

EGY ÖTLET

Alkalmazzuk a Catalan-összefüggést!

MOLNÁR ISTVÁN

Az alábbiakban egy olyan összefüggést mutatunk be, amely gyakran használható feladatok megoldásában, tételek bizonyításában. Előbb bizonyítjuk magát a nagyon egyszerű összefüggést, majd alkalmazzuk különböző típusú feladatok (egyenlőtlenségek és oszthatóságok igazolása, határértékek kiszámítása) megoldásában.

Állítás. (Catalan-összefüggés.)* *Tetszőleges pozitív egész n esetén fennáll a következő összefüggés:*

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} &= \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Megjegyzés. A bizonyítás egy másik közismert módja a matematikai indukció módszerével történik.

* Eugéne Charles Catalan (1814-1894) - belga matematikus

Alkalmazások

1. Az első alkalmazás egy közismert feladat. A különböző tankönyvek, példatárak többségében az egyenlőtlenség igazolása indukció segítségével történik.

Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $n \geq 2$, akkor

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Megoldás. Alkalmazzuk az (1) összefüggést.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \geq \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24} \end{aligned}$$

(Felhasználtuk azt a tényt, hogy a zárójelekben lévő kifejezések különbsége minden esetben pozitív szám).

2. A második alkalmazás egy újabb egyenlőtlenség igazolása.

Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Megoldás. Alkalmazzuk az (1) összefüggést, majd a továbbiakban először a számtani és négyzetes közepek közötti összefüggést a következő alakban: ha $A_1, A_2, \dots, A_n \geq 0$, akkor

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)^2 \leq n(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2),$$

aztán pedig az ismert

$$(n+k)^2 > (n+k)(n+k-1)$$

egyenlőtlenséget, ahol $n, k \in \mathbb{N}^+$.

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)^2 &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)^2 \leq \\
 &\leq n \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right] < \\
 &< n \left[\frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n-1)} \right] = \\
 &= n \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \right] = \\
 &= n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Megjegyzés. Felhasználva az első két feladat eredményét, felírható, hogy

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

3. A harmadik alkalmazás a 21. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (London, 1979) egyik feladata.

Legyenek m és n olyan pozitív egészek, amelyekre fennáll, hogy

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1317} - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bizonyítsuk be, hogy m osztható 1979-cel.

Megoldás. Alkalmazzuk a feltétel jobb oldalára az (1) összefüggést.

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{n} &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1317} - \frac{1}{1318}\right) + \frac{1}{1319} = \\
 &= \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \cdots + \frac{1}{1318}\right) + \frac{1}{1319} = \\
 &= \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}\right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990}\right) = \\
 &= 1979 \left(\frac{1}{660 \cdot 1319} + \frac{1}{661 \cdot 1318} + \cdots + \frac{1}{989 \cdot 990}\right)
 \end{aligned}$$

A zárójelben lévő kifejezés a közös nevezőre hozás után $\frac{a}{b}$ alakú lesz, ahol a pozitív egész és $b = 660 \cdot 661 \cdots 1319$. Mivel az 1979 prímszám és b minden tényezője kisebb, mint 1979, ezért b és 1979 relatív prímek. Innen az $\frac{m}{n} = 1979 \frac{a}{b}$ egyenlőséget átírva $mb = 1979an$ alakra és felhasználva, hogy $(b; 1979) = 1$, kapjuk, hogy az 1979 osztója kell legyen m -nek.

Megjegyzés. A feladatot egy általánosabb feladatból is származtathatjuk.

Legyen p háromnál nagyobb prímszám, $q = \left\lceil \frac{2p}{3} \right\rceil$ (ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli), valamint legyenek m és n olyan pozitív egészek, amelyekre fennáll, hogy

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{q-1} \frac{1}{q}.$$

Ekkor m osztható p -vel.

4. A negyedik alkalmazás egy újabb versenyfeladat, az 57. Putnam verseny (1996) egyik feladata (lásd például [1]).

Legyen p háromnál nagyobb prímszám és $q = \left\lceil \frac{2p}{3} \right\rceil$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{q}$$

összeg osztható p^2 -el.

