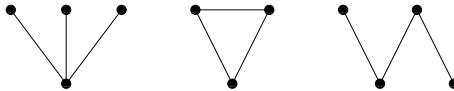


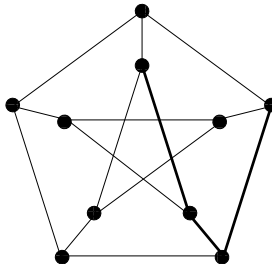
Karmok és út-felbontások

BARÁT JÁNOS

Írásunkban feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a gráfelmélet alapfogalmait, melyek megtalálhatók például Hajnal Péter könyvében [3]. Szükségünk lesz azon összefüggő gráfokra, melyeknek három élük van. Nincs sok ilyen gráf, összesen csak három: a karom, a háromszög, és a három hosszú út. Ezek elterjedt jelölése rendre: $K_{1,3}$, C_3 , P_4 .



A gráfelmélet állatorvosi lova a Petersen-gráf. Hogy miért, arról már könyvet is írtak [5]. Tudjuk, hogy a Petersen-gráfnak 10 csúcsa van, minden csúcs foka 3, így éleinek száma 15. Lehet-e úgy csoportosítani az éleket 5 részre, hogy minden rész ugyanaz az összefüggő gráf legyen? A fenti ábra mutatja a három lehetőséget. Mivel a Petersen-gráfban nincs háromszög, ezért egy lehetőség azonnal kizárható. Az igenlő válasz indoklására lásd a következő ábrát.



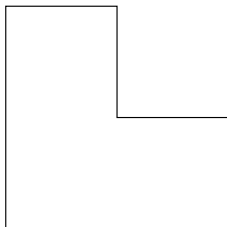
Ha a vastaggal jelölt utat megfelelően elforgatjuk négyszer, akkor megvalósul a kért felbontás. Mindenki próbálja meg maga eldönteni, hogy lehetséges-e hasonló felbontást adni karmokkal.

Legyen $\mathcal{H}$ gráfok egy halmaza. Azt mondjuk, hogy egy G gráfnak van $\mathcal{H}$ -felbontása, ha G éleit olyan részgráfokra tudjuk osztani, hogy mindegyik izomorf legyen egy $\mathcal{H}$ -beli gráffal. Sokszor $\mathcal{H} = \{H\}$ tehát egy gráffal akarunk „parkettázni”.

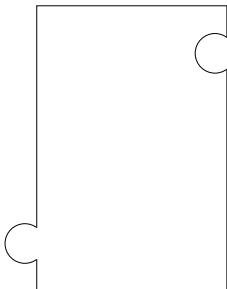
Ekkor az egyszerűbb „ H -felbontása G -nek” szóhasználatával és jelöléssel dolgozunk. Mindig feltesszük, hogy G csúcsainak száma n , és H élszáma osztja G éleinek számát.

Izgalmas (és valószínűleg jóval korábbi) kérdés annak vizsgálata, hogy egy síkgeometriai alakzat mikor bontható fel kettő, három, négy stb. egybevágó alakzatra. Adunk most két ilyen fejtörőt. Játékos kedvű olvasóinknak javasoljuk Martin Gardner könyvét [2], amelyben további példák találhatók.

1. Egy gazdag földtulajdonos halála után négy fia egy nagy L alakú földet örökölt. Adjunk egybevágó darabokat az örökösöknek.



