

Az arkhimédeszi tulajdonságról

NÉMETH ZOLTÁN

Ezen cikk első változatát több éve írtam. A Polygon 2000. évi 1. számában jelent meg Filep László cikke [F], melyben a valós számok tanításának lehetőségeiről esett szó. Ez a cikk indított arra, hogy leírjak néhány gondolatot a valós számok teljességéről és azok tanításáról. A Polygon jelen számában jelenik meg Honti Dénes cikke, amely ugyanezt a kérdéskört más kiindulópontból tárgyalja. Bár témánk és következtetéseink is gyakran hasonlóak, úgy gondolom, a két más irányú megközelítés önmagában is érdekes lehet.

A valós számok szokásos felépítéseiben hol axiómaként szerepel az arkhimédeszi tulajdonság, hol bizonyítják. Jelen cikk célja annak a vizsgálata, hogy mi ennek a tulajdonságnak a szerepe. Látni fogjuk, hogy a teljességi axióma egyes alakjai megkívánják e tulajdonság posztulálását, mások nem. Úgy gondolom, ez az összefoglalás hasznos lehet, hiszen az analízis különböző tankönyvei (ezekben találkozunk a legtöbbször a valós számok fogalmának fölépítésével), az alapok aprólékos részletezése helyett, gyorsan kiépítik a konvergencia és/vagy a folytonosság teljes elméletét.

Cikkünk 4. és 5. szakaszában megvizsgáljuk, vannak-e „nemarkhimédeszi” struktúrák, és ha vannak, milyenek.

1. A valós számok tanításáról

A valós számok fogalmának tanítása a középiskolában, de még az egyetemen is, igen nehéz feladat. Úgy gondolom, ezt az elvi nehézséget nem szabad eltakarni. Természetesen a kidolgozás alapossága iskolától, csoporttól függően változhat. A legtöbb középiskolában alighanem be kell érünk valamilyen szemléletes illusztrációval, de ekkor is jelezniünk kell, hogy itt egy mély problémaán léptünk át.

A valós számok bevezetésének lényegében két útja van, az axiomatikus és a konstruktív. Vegytiszta formájában mindkettő elég nehéz ahhoz, hogy egyedülként alkalmazhassuk.

Mint [F]-ben is olvashatjuk, a tisztán axiomatikus módszer életidegen, nem felel meg a fogalmak fokozatos kifejlődésének. (Sem a matematika történeti fejlődésének, sem a tanulmányaink során bennünk végbemenő „lélektani” fejlődésnek.)

Rádásul az axiómarendszer felállítása után, meg kell vizsgálnunk, kielégíthető-e; és ha igen, kielégíthetik-e lényegesen különböző struktúrák? Egyik bizonyítás sem végezhető el azon a szinten, ahol már szükségünk lenne a valós szám fogalmára.

Kövessük a konstruktív utat? Ekkor például a racionális számok megkonstruálásakor kiindulunk az egész számokból alkotott (a, b) rendezett párokból, majd értelmezzük az összeadást: $(a, b) \oplus (c, d) := (ad + bc, bd) \dots$ Miért pont így értelmezzük? Ez bizony „Deus ex machina”, aligha van rá jobb válasz, mint arra hivatkozni, hogy (a, b) valójában az („ismert”) $\frac{a}{b}$ törtet jelenti $\dots$ És mire a végére jutunk, teljesen elszakadtunk a szemlélettől, hiszen a valós számokra általában úgy gondolunk, mint tizedes törtekre, a számegyenes pontjaira, vagy csak egyszerűen „számokra”, nem pedig mint (pl.) a racionális számok halmazának bizonyos osztályozásaira (ahol a „racionális számok” egész számokból képezett párok ekvivalenciaosztályai stb.).

Úgy gondolom, a középiskolában, az egyetem alsóbb évfolyamain a legegyszerűbb, ha valamiféle fél- (vagy negyed-) axiomatikus utat követünk. Felsorolunk bizonyos tulajdonságokat, melyeket a valós számoktól elvárunk, de az ellentmondásmentességet és az egyértelműséget csak kimondjuk. Természetesen az axiómák kimondása előtt a lehető legtöbb példával és feladattal kell előkészítenünk azokat, megfogalmazásuk után újra példákkal és bizonyításokkal kell terjedelmüket, hasznosságukat illusztrálnunk. A konstruktív utat alighanem csak az egyetem felsőbb évfolyamain járhatjuk végig, de az alsóbb szinteken is tehetünk, sőt, célszerű is tennünk egy-egy nem túl bonyolult konstruktív lépést (egy középiskolás szakkör például elég érett lehet arra, hogy absztrakt módon is megkonstruálja a természetes számokból az egész számokat).