Megoldás. A feltételek alapján a feladatban szereplő minden binomiális együttható osztható p -vel, hiszen a

$$\binom{p}{r} = \frac{p!}{r!(p-r)!}$$

felírásból következik, hogy a p osztója a számlálónak, de nem osztója a nevezőnek

$$\begin{aligned} \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{q} &= \\ &= \frac{p!}{1! \cdot (p-1)!} + \frac{p!}{2! \cdot (p-2)!} + \frac{p!}{3! \cdot (p-3)!} + \cdots + \frac{p!}{q! \cdot (p-q)!} = \\ &= p + \frac{p(p-1)}{2!} + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-q+1)}{q!} = \\ &= p \left[1 + \frac{p-1}{2!} + \frac{(p-1)(p-2)}{3!} + \cdots + \frac{(p-1)(p-2) \cdots (p-q+1)}{q!} \right] \end{aligned}$$

A kapott felírásból következik, hogy a kért oszthatóság bizonyításához elegendő belátnunk, hogy az

$$S = 1 + \frac{p-1}{2!} + \frac{(p-1)(p-2)}{3!} + \dots + \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-q+1)}{q!}$$

összeg osztható p -vel.

Ha az S -ben szereplő törtek számlálóiban a megfelelő műveleteket elvégezzük, az összevonások után S átírható

$$\frac{pk_2}{2!} + \frac{pk_3}{3!} + \dots + \frac{pk_q}{q!} + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{q-1} \frac{1}{q}\right)$$

alakra, ahol $k_2, k_3, \dots, k_q$ egészek. A 3. feladat megoldás után tett megjegyzés alapján az

$$\begin{aligned} S &= \frac{pk_2}{2!} + \frac{pk_3}{3!} + \dots + \frac{pk_q}{q!} + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{q-1} \frac{1}{q}\right) = \\ &= p \left(\frac{k_2}{2!} + \frac{k_3}{3!} + \dots + \frac{k_q}{q!} \right) + \frac{m}{n}, \end{aligned}$$

ahol m osztható p -vel (azaz $m = pl$, $l \in \mathbb{N}^+$) és az n nem többszöröse p -nek.

Mindezek alapján

$$S = p \left(\frac{k_2}{2!} + \frac{k_3}{3!} + \dots + \frac{k_q}{q!} + \frac{l}{n} \right),$$

ahol egyetlen nevező sem osztható p -vel, tehát az S osztható p -vel.

5. Mutassuk meg, hogy az

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

($n \in \mathbb{N}^+$) általános tagú sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét.

Megoldás. Alkalmazzuk a sorozat általános tagjára az (1) összefüggést, majd a továbbiakban az egyenlőség jobb oldalán álló kifejezést tanulmányozzuk.

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

A monotonitást vizsgálva:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \\ &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{2n} = \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \end{aligned}$$

Tehát $a_{n+1} - a_n > 0$, bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, azaz az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő.

A korlátosságát vizsgálva egyrészt

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{n\text{-szer}} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

másfelől pedig

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\text{-szer}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Tehát $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$, bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, azaz az $\{a_n\}$ sorozat korlátos.

Összefoglalva tehát az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő és korlátos, így konvergens.

Írjuk fel az $\{a_n\}$ sorozat általános tagját a következőképpen:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right).$$

Az előbbi felírást figyelembe véve azt kapjuk, hogy az $\{a_n\}$ az $\frac{1}{1+x}$ függvénynek a $[0; 1]$ intervallum n egyenlő részre való beosztásához tartozó Darboux-féle alsó integrálközelítő összege. Mivel az $\frac{1}{1+x}$ függvény monoton a $[0; 1]$ -on, ezért integrálható, így ha $n \rightarrow \infty$, akkor

$$a_n \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Tehát

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

Megjegyzés. A fenti határérték más módszerekkel is kiszámítható (elemi úton, más sorozatok segítségével, hatványsorokkal stb.), lásd például [2],[3].

6. Ehhez az alkalmazáshoz előbb egy segédtezt bizonyítunk, mely segítségével és az 5. feladat eredményének felhasználásával bizonyos típusú határértékek könnyen kiszámolhatóvá válnak.

Segédttétel. Ha az $\{a_n\}$ sorozat határértéke A és a $B_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{2n}$, $b_n > 0$ általános tagú sorozat határértéke B , akkor teljesül

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{2n}b_{2n}) = AB$$

Bizonyítás. A feltételekből adódóan bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n > n_\varepsilon$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ és $|B_n - B| < \varepsilon$.

Legyen $\alpha_n = a_n - A$ és $\beta_n = B_n - B$, ahonnan

$$(3) \quad a_n = \alpha_n + A \quad \text{és} \quad B_n = \beta_n + B$$

Az $\{a_n\}$ és $\{B_n\}$ sorozatok konvergenciájából adódóan a sorozatok korlátosak is, tehát létezik $M > 0$ úgy, hogy

$$(4) \quad |a_n| \leq M \quad \text{és} \quad B_n \leq M.$$

A (3) összefüggéseket felhasználva

$$\begin{aligned} a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{2n}b_{2n} &= \\ &= (\alpha_{n+1} + A)b_{n+1} + (\alpha_{n+2} + A)b_{n+2} + \cdots + (\alpha_{2n} + A)b_{2n} = \\ &= \alpha_{n+1}b_{n+1} + \alpha_{n+2}b_{n+2} + \cdots + \alpha_{2n}b_{2n} + A(b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{2n}) = \\ &= \alpha_{n+1}b_{n+1} + \alpha_{n+2}b_{n+2} + \cdots + \alpha_{2n}b_{2n} + A(\beta_n + B) = \\ &= \alpha_{n+1}b_{n+1} + \alpha_{n+2}b_{n+2} + \cdots + \alpha_{2n}b_{2n} + A\beta_n + AB \end{aligned}$$