2. Osszuk fel két egybevágó darabra a következő alakzatot:

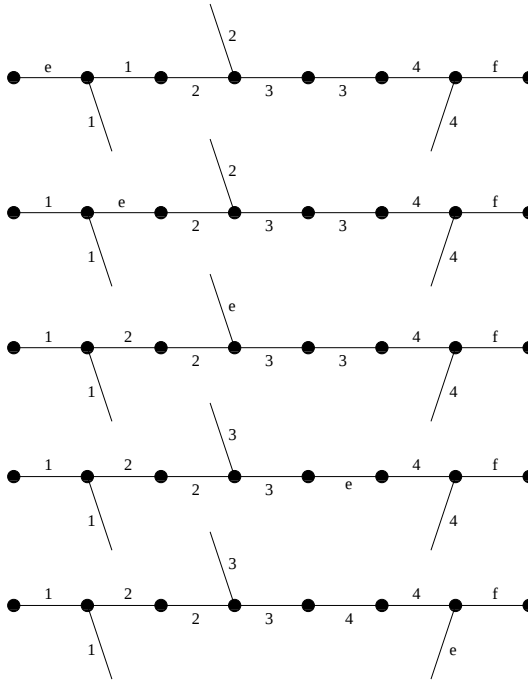


Visszatérve a gráfokhoz, a legegyszerűbb ilyen típusú kérdés az, hogy minden összefüggő, páros élszámú gráf felbontható-e 2-élű utakra? Erre igenlő a válasz.

1. Lemma. *Minden olyan összefüggő gráf, amelynek páros sok éle van, felbontható 2-élű utakra.*

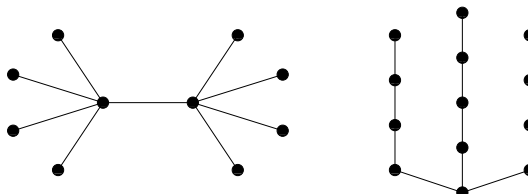
Bizonyítás. A 2-élű utakra elterjedt a „cseresznye” elnevezés. A bizonyítás ötlete a következő [4]. Pakoljunk rá a gráfra találmra olyan sok cseresznyét, amennyit sikerül. Ha ez egy felbontás, akkor készen vagyunk. Különben kimaradt páros sok él. Ezek közül legyen kettő e és f . Mivel a gráf összefüggő, ezért létezik út e és f között. Vegyük az összes e és f párokhoz tartozó ilyen utak közül a legrövidebbet,

legyen ez P . A P útban szerepelnek cseresznyék és fél cseresznyék. Vegyük hozzá az utóbbiak másik felét is P -hez.



Az e élel a szomszédos éllel, legyen ez e_1 , egyesítsük cseresznyévé. Így az e_1 -et tartalmazó cseresznye másik éle pár nélkül marad. Egyesítsük őt az úton következő éllel, stb., ahogyan a fenti ábrán látható. Meggondolható, hogy ezen eljárással sikerül a cseresznyék számát eggyel megnövelni. Végül az összes él párokba szedhető. ■

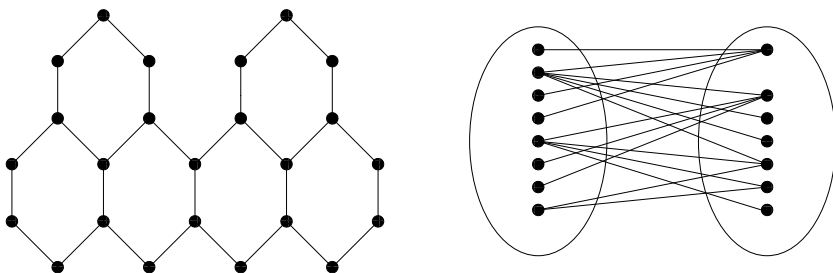
A következő lépésben azt vizsgálhatnánk, hogy egy G gráfnak van-e P_4 -felbontása, ha G élszáma hárommal osztható. Mindenki látja, hogy itt is fel kell tennünk, hogy G legyen összefüggő. Tekintsük most a következő gráfokat:



Mindenki meggyőződhet róla, hogy ezeknek nincs P_4 -felbontása. Van aki arra

is ráérez, hogy ennek az is oka, hogy a fenti gráfokban van olyan él, amelyet elvéve a gráf szétesik két részre. Azon gráfokat, amelyekben nincs ilyen él, kétszeresen összefüggő gráfoknak hívjuk.