2. Egy axiómarendszer

Algebrai tulajdonságok

Legyen K egy algebrai test, azaz „értelmezett rajta a négy alapl művelet a szokásos tulajdonságokkal”. A pontos axiómarendszert most nem adjuk meg, ez az algebra tankönyveiben megtalálható. Megjegyezzük viszont, hogy az egységelemet 1-gyel jelölve, értelmezhetők $2 := 1 + 1$, 3 , 4 , $\dots$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\dots$, valamint használhatjuk az $a + a =: 2a$, $2a + a =: 3a$, $\dots$; $a \cdot a =: a^2$, $a^2 \cdot a =: a^3 \dots$ jelöléseket, és érvényesek a szokásos azonosságok is (ezek némelyikének bizonyítása a formális módszer jó gyakorlása lehet).

Rendezettség

Legyen adott K -n egy ($<$ -bel jelölt) teljes rendezés, azaz $\forall a, b, c \in K$ -ra 1a) ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$, és 1b) az $a < b$, $b < a$, $a = b$ relációk közül pontosan az egyik teljesül. Ez a rendezés legyen az alapl műveletekkel kompatibilis,

azaz $\forall a, b, c \in K$ esetén, 2a) ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$, valamint 2b) ha $a < b$ és $0 < c$, akkor $ac < bc$.

(Érdekes lehet a másik szokásos felépítés is, amelyben csak a pozitív számok halmazát jelöljük ki: ekkor a rendezést a műveletek segítségével definiálhatjuk.)

Jegyezzük meg, hogy a rendezés fogalma segítségével értelmezhetők az intervallumok (pl. $[a, b) := \{x \in K : a \leq x < b\}$), a félegyenesek (pl. $(-\infty, b) := \{x \in K : x < b\}$), a $(K$ -beli) sorozatok monotonitása, a korlátosság és a legkisebb felső korlát fogalma is (sup $H = c$, ha $\forall h \in H$ esetén $h \leq c$, és $\forall c' < c$ esetén $\exists h \in H$, amelyre $c' < h$). Az viszont nyitott kérdés, hogy van-e legkisebb felső korlátja valamely $H \subset K$ -nak. Egy teljesen rendezett test azonban szükségképpen *sűrű*, bármelyik két $a, b \in K$ eleme között is van elem, például $\frac{1}{2}(a + b)$.

A K testet *arkhimédieszi tulajdonságúnak* nevezzük, ha $a \neq 0$ esetén az (na) számtani sorozatok nem korlátosak. Látni fogjuk, hogy mind a supremum létezése, mind az arkhimédieszi tulajdonság teljesülése inkább a „teljesség” kérdésköréhez tartozik.

Teljesség

Mielőtt a „teljességi axióma” különböző alakjait megadnánk, még két definícióra lesz szükségünk.

Azt mondjuk, hogy az a_n K -beli sorozat *konvergál* az $a \in K$ -hoz, ha $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$ esetén van olyan ν , hogy $\forall n > \nu$ értékre $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$. Egy $H \subseteq K$ halmaznak a $c \in K$ *torlódási pontja*, ha bármely $(\alpha, \beta) \ni c$ nyílt intervallum esetén a $\{H \cap (\alpha, \beta)\}$ halmaz végtelen számosságú. Ennek megfelelően, az a_n K -beli sorozatnak a $c \in K$ *torlódási pontja*, ha bármely $(\alpha, \beta) \ni c$ nyílt intervallum esetén végtelen sok n értékre igaz, hogy $a_n \in (\alpha, \beta)$.

Tekintsük a következő állításokat:

1. Állítás. *K -ban bármely monoton növekedő, felülről korlátos sorozat konvergens.*

Nyilván az állítás ekvivalens a monoton csökkenő, alulról korlátos sorozatokról szóló párjával.

2. Állítás. *Ha $H \subset K$ nemüres és felülről korlátos, akkor van legkisebb felső korlátja (felsőhatár-tulajdonság).*

Most is megjegyezhetjük, hogy az alulról korlátos halmazok legnagyobb alsó korlátjáról szóló állítás a mienkkel ekvivalens.

