonyításra rátérnénk, még egy megjegyzést teszünk. Az Interneten sok weboldal van, amely kapcsolatos 3-dimenziós Heron-képletekkel, de csak speciális esetekre. Ezek közül több is felveti a kérdést, *lehet-e az oldallapok területeivel kifejezni a térfogatot*. A válasz meglepően egyszerű: *nem*, mert van olyan szabályos tetraéder, amelynek lapjai mind $1/2$ területűek és a térfogata triviálisan nem-zéró, míg a síkbeli egységnégyzet csúcsai felfoghatók egy olyan 0 magasságú (és így 0 térfogatú) tetraéder csúcsaiként, amelynek oldalai $1/2$ területű egységnyi befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszögek.

Bizonyítás. Általában is, a Pythagoras-tétel alapján kifejezhetők a háromszög bármelyik magassága és e magasság talppontjának távolsága az alap csúcsaitól.

Magasság-formulák. Legyen m az a, b, c oldalú háromszög a feletti magassága, x pedig a oldal vetülete a -ra (negatív, ha a, b közt tompa szög van). Ekkor

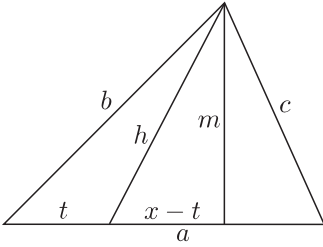


$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + m^2 \\ c^2 &= (a - x)^2 + m^2 \\ x^2 - (a - x)^2 &= b^2 - c^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad m^2 = b^2 - x^2 = \frac{1}{4a^2} [2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)].$$

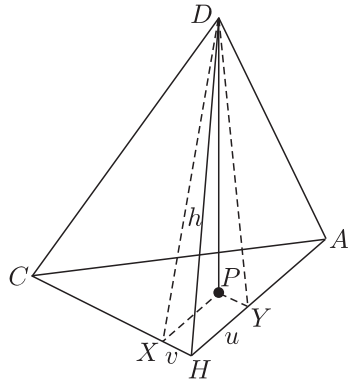
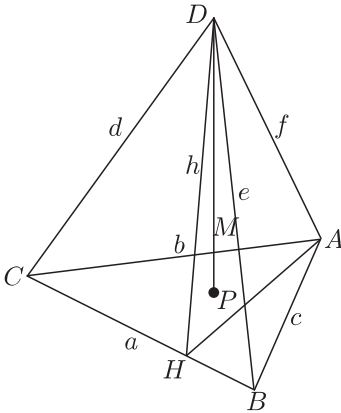
Megjegyzés. Az m^2 -re kapott képlet $a^2/4$ -gyel szorozva azonnal adja a 2-dimenziós Heron-formulát. Húrhosszak is könnyen számíthatók.

Húr-formula. Legyen H egy pont az a, b, c háromszög a oldalának egyenesén, amelynek előjelezett távolsága t az a, b közti C csúctól (pozitív, ha $H \in a$ vagy $HC \supset a$). Ekkor az AH húr h hosszára (ahol A az a oldallal szemközti csúcs) a magasság-formulák szerint



$$\begin{aligned}
 h^2 &= (x-t)^2 + m^2 = x^2 - 2xt + t^2 + m^2 \stackrel{x^2+m^2=b^2}{=} \\
 &= t^2 - 2xt + b^2 = \\
 &= t^2 - t \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} + b^2.
 \end{aligned}$$

A 2-dimenziós magasság- és húr-formulákkal visszavezethető a tetraéder magassága az oldalahosszakra. Ettől kezdve legyenek a, b, c, d, e, f egy tetraéder oldalai, ahol a, b, c egy lapot határolnak, $\{a, f\}, \{b, e\}, \{c, d\}$ pedig átellenes párok. Használjuk továbbá a következő jelöléseket. Az a, b, c alapháromszög a feletti magassága m a H talpponttal, amelynek x a távolsága az a, b oldalak közös pontjától. A tetraédernek az a, b, c háromszög feletti magassága M , ennek talppontja P , a P pontnak pedig X a merőleges vetülete az a oldal egyenesére, az m magasság egyenesére pedig Y . Végül h a H pont távolsága a tetraéder a, b, c feletti D csúásától, míg v a $\overline{HX}$ távolság ill. u a $\overline{HY}$ távolság.