Jünger, Reinelt és Pulleyblank [7] azt a kérdést vizsgálta, hogy milyen gráfoknak van $\{P_4, C_3, K_{1,3}\}$ -felbontása. Tehát olyan részekre akarjuk a gráf éleit osztani, melyek összefüggőek és három élük van. Megmutatták, hogy minden olyan kétszeresen összefüggő gráf felbontható, amelyben az élek száma hárommal osztható. A felbontásokban P_4 és $K_{1,3}$ jól kiegészítik egymást. Viszont, ahogy azt már láttuk is, van amikor C_3 -at nem is tudunk használni, hiszen a gráfban nincs egyáltalán háromszög. Erre jól ismert példa a 2-színezhető gráfok, amelyeket páros gráfoknak is hívunk. Ezekben nincs páratlan hosszú kör.



A háromszögmentes gráfokra érdekes lenni eldönteni, hogy melyek azok, amelyek felbontásához elegendő csak az egyik építőkövet használni. A továbbiakban ehhez kapcsolódó kérdéseket vizsgálunk. Jünger, Reinelt és Pulleyblank a következő, máig megoldatlan problémát is felvetették. Ebben csak utakat engednek meg, viszont háromszögmentes gráfokon elég próbálkozni. (Gyanús a sejtésben, hogy a síkgráf feltétel nem hagyható el.)

2. Kérdés. ([7]) *Igaz-e hogy minden kétszeresen összefüggő, páros, síkgráf, melynek élszáma hárommal osztható, felbontható háromélű utakra?*

Nézzük, hogy milyen gráfokra tudunk biztosan P_4 -felbontást adni. A következő egyszerű állítást már sokan felfedezték.

3. Lemma. *Legyen G egy kétszeresen összefüggő gráf, amelyben minden csúcs foka 3. Ekkor G -nek van P_4 -felbontása.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy G éleinek száma osztható 3-mal. A kétszeresen összefüggőség miatt G -ben van teljes párosítás. Ez Petersen tétele, ami megtalálható [3] 123. oldalán. Legyen ez a teljes párosítás M . Ekkor G -ből elhagyva M éleit egy 2-reguláris gráfot kapunk. Azaz $G - M$ körök uniója. Irányítsuk most ezen éleket úgy, hogy irányított köröket kapjunk. Ekkor az eredeti G gráf minden csúcsára pontosan egy kimenő él illeszkedik. Ragasszuk most hozzá az M -beli

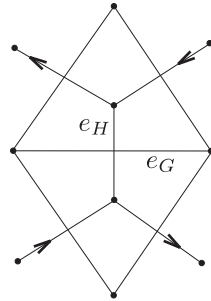
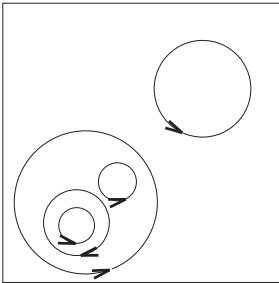
élek végpontjaihoz a belőlük kifelé induló egy-egy élt. Az irányítást most elfelejtve kaptuk a G gráf egy P_4 -felbontását. ■

Az előző bizonyítás alapötletét fogjuk ismét használni. Egy síkgráfot maximálisnak hívunk, ha bárhogyan is adunk hozzá egy új élet, a keletkező gráf már nem síkgráf. Egy ilyen maximális gráf minden tartománya háromszög, és $3n - 6$ éle van. Így természetes jelölt arra, hogy az éleit izomorf 3-élű gráfokra bontsuk.

4. Tétel. [Häggkvist, Johansson] *Minden legalább 4 csúcsú maximális síkgráfnak van P_4 -felbontása.*

Bizonyítás. Legyen G egy gráf a fenti tulajdonságokkal. Ekkor G duálisa egy 3-reguláris 2-összefüggő H gráf. Ekkor, Petersen tétele miatt, van H -ban egy M teljes párosítás. Elhagyva H -ból az M -beli éleket, körök unióját kapjuk.

Csináljunk ezen körökből irányított köröket. Azon körök, melyek a végtelen tartománnyal határosak, kapják a sík irányításának megfelelő irányítást. Azok a körök, amelyek az első lépésben irányított körök belsejében a határon vannak, azok kapják az ellentétes irányítást. Ezt folytassuk, amíg kell. Vegyük észre a következőt: A H duálisban azok az élek, amelyek áthaladnak egy e éltre illeszkedő két háromszög-tartományon, ellentétesen vannak irányítva.