3. Állítás. *Ha adott egy $[a, b] \subset K$ zárt intervallum, és $I_\gamma = (\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$ nyílt intervallumok egy olyan rendszere, hogy egyesítésük tartalmazza (lefedi) $[a, b]$ -t, akkor kiválasztható közülük véges sok olyan $I_1, \dots, I_n$ intervallum, hogy már az ő egyesítésük is tartalmazza $[a, b]$ -t (Heine–Borel-féle lefedési tétel).*

4. Állítás. Ha $H \subset K$ korlátos és végtelen (számosságú) halmaz, akkor van torlódási pontja (Bolzano–Weierstrass tétel).

5. Állítás. (i) $\forall a \in K$, $a \neq 0$ esetén az (na) sorozat nem korlátos (arkhimédieszi tulajdonság), valamint (ii) ha (a_n) olyan sorozat, hogy $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$ esetén van olyan ν , hogy $\forall n, m > \nu$ értékre $-\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon$, akkor az (a_n) sorozat konvergens (az (ii) rész az ún. Cauchy-féle konvergenciakritérium).

6. Állítás. (i) $\forall a \in K$, $a \neq 0$ esetén az (na) sorozat nem korlátos, valamint (ii) ha $[a_n, b_n]$ zárt intervallumok egy olyan sorozata, hogy $\forall n$ -re $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, akkor a $\bigcap_n [a_n, b_n]$ metszet nem üres (az (ii) rész az ún. Cantor-féle tétel).

Elegendő föltenni a metszet nemüres voltát. Az ugyanis belátható, hogy ha az intervallumok hossza minden határon túl csökken, az intervallumoknak legfeljebb egy közös pontja lehet.

7. Állítás. Ha $A, B \subset K$, $A, B \neq \emptyset$ olyanok, hogy $A \cup B = K$ és $A \cap B = \emptyset$, valamint $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ esetén $a < b$, akkor vagy az A -nak van legnagyobb, vagy a B -nek van legkisebb eleme (A és B a Dedekind-féle szeletek).

Most következhet cikkünk egyik legfontosabb állítása:

Tétel. A fenti hét állítás páronként ekvivalens.

Mielőtt rátérnénk az ekvivalenciák bizonyítására, nézzük meg, mit is jelent ez eredeti feladatunk, a valós számok fogalmának felépítése szempontjából.

A valós számok teljességét megfogalmazó axiómaként első alkalommal aligha választjuk az 1., 4., vagy 5. állításokat, hiszen a bennük szereplő fogalmak az algebrai tulajdonságokon és a rendezettségen kívül további definíciókat is igényelnek. A Heine–Borel tétel megfogalmazása is szokatlan alakú. Megmaradtak a felsőhatár-tulajdonság és a Dedekind-axióma, ezekből az arkhimédieszi tulajdonság levezethető, illetve a Cantor-tétel, amelyet axiómának választva, fel kell mellé tenni az arkhimédieszi tulajdonság teljesülését is.

Az analízis tankönyvei általában vagy a felsőhatár-tulajdonságból indulnak el, mert talán ebből vezethető le a többi szükséges eredmény a legegyszerűbben, vagy a Cantor-tételből, amely nagyon szemléletes a kétoldali közelítéssel. Úgy gondolom, az egyetem alsóbb évfolyamain, középiskolai tagozaton/szakkörön járható út az algebrai és rendezési tulajdonságok, valamint a 2. és/vagy a 6. állítások kimondása, természetesen minél jobban előkészítve, sok példával és alkalmazással (bizonyításokkal, konstrukciókkal).

Ha (szakkörön, emelt szintű órán) részletesen akarjuk tárgyalni a konvergens sorozatokat (és erre épülve a folytonosságot stb.), az is hatékony út lehet, ha a konvergenciafogalom (példákkal illusztrált) felépítése után az 1. állítást (a monoton

és korlátos sorozatok konvergensek) posztuláljuk. Ez is igen szemléletes háttérű, és könnyen adódik belőle akár a felsőhatár-tulajdonság, akár a Cantor-tétel.

A matematika felsőbb fejezeteiben gyakran találkozunk a 3. és az 5.(ii) állításokkal is. Általában *teljesnek* nevezzük egy teret, ha érvényes benne 5.(ii), azaz a Cauchy-kritérium.