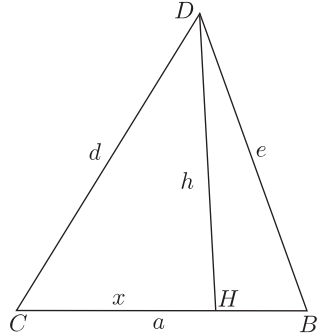
A tetraéder magassága. Az a oldal egyenese merőleges m egyenesére, X és Y pedig P merőleges vetületei ezen egyenesekre. Ezért X, H, Y, P egy téglalap az XY ill. PH átlókkal az a, b, c háromszög síkjában. Az $M(=DP)$ szakasz merőleges ez utóbbi síkra. Ezért a Pithagorasz tétel szerint $h^2 = \overline{DH}^2 = \overline{DP}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{DP}^2 + (\overline{PY}^2 + \overline{YH}^2) = M^2 + u^2 + v^2$. Azaz

$$(1) \quad M^2 = h^2 - u^2 - v^2.$$

Itt h kiszámítható a húr-formula segítségével: az a, d, e oldalú B, C, D csúcsú háromszög BC -t tartalmazó oldalegyenesén a H pont C -től x (előjelezett) távolságra

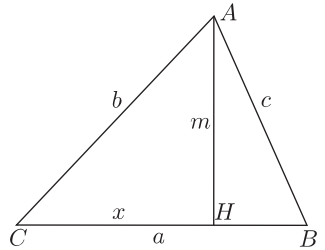
van. Ezért

$$(2) \quad h^2 = x^2 - x \frac{a^2 + d^2 - e^2}{a} + d^2.$$



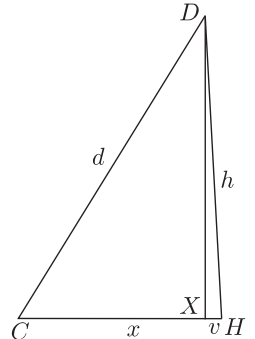
Az a, b, c oldalú háromszögben x definíció szerint a b szakasz vetületének előjelezett hossza a egyenesére. Innen a magasság-formulák szerint

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \\ m^2 &= b^2 - x^2. \end{aligned}$$



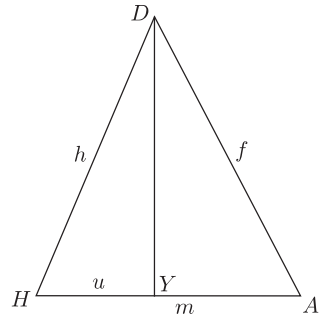
Maradt az u, v hosszak kifejezése az $a, \dots, f$ oldalakkal. Vegyük észre, hogy D, P, X, H, Y egy olyan téglalap alapú gúla csúcsai, ahol a PD, PX, PY oldalak merőlegesek egymásra. Emiatt még az DY, YH és DX, XH oldalpárok is merőlegesek egymásra. Következésképpen az $x = CH$ alapú C, H, D háromszög magassága a DX szakasz, és u itt a $h = DH$ szakasz vetülete CH egyenesére. Vagyis a magasság-formulák szerint

$$(4) \quad v = \frac{x^2 + h^2 - d^2}{2x}.$$



Hasonlóan az $m = AH$ alapú A, H, D háromszög magassága a DY szakasz, ahol u a $h = DH$ szakasz vetülete AH egyenesére, és a magasság-formulák szerint

$$(5) \quad u = \frac{m^2 + h^2 - f^2}{2m}.$$



Ezzel az M magasság kiszámításához szükséges összes segédadatot visszavezettük az $a, \dots, f$ oldalhosszakra. Csakhogy az (1), ..., (5) formulák egymába helyettesítése és egyszerűsítése manuálisan igen hosszadalmas „rabszolgamunka”. Nem csodálható, ha a XX. század előtt ezt nem számolta végig senki. Ugyanakkor mi már rendelkezünk egy erre tökéletesen alkalmas „rabszolgával”. Ez a *komputer-algebra*. Pl. MAPLE-ben mindössze ennyi kiadni a parancsot az M magasság (1), ..., (5) alapján való kifejezésére:

```
x:=(a^2+b^2-c^2)/(2*a);  m:=sqrt(b^2-x^2);
h:=sqrt(x^2-x*(a^2+d^2-e^2)/a+d^2);
u:=(m^2+h^2-f^2)/(2*m);  v:=(x^2+h^2-d^2)/(2*x);
M:=sqrt(h^2-u^2-v^2);
```

Az eredmény egy közepes (2 MHz) sebességű PC-n is 1 mp-em belül megjön:

```
M := sqrt((- b^2*a^2*e^2 + b^2*a^2*c^2 - a^2*c^2*d^2 -
- d^2*b^2*c^2 - e^2*b^2*c^2 - d^2*b^2*e^2 - d^2*c^2*e^2 +
+ b^2*d^2*f^2 - b^2*e^2*f^2 - c^2*d^2*f^2 + c^2*e^2*f^2 +
+ d^2*c^4 + e^2*b^4 - b^2*a^2*f^2 + a^4*f^2 + a^2*d^2*e^2 +
+ d^4*c^2 - a^2*d^2*f^2 + e^4*b^2 - a^2*e^2*f^2 -
- a^2*c^2*f^2 + f^4*a^2) /
/ (- 2*b^2*a^2 + a^4 - 2*a^2*c^2 + b^4 - 2*b^2*c^2 + c^4))
```

Az alsó sorbeli nevezőben épp a 2-dimenziós Heron-formula (ld. Megjegyzés) jelenik meg.