A kapott eredményt, a háromszög-egyenlőtlenséget, az $|\alpha_n| < \varepsilon$, a $|\beta_n| < \varepsilon$, a $b_n > 0$ és a (4) egyenlőtlenségeket figyelembe véve, ha az $n > n_\varepsilon$, akkor

$$\begin{aligned} |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{2n}b_{2n} - AB| &= \\ &= |\alpha_{n+1}b_{n+1} + \alpha_{n+2}b_{n+2} + \cdots + \alpha_{2n}b_{2n} + A\beta_n| \leq \\ &\leq |\alpha_{n+1}b_{n+1}| + |\alpha_{n+2}b_{n+2}| + \cdots + |\alpha_{2n}b_{2n}| + |A\beta_n| = \\ &= |\alpha_{n+1}|b_{n+1} + |\alpha_{n+2}|b_{n+2} + \cdots + |\alpha_{2n}|b_{2n} + |A||\beta_n| < \\ &< \varepsilon(b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{2n}) + |A|\varepsilon = \\ &= \varepsilon B_n + |A|\varepsilon \leq \varepsilon M + |A|\varepsilon = \varepsilon(M + |A|) \end{aligned}$$

Tehát, ha $n > n_\varepsilon$, akkor

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{2n}b_{2n} - AB| < \varepsilon_1,$$

ahol a $\varepsilon_1 = \varepsilon(M + |A|)$. Innen következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{2n}b_{2n}) = AB.$$

Példa. Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{n+1} + \sin \frac{\pi}{n+2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2n} \right).$$

Megoldás. A határértékben szereplő kifejezés a következőképpen alakítható

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{n+1} + \sin \frac{\pi}{n+2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2n} &= \\ &= (n+1) \sin \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \cdot \frac{1}{n+1} + (n+2) \sin \left(\frac{\pi}{n+2} \right) \cdot \frac{1}{n+2} + \cdots + \\ &\quad + (2n) \sin \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cdot \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Legyen

$$a_n = n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{és} \quad B_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

(azaz a segédttételben szereplő $b_n = \frac{1}{n}$).

Felhasználva, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \ln 2,$$

a segédttétel alapján kapjuk, hogy

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{n+1} + \sin \frac{\pi}{n+2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2n} \right) = \pi \ln 2.$$

Megjegyzés. 1. A 6. alkalmazásban szereplő (5) határértéket általánosítva, ha $p \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1)^{p-1} \sin^p \left(\frac{\pi}{n+1} \right) + (n+2)^{p-1} \sin^p \left(\frac{\pi}{n+2} \right) + \cdots \right. \\ \left. \cdots + (2n)^{p-1} \sin^p \left(\frac{\pi}{2n} \right) \right] = \pi^p \ln 2, \end{aligned}$$

ahol az előbbiekhöz hasonló gondolatmenettel élve

$$a_n = \left(n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \right)^p \quad \text{és} \quad B_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

választásokat eszközöljük.

2. Néhány további határérték, melyek kiszámítása hasonló gondolatmenettel történhet. Ezt a Tisztelt Olvasóra bízunk.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{n+1} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2} + \cdots + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{\frac{n+1}{n+2}} \cdots \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{\frac{2n-1}{2n}} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \cdots - \sqrt{\frac{2n-1}{2n}} \right)$$

Irodalomjegyzék

- [1] S. Savchev–T. Andreescu, *Mathematical Miniatures*, 2003, Mathematical Association of America, 21-23 old.
- [2] Németh József, *Előadások a végtelen sorokról*, Szeged, 2004, Polygon, 147-148 old.
- [3] Urbán János, *Határértékszámítás*, Budapest, 1975, Műszaki Könyvkiadó, 136-137 old.
- [4] Szász Pál, *A differenciál- és integrálszámítás elemei 1.*, Budapest, 2000, Typotex Kiadó, 261-262 old.

Molnár István, Szent István Egyetem Gazdasági Kar Alkalmazott Természettudományi Intézet, Békéscsaba, molnar@zeus.tsf.hu