3. Az ekvivalencia bizonyítása

Ebben a szakaszban bebizonyítjuk az előző szakaszban kimondott ekvivalenciát. Bizonyításaink a formális módszerek jó gyakorlásául szolgálhatnak. Akit ez nem érdekel, a szakaszt nyugodtan átugorhatja.

1. $\Rightarrow$ 2. Legyen $h_0 \in H$ és k_0 H -nak egy felső korlátja. Ha $h_0 = k_0$, készen vagyunk. Ha nem, tekintsük $\frac{1}{2}(h_0 + k_0)$ -t. Ha ez H -nak felső korlátja, legyen $h_1 := h_0$, $k_1 := \frac{1}{2}(h_0 + k_0)$, ha nem, legyen $h_1 := \frac{1}{2}(h_0 + k_0)$, $k_1 := k_0$. Tekintsük $\frac{1}{2}(h_1 + k_1)$ -et ... és így tovább, ad infinitum. A kapott (h_n) sorozat monoton növekedő, a (k_n) csökkenő, és $\forall n : h_n \leq k_n$, így (h_n) felülről korlátos, tehát konvergens. Belátjuk, hogy $h := \lim h_n$ a H -nak legkisebb felső korlátja. Tegyük fel, hogy $\exists x \in H : h < x$. Ekkor $\forall n$ -re $h_n \leq h < x \leq k_n$, ebből

$$0 < x - h < \left(\frac{1}{2}\right)^n (k_0 - h_0),$$

mivel $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, $(*)$ kapjuk, hogy $x = h$, ami ellentmondás. Másrészt, ha lenne a H -nak olyan x felső korlátja, amelyre $x < h$, akkor, mivel $\lim h_n = h$, valamely n -re $x < h_n < h$ fenn kellene hogy álljon, ami megint csak ellentmondás, mert h_n nem felső korlátja H -nak.

2. $\Rightarrow$ 3. Tegyük fel, hogy van olyan $[a, b] \subset K$ zárt intervallum, amelyet az $I_\gamma = (\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$ nyílt intervallumok lefednek, de közülük nem választható ki véges lefedés. Legyen $H := \{x \in [a, b] : \text{az } [a, x]\text{-nek van véges lefedése}\}$. H nem üres (mert $a \in H$), és felülről korlátos (mert b felső korlátja). Legyen $c := \sup H$. Van olyan $I_0 = (a_0, \beta_0)$, amelyre $c \in I_0$. Mivel $\frac{1}{2}(\alpha_0 + c) < c < \frac{1}{2}(c + \beta_0)$, így az $[a, \frac{1}{2}(\alpha_0 + c)]$ intervallumnak van véges lefedése, ehhez hozzávéve I_0 -t, végesen lefedtük az $[a, \frac{1}{2}(c + \beta_0)]$ intervallumot is, ami $c = \sup H$ -nak ellentmond.

3. $\Rightarrow$ 4. Tegyük fel, hogy a $H \subset K$ olyan korlátos végtelen halmaz, aminek nincs torlódási pontja. Legyenek a és b a H alsó, ill. felső korlátai. Egyik $x \in [a, b]$ sem torlódási pontja H -nak, ez azt jelenti, hogy minden x -hez találhatunk olyan, őt tartalmazó nyílt intervallumot, amelynek H -val csak véges sok közös pontja van, ezért találhatunk olyan $(\alpha_x, \beta_x) \ni x$ nyílt intervallumot is, amely a H -nak legfeljebb egy pontját tartalmazza (ti. x -et, ha $x \in H$). Az (α_x, β_x) intervallumok együtt lefedik $[a, b]$ -t, de nem választható ki közülük véges lefedés (hiszen akkor H -nak csak véges sok pontját fednék le).

4. $\Rightarrow$ 5. Először is, legyen $0 < a$, és tegyük fel, hogy (na) korlátos. Ekkor létezik torlódási pontja, legyen ez c . Legyen $0 < a' < \frac{1}{2}a$. A $(c - a', c + a')$ intervallumban az (na) sorozatnak végtelen sok eleme van, legyen ezek közül kettő a_n és a_m , $m > n$. Mivel $c - a' < ma, na < c + a'$, ezért $(m - n)a < 2a' < a$, másrészt $(m - n)a \geq 1 \cdot a$, ami ellentmondás.