A tetréder térfogata. Az előzőekben bevezetett jelölésekkel az $\{a, f\}, \{b, e\}, \{c, d\}$ kitérő élpárokkal rendelkező tetraéder térfogata

$$V = \frac{1}{3} [\text{alap-}\Delta \text{ területe}] M (= \frac{1}{6} amM).$$

Az komputer-algebrai eredményünkből azonnal adódik a $144V^2$ -re kimondott gyök- és koefficiens-mentes kifejezés.

Komputer-algebra nélkül (de felsőbb lineáris algebrával). Szinte véletlen szerencsének tűnik, hogy az (1), ..., (5) egyenletek alapján igen hosszadalmas, de immár komputer-algebrával gyorsan megtehető számolások után a tetraéder magasságára olyan formula jön ki, amelynek nevezőjében épp az alapháromszög területe van, és mind a számláló, mind a nevező négyzete az oldalhosszak négyzeteinek polinomja. Van-e olyan megközelítés, amely a tetraéder térfogatának négyzetét azonnal az oldalnégyzetek polinomjaként adja? A válasz: igen, sőt a magyarázat is nagyon természetes, csakhogy ehhez ismerni kell a *determináns* fogalmát. Ismeretes, hogy ha egy tetraéder négy csúcsa A_0, A_1, A_2, A_3 , és az A_k pont koordinátáit egy tet- szőlegesen rögzített Descartes-koordinátarendszer szerint az

$$a_k = \begin{bmatrix} a_{kx} \\ a_{ky} \\ a_{kz} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

oszlopvektor alakba írjuk, akkor a tetréder térfogata

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left| \det[a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_3 - a_0] \right| = \\ &= \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} a_{1x} - a_{0x} & a_{2x} - a_{0x} & a_{3x} - a_{0x} \\ a_{1y} - a_{0y} & a_{2y} - a_{0y} & a_{3y} - a_{0y} \\ a_{1z} - a_{0z} & a_{2z} - a_{0z} & a_{3z} - a_{0z} \end{bmatrix} \right|. \end{aligned}$$

A döntő észrevétel: a mátrix-transzponálást $\mathbf{T}$ -vel jelölve, a determinánsok szorzástétele szerint általában is $\det(M^{\mathbf{T}}M) = \det(M^{\mathbf{T}})\det(M) = \det(M)^2$. Ezért

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{1}{36} \det \left([a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_3 - a_0]^{\mathbf{T}} [a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_3 - a_0] \right) = \\ &= \det \left[\langle a_i - a_0, a_j - a_0 \rangle \right]_{i,j=1}^3, \end{aligned}$$

ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az oszlopvektorok skaláris szorzása. Csakhogy az $\langle a_i - a_0, a_j - a_0 \rangle$ skalár-szorzat kifejezhető az $r_{k\ell} := \overline{A_k A_\ell}$ oldalhosszakkal: használva a rövid $v_\ell := a_\ell - a_0$ jelölést,

$$\begin{aligned} r_{ij}^2 &= \langle a_i - a_0, a_i - a_0 \rangle = \langle v_i - v_j, v_i - v_j \rangle = \langle v_i, v_i \rangle + \langle v_j, v_j \rangle - 2\langle v_i, v_j \rangle = \\ &= r_{i0}^2 + r_{j0}^2 - 2\langle v_i, v_j \rangle, \end{aligned}$$

ahonnan $2\langle v_i, v_j \rangle = r_{i0}^2 + r_{j0}^2 - r_{ij}^2$. Ezért

$$\det[r_{i0}^2 + r_{j0}^2 - r_{ij}^2]_{i,j=1}^3 = \det[2\langle v_i, v_j \rangle]_{i,j=1}^3 = 2^3 \cdot 36V^2.$$

Itt a baloldali determináns kifejtése $r_{ij}^2 r_{kl}^2 r_{mn}^2$ alakú szorzatokból áll automatikusan.

*Stachó László, SZTE TTK, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
stacho@math.u-szeged.hu*