Minden $e \in M$ esetén ragasszuk hozzá e -hez azt a két H -beli élet, amely kifelé van irányítva az e végpontjaiból. Így kapjuk a H gráf egy P_4 -felbontását. Ezeknek az éleknek megfelelő élek a G gráfban szintén egy P_4 -felbontást adnak. Csak azt kell látnunk, hogy sem karom sem háromszög nem keletkezik, az irányítások megfelelő választása miatt. ■

Karom-felbontások leírhatók irányítások segítségével. Ha egy G gráfnak van karom-felbontása, akkor G élei irányíthatók a következő módon. A felbontásban szereplő minden karom éleit irányítsuk a karom 3-fokú csúcsából kifelé. A keletkezett irányított gráfban minden kifok kongruens 0 (mod 3). Fordítva is, ha G -nek van ilyen irányítása, akkor megkonstruálható a karom-felbontás. Ezen összefüggés

motiválta, hogy felbontásokat ne közvetlenül, hanem a gráf éleinek irányításával keressük. Ezért érdemes tanulmányoznunk gráfok éleinek speciális irányításait.

Ha v egy irányított gráf olyan csúcsa, amelyre $d^+(v) \equiv d^-(v) \pmod{3}$, akkor azt mondjuk, hogy az irányítás *kiegyensúlyozott* v -ben. Egy G gráf irányítását *Tutte-irányításnak* hívjuk, ha minden csúcs kiegyensúlyozott.

5. Lemma. *Minden, legalább öt csúcsú G maximális síkgráfnak van Tutte-irányítása.*

Bizonyítás. Brooks egy tétele azt mondja ki, hogy egy gráf csúcsai jól színezhetők annyi színnel, amennyi a legnagyobb foksám a gráfban. (ez az állítás megtalálható [3] 173. oldalán). Brooks tételét alkalmazva a G síkgráf duálisára kapjuk, hogy G tartományai jól színezhetők 3 színnel. Vegyünk egy ilyen 3-színezést. Ennek a segítségével definiáljuk a G éleinek irányítását a következőképpen. Minden élre két háromszög illeszkedik. Egy adott e él esetén, gondolatban forgassuk úgy a gráfot, hogy e legyen vízszintes, ekkor a két háromszöget nevezzük alsónak és felsőnek. Ha az alsó háromszög színe i , és a felső háromszög színe $i + 1 \pmod{3}$, akkor irányítsuk az e élet jobbról balra. Ellenkező esetben balról jobbra. Vizsgáljuk most meg, hogy egy tetszőleges v csúcsban hogyan alakul az élék irányítása. Tegyük fel, hogy a T tartomány egyik csúcsa v , és T színe 1. Ekkor T -ből indulva bejárhatjuk a v -vel szomszédos tartományokat, mondjuk az óramutató járásával ellentétes irányban. Ekkor az élék irányítását meghatározza a bejárt tartományok sorrendje. Képzeljük el most, hogy csak három tartomány van, és ezek színe a fenti körüljárással 1,2,3. A v körüli bejárást szemléltethetjük úgy, hogy ezen a három tartományon mozgatunk egy zsetont, az éppen aktuális tartomány színe szerint. Ekkor a v -t körüljárva a zsetonunk oda-vissza, körbe-körbe mozoghat. De a lényeg, hogy az 1 színű mezőből indult, és az 1 színű mezőbe érkezett. Ezért az óramutató járásával megegyező lépések, és az ellentétes irányú lépések számának különbsége 3-nak többszöröse. Így minden v csúcsra $d^+(v) \equiv d^-(v) \pmod{3}$. ■