Az (ii) rész bizonyításához először belátjuk, hogy ha az a_n sorozat kielégíti a Cauchy-feltételt, akkor korlátos. Valóban, ha $\varepsilon := 1$, van olyan ν , hogy $\forall n, m > \nu$ esetén $-\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon$, ha $m := \nu + 1$, akkor $-\varepsilon + a_{\nu+1} < a_n < \varepsilon + a_{\nu+1}$. Tehát a_n korlátos, így van torlódási pontja. Ha két torlódási pontja lenne, $c < c'$, akkor legyen $\varepsilon := \frac{1}{3}(c' - c)$, és a $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, $(c' - \varepsilon, c' + \varepsilon)$ intervallumokba is végtelen sok tagja esik a sorozatnak, így nem teljesülhet a Cauchy-feltétel ezzel az ε -nal.

5. $\Rightarrow$ 6. Tegyük fel, hogy adott $[a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumok egy olyan rendszere, amelyek metszete üres. Ekkor $\frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ sem közös pont, azaz vagy valamelyik a_n nagyobb, vagy valamelyik b_n kisebb nála. Mondjuk $a_{n_1} > \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, ekkor $[a_{n_1}, b_{n_1}] \subseteq [\frac{1}{2}(a_0 + b_0), b_0]$, és $\forall n > n_1$ esetén is $[a_n, b_n] \subseteq [\frac{1}{2}(a_0 + b_0), b_0]$, amiből az következik, hogy

$$\forall n, m > n_1 \text{ esetén} \quad -\frac{1}{2}(b_0 - a_0) < (a_n - a_m), (b_n - b_m) < \frac{1}{2}(b_0 - a_0).$$

Tekintsük most az $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a_0 + b_0) + b_0)$ értéket. Ez sem közös pont, ha mondjuk $b_{n_2} < \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a_0 + b_0) + b_0)$, az előzőhöz hasonlóan

$$\forall n, m > n_2 \text{ esetén} \quad -\frac{1}{4}(b_0 - a_0) < (a_n - a_m), (b_n - b_m) < \frac{1}{4}(b_0 - a_0).$$

És így tovább, ad inf. Kápjuk, hogy az (a_n) , (b_n) sorozatok kielégítik a Cauchy-feltételt, hiszen $(*) (b_0 - a_0)(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$. Tehát léteznek $\lim a_n =: \alpha$, $\lim b_n =: \beta$, mivel $a_n \leq b_n$, ezért $\alpha \leq \beta$, és nyilván $\bigcap_n [a_n, b_n] \supseteq [\alpha, \beta] \neq \emptyset$, ami ellentmondás.

6. $\Rightarrow$ 7. Tegyük fel, hogy A és B olyan szeletek, amelyeknek nincs maximum, illetve minimumuk. Legyen $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Tekintsük $\frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ -t, ha ez A -nak eleme, legyen $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, $b_1 = b_0$, ha B -nek, legyen $a_1 := a_0$, $b_1 := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. Tekintsük $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ -et ... és így tovább, ad inf. Mindenesetre $\forall n$ -re $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, legyen $c := \bigcap_n [a_n, b_n]$. Ez a metszet egyelemű, hiszen $(*) (\frac{1}{2})^n(b_0 - a_0) \rightarrow 0$. A és B szeletek, tehát vagy $c \in A$, vagy $c \in B$. Ha mondjuk $c \in A$, akkor c az A -nak maximális eleme, hiszen ha lenne olyan $a \in A$, amelyre $c < a$, akkor c konstrukciójából következően lenne olyan b_n , amelyre $c < b_n < a$, ez pedig ellentmondás, hiszen $b_n \in B$, és A, B szeletek, tehát $a < b_n$. Hasonlóan, ha $c \in B$, akkor $c = \min B$.

7. $\Rightarrow$ 1. Legyen (a_n) monoton növekedő, felülről korlátos sorozat. Legyen $B := \{b \in K : (\forall n : a_n \leq b)\}$ a felső korlátok halmaza, és legyen $A := K \setminus B$. Az A és B halmazok nemüresek (B -ről feltettük, és pl. $a_1 - 1 \in A$), ha $a \in A$, akkor a nem felső korlátja az (a_n) sorozatnak, így $\exists n: a < a_n \leq b$, tehát A és B Dedekind-szeletek, létezik min B vagy max A , jelöljük ezt c -vel. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in K$) esetén $c - \varepsilon \in A$, $c + \varepsilon \in B$, azaz $\exists \nu: c - \varepsilon < a_\nu$, a sorozat monotonitása miatt

$$\forall n > \nu \text{ értékre} \quad c - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq c + \varepsilon,$$

azaz $c = \lim a_n$.

Aki idáig jutott e szakasz olvasásában, bizonyára kedveli a formális érveléseket. Számára érdekes lehet, hogy a többször is fölhasznált $(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$ állítást $((*)$ -gal jelöltük) kétféleképpen kell bizonyítanunk. Egy teljesen rendezett K testben formálisan érvényes a Bernoulli egyenlőtlenség (a szokásos módon, teljes indukcióval igazolható), így az 5. vagy 6. állítást (és benne az arkhimédieszi tulajdonságot) föltéve, $2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + 1 \cdot n > 1/\varepsilon$, azaz $(-\varepsilon <) 0 < (\frac{1}{2})^n < \varepsilon$, ha n elég nagy. Az 1. állítást föltéve, arra hivatkozhatunk, hogy $(\frac{1}{2})^n$ monoton csökkenő és alulról korlátos, tehát konvergens. Legyen $c := \lim(\frac{1}{2})^n$, mivel $(\frac{1}{2})^{n+1} = (\frac{1}{2})^n \cdot \frac{1}{2}$, a határérték műveleti tulajdonságai miatt $c = c \cdot \frac{1}{2}$, azaz $c = 0$.

4. Egy példa nemarkhimédieszi rendezett testre

Kombinatorikai feladatok megoldásakor gyakran használunk hatványsorokat, generátorfüggvényeket. Elegendő itt [H]-ra utalnunk, amely hatványsorok segítségével (is) megadja a Fibonacci-sorozat elemeinek zárt alakját. Ezekben a feladatokban általában nem vizsgáljuk a szereplő sorok konvergenciáját. A legtöbb esetben erre igazából nincs is szükség, ugyanis a fölhasznált tulajdonságok legtöbbje algebrai úton is levezethető, a formális hatványsorok gyűrűjének vizsgálatával, lásd pl. [N]. Ekkor természetesen merül föl a kérdés, hogy ezt a gyűrűt ki tudjuk-e testté bővíteni?

Tekintsük az

$$A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

formális hatványsorok halmazát! Itt az x határozatlannak csak kényelmi szerepe van, tulajdonképpen beszélhetnénk az $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ sorozatokról is. Legyen $A = B \Leftrightarrow \forall n : a_n = b_n$,

$$A + B := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots,$$

$$A \cdot B := (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots,$$

könnyen látható, hogy halmazunk csakugyan gyűrű az $E := 1 + 0x + 0x^2 + \dots$ egységelemmel és az $O := 0 + 0x + 0x^2 + \dots$ nullaelemmel.

Próbáljuk meghatározni A reciprokát, azaz azt a B elemet, amelyre $AB = E$. Ez csak akkor létezhet, ha $a_0 \neq 0$, akkor viszont létezik is, hiszen $a_0b_0 = 1$ -ből $b_0 = 1/a_0$, $a_0b_1 + a_1b_0 = 0$ -ből $b_1 = -a_1b_0/a_0$, és így tovább, a keresett b_n együtthatókat (rekurzívan) meghatározhatjuk.

Próbáljuk most értelmezni az $A = 0 + \dots + 0x^{k-1} + a_kx^k + \dots$, $a_k \neq 0$ inverzét! Formálisan $A = x^kA'$, ahol $A' = a_k + a_{k+1}x + \dots$, ennek az elemnek a fentiek szerint létezik $B' = b_0 + b_1x + \dots$ reciproka, és legyen az A elem reciproka $B = x^{-k}B'$, azaz $B = b_0x^{-k} + b_1x^{-k+1} + \dots$. Ebből az ötletből kiindulva, tekintsük az összes olyan

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$$

elem halmazát, amely „balról véges”, azaz van olyan r , hogy $\forall n < r$ esetén $a_n = 0$. Az összeadást tagonként végezzük,

$$A + B := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + b_n)x^n,$$

a szorzás a fentieknek megfelelően

$$A \cdot B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x^n \quad \text{ahol} \quad c_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k},$$

itt a c_n együtthatókra adott képlet valójában véges összeg. A reciprokképzés az előző esethez hasonló, „balról kezdve”, rekurzívan a kérdéses együtthatókat kiszámolhatjuk. Ellenőrizhető, hogy struktúránk valóban test, jelöljük K -val.