6. Lemma. *Minden G maximális síkgráfnak van karom-felbontása.*

Bizonyítás. Az ötlet a következő. Felhasználjuk azt az egyszerű eredményt, hogy minden síkgráf felbomlik legfeljebb 3 erdő uniójára [8]. Utána elérjük, hogy minden erdő pontosan két fából álljon. Továbbá, legyen két olyan csúcsa G -nek, amelyek az említett hat fát lefoglalják. Azaz három fa tartalmazza x -et és három fa tartalmazza y -t. Ekkor irányítsuk G éleit a megfelelő fákban x és y felé. Így minden fában minden csúcs kifoka 1 lesz, kivéve x -et és y -t. Ezen két csúcs kifoka 0 lesz, az egész irányított G -ben is. Viszont minden más csúcs három erdőben lesz benne, így a kifoka pontosan 3. Ez pedig éppen egy karom-felbontás.

Hátra vannak még a részletek. Tudjuk, hogy G -nek $3n - 6$ éle van. Ezért a három erdő élszáma $(n - 1, n - 1, n - 4)$, $(n - 1, n - 2, n - 3)$ vagy $(n - 2, n - 2, n - 2)$. Az utolsó lehetőség azt jelenti, hogy a három erdő mindegyike két fából áll. Ezt szeretnénk elérni. Ha valamelyik D erdő ≥ 3 fából áll, akkor válasszunk ki két különböző komponenst. Vegyük észre, hogy ekkor van olyan éle G -nek, ami a felbontásban egy T feszítőfába került, és D ezen két komponense között megy. Ezt az élet a feszítőfából áthelyezve D -be kapunk egy T' és egy D' erdőt. Ezek közül T' biztosan két fából áll, és D' is kettő vagy három fából. Ezt a trükköt esetleg még egyszer alkalmazzuk. Így kapjuk a kívánt felbontást, amelyben minden erdő két fából áll.

Azt is szeretnénk még elérni, hogy legyen két gyökércsúcs, amelyek 3-3 különböző fában vannak. Ez általában teljesül. Egy kis probléma lehet csak. Könnyű látni, hogy mindenképpen van két olyan erdő, amelyre találunk két csúcsot, ami két-két különböző fában van. Legyen $x \in T_1 \cap T_3$ és $y \in T_2 \cap T_4$. A harmadik erdő két fája azonban lehet olyan helyzetű, hogy az egyik csúcshalmaza megegyezik $(T_1 \cap T_3) \cup (T_2 \cap T_4)$ -vel. Ekkor ismét eláthelyezéseket kell csinálnunk, ami ezt a helyzetet feloldja. Az olvasó ellenőrizheti, hogy ez mindig lehetséges. ■

Az előző két Lemma eredménye mutatja a karom-felbontások és a Tutte-irányítások közti hasonlóságot. Persze, a bizonyítás különbözősége óvatosságra int, hogy a két fogalom nem ugyanaz. A mélyebb összefüggés és egy közös általánosítás a témája [1]-nek.

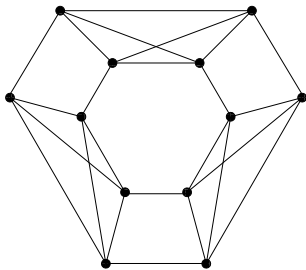
7. Sejtés. *Ha G egy 4-szeresen él-összefüggő síkgráf, amelynek élszáma 3-mal osztható, akkor G -nek van karom-felbontása.*

Gondoljuk meg az eggyel kisebb él-összefüggőséget. Egy 3-reguláris G gráfnak akkor és csak akkor van karom-felbontása, ha G páros gráf. Hiszen egy ilyen gráfnak $2k$ csúcsa és $3k$ éle van. Ezért a felbontásban k darab karomnak kell szerepelnie, és a karmok középpontjai független halmazt alkotnak. Meggondolható, hogy létezik 3-élösszefüggő, 3-reguláris síkgráf, ami nem páros gráf. Ebből a szempontból a 7. Sejtés éles.