A „balról végeességet” kihasználva, értelmezhetünk K -n egy (lexikografikus) rendezést. Ha $A \neq B$, legyen k a legkisebb olyan index, amelyre $a_k \neq b_k$, és legyen $A < B \Leftrightarrow a_k < b_k$. Ez nyilván teljes rendezés, és belátható, hogy az összeadás és a szorzás ezzel a rendezéssel monotonak. Erre a K testre tehát mindaz érvényes, amit a 2. szakasz első két pontjában kimondtunk.

Mielőtt továbbhaladnánk, próbáljuk meg elképzelni K rendezését! (Az ábrán szokásosan „balra van a kisebb”.)

$$c, d > 0$$

$$\begin{array}{c} \cdots (\overleftarrow{\cdots 0 + 0x + cx^2 + \cdots}) (\overleftarrow{\cdots + 0 + cx + \cdots}) (\overleftarrow{\cdots 0 + c + 0x + \cdots}) \cdots \\ \cdots (\overleftarrow{\cdots + 0 + cx + dx^4 + \cdots}) (\overleftarrow{\cdots + 0 + cx + dx^3 + \cdots}) (\overleftarrow{\cdots + 0 + cx + dx^2 + \cdots}) \cdots \\ \cdots (\overleftarrow{\cdots}) (\overleftarrow{\cdots}) (\overleftarrow{\cdots}) \cdots \end{array}$$

Megfigyelhetjük, hogy K rendezése fraktálszerűen „önhasonló”. Azonnal látjuk az is, hogy halmazunk egyetlenegy pici darabja sem összefüggő, hiszen végtelen sok részre látszik szétesni.

Vizsgáljuk meg, melyek K -ban a konvergens sorozatok.

Ha $\varepsilon > 0$ valós szám, akkor az $e_k := \cdots 0 + \varepsilon x^k + 0 \cdots$ egy K -beli pozitív elem. Ha $A_n \rightarrow A$, akkor a 2. szakasz konvergenciadefiníciója szerint, van olyan ν , hogy $\forall n > \nu$ esetén

$$A_n - A = \cdots 0 + \cdots + 0x^{k-1} + cx^k + \cdots, \quad \text{ahol} \quad -\varepsilon < c < \varepsilon,$$

azaz, a konvergens sorozatok olyanok, hogy valahonnét kezdve tagjaiknak $(-\infty) \dots, (k-1)$ -edik, k -adik együttthatói megegyeznek a határérték-elem együttthatóival, minden k -ra.

Felhasználva, hogy az e_k elemek pozitívak, valamint a konvergencia fenti jellemzését, könnyű ellenőrizni, hogy halmazunkban teljesül a Cauchy-kritérium (az 5. állítás (ii) része), azaz K teljes halmaz. Nem teljesül viszont az arkhimédieszi tulajdonság, hiszen mondjuk legyen $A := \cdots 0 + x^2 + 0 \cdots$, ekkor $nA = \cdots 0 + nx^2 + 0 \cdots$, amit fölülről korlátoz $\cdots 0 + x + 0 \cdots$. Hasonlóan, tekintsük a

$$\left[\cdots 0 + 0x + nx^2 + 0 \cdots, \cdots 0 + \frac{1}{n}x + 0x^2 + 0 \cdots \right]$$

zárt intervallumokat. Ezeknek nincs közös pontja, hiszen a közös pont nem lehet sem $\cdots 0 + 0x + cx^2 + 0 \cdots$, sem $\cdots 0 + cx + 0x^2 + 0 \cdots$ alakú, hiszen sem $n < c$, sem $c < \frac{1}{n}$ nem állhat fönt minden n értékre (c valós szám). Halmazunkra a 2. szakasz többi állítása (7., 1–4.) sem teljesül, hiszen ezekből következne az arkhimédieszi tulajdonság, de a fenti ötlet alapján gyakorlásképpen mindegyikre konstruálhatunk ellenpéldát is.

Egy halmazt akkor nevezünk összefüggőnek, ha nem bontható fel $A \cup B$ alakban úgy, hogy $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Itt $\overline{A}$ az A halmaz lezártja, azaz az a halmaz, melyet A -ból a torlódási pontjai hozzávételével kapunk. (A valós számok esetében

pl. a Dedekind-szeletek lezártjainak pontosan egy közös pontja van.) K azon részei, melyeket a fenti ábrán egy darabnak jelöltünk, topológiai értelemben zárt részhalmazok, hiszen pl. a $\cdots 0 + cx + \cdots$, $c > 0$ alakú elemek köréből a határérték-képzés nem vezet ki. Első ötletünk helyesnek bizonyult, K diszjunkt zárt darabokra esik szét.