Nem tűnik indokoltnak a sejtésben a síkgráf feltétel. Kínálja magát az az erősebb állítás, hogy

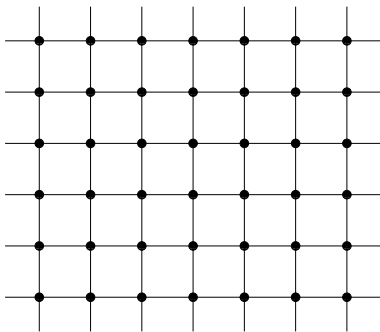
8. Sejtés. *Minden 4-szeresen él-összefüggő gráfnak van karom-felbontása.*

De ez nem igaz. Vegyük a K_4 teljes gráf három diszjunkt példányát. Minden pár közé húzzunk be még két-két élet úgy, hogy egy 4-reguláris G_0 gráfot kapjunk. Ennek a 4-szeresen él-összefüggő gráfnak 12 csúcsa és 24 éle van.



Tegyük fel, hogy G_0 -nak van karom-felbontása. Ennek nyolc karomból kell állnia. Minden karom éleit irányítsuk a levelek felé. Az így kialakult irányított gráfban van négy nyelő, azaz olyan csúcs, melyből nem indul ki él. A skatulya-elv miatt ezek közül kettő ugyanabba a K_4 -be esik. Ez viszont lehetetlen, hiszen akkor megy köztük él, ami nem indulhat ki két helyről is. Ez az ellentmondás igazolja, hogy G_0 -nak nincs karom-felbontása. ■

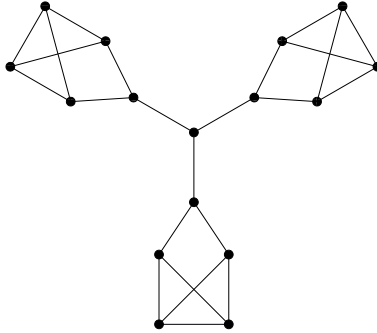
Feladat. Mutassuk meg, hogy egy megfelelő élszámú tóruszhálónak van karom-felbontása.



Végül kitűzünk egy nehezebb feladatot, aminek megoldásához a cikkben szereplő ötletek jól használhatók.

Feladat. Minden 3-reguláris gráf élhalmaza felbontható legfeljebb 4 hosszú utakra úgy, hogy minden csúcs valamelyik út végpontja, és valamelyik út belső pontja. (Az ilyen tulajdonságú felbontást kiegyensúlyozottnak nevezzük)

Megjegyzés. Az utak hossza nem csökkenthető. Van olyan 3-reguláris gráf, amelynek nincs kiegyensúlyozott felbontása legfeljebb 3 hosszú utakra. Egy ilyen gráf látható a következő ábrán.



Vegyük észre továbbá, hogy a 3. Lemma miatt minden kétszeresen élössze-függő 3-reguláris gráfnak van kiegyensúlyozott P_4 -felbontása.

Irodalom

- [1] J. Barát, C. Thomassen, Claw-decompositions and Tutte-orientations. *J. Graph Theory* **52** (2006) 135–146.
- [2] M. Gardner, Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers. Mathematical Association of America, Washington DC, (1997), x+319 pp.
- [3] Hajnal P., Gráfelmélet. Polygon jegyzettár, Szeged, (1997) x+296 pp.
- [4] N. Hartsfield, G. Ringel, Pearls in graph theory. A comprehensive introduction. Academic Press, Inc., Boston, MA, (1994), x+249 pp.
- [5] D.A. Holton, J. Sheehan, The Petersen graph. Cambridge University Press, Cambridge, (1993), viii+353 pp.
- [6] R. Häggkvist, R. Johansson, A note on edge-decompositions of planar graphs. *Discrete Math.* **283**, (2004), 263–266.
- [7] M. Jünger, G. Reinelt and W.R. Pulleyblank, On partitioning the edges of graphs into connected subgraphs. *J. Graph Theory* **9**, (1985), 539–549.
- [8] C.St.J.A. Nash-Williams, Decomposition of finite graphs into forests. *J. London Math. Soc.* **39**, (1964), 12.

Barát János, SZTE, Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1.,
 barat@math.u-szeged.hu