Az olvasónak már bizonyára hiányzik az abszolút érték és/vagy a távolság fogalma. Nem halogatjuk tovább.

Kürschák adta meg 1913-ban az abszolút érték alábbi általános definícióját: Ha K test, legyen $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ olyan függvény, amelyre $\forall a, b \in K$ esetén $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $|ab| = |a| \cdot |b|$, és $|a + b| \leq |a| + |b|$ teljesülnek.

A mi halmazunkban legyen

$$|0| := 0 \quad \text{és} \quad \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n \right| := 2^{-k}, \quad \text{ahol} \quad k := \min\{n : a_n \neq 0\}.$$

Könnyen látható, hogy ez a függvény a fenti értelemben abszolút érték. Minden abszolútérték-függvény meghatároz egy távolságfogalmat, innen már a szokásos úton haladhatunk a környezetek és a konvergencia felé. (Mivel $|e_k| = 2^{-k} \rightarrow 0$, ugyanazt a konvergencia-fogalmat kapjuk, mint az előbb, és ugyanazokra a következtetésekre juthatunk ezen az úton is).

Vegyük észre, hogy a most definiált abszolút értékre nemcsak a háromszög-egyenlőtlenség teljesül, hanem egy erősebb állítás is: $|A + B| \leq \max\{|A|, |B|\}$

5. Nemarkhimédeszi terek

Olyan halmazokon is vizsgálhatunk konvergenciát, amelyeknek egyáltalán nincs algebrai struktúrája. Ilyenkor (egyik) kiindulópontunk a *távolság* (metrika) fogalma lehet. Az $S \neq \emptyset$ halmazon a $d : S^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ távolságfüggvény, ha $\forall a, b, c \in S$ elemre $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$, $d(a, b) = d(b, a)$, valamint

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b).$$

Ebben a szakaszban ([NB] alapján) néhány szót szólunk azokról a terekről, amelyekben a fenti háromszög-egyenlőtlenség helyett a következő, erősebb állítás igaz:

$$\forall a, b, c \in S : \quad d(a, b) \leq \max\{d(a, c), d(c, b)\}.$$

Az ilyen távolságfüggvényeket *ultrametriának* nevezzük. Az előző szakaszban látotthoz hasonló *nemarkhimédeszi abszolút értékek* (azok, amelyekre $|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ teljesül) ultrametrikát határoznak meg.

Milyen lehet egy ultrametrikus tér geometriája? Mindenesetre az ultrametrikus térben nincsenek „igazi” háromszögek. Cikkünk hátralevő részében az ultrametrikus tér köreit vizsgáljuk kedvezőnélként (vagy elrettentésként).

A szokásos módon, ha $r > 0$ valós szám, legyen $C(a, r) := \{x : d(a, x) < r\}$ egy „nyílt” körlap. Ha $b \in C(a, r)$, akkor a b középpontú $C(b, r) \subseteq C(a, r)$, hiszen ha $x \in C(b, r)$, akkor $d(a, x) \leq \max\{d(b, r), d(a, b)\} < r$, sőt, mivel a és b szimmetrikus szerepűek, $C(b, r) = C(a, r)$. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $C(a, r)$ kör minden pontja középen van! Hasonlóan, ha két kör metszete nem üres, akkor az egyik tartalmazza a másikat. Ugyanis, ha $C(a, r_1) \cap C(b, r_2) \ni c$, és $r_1 < r_2$, akkor bármely $x \in C(a, r_1)$ -re $d(b, x) \leq \max\{d(b, a), d(a, x)\} < r_2$, azaz $x \in C(b, r_2)$.

A fenti körlapokat nyíltak neveztük, teljes joggal, hiszen láttuk, hogy bármely pontjuk egy egész környezetével együtt része a körlapnak, azaz belső pont — de akkor miért az idézőjel?

Tekintsük a körlap $C'(a, r) = \{x : d(a, x) \geq r\}$ komplementerét! Ha $b \in C'(a, r)$, tekintsük $C(b, r)$ -t, ez $C(a, r)$ -rel diszjunkt, hiszen ha lenne x közös pontjuk, akkor $C(a, r) = C(x, r)$, így $b \in C(a, r)$, ami ellentmondás. Ezek szerint az a középpontú C körlap C' komplementere is nyílt, akkor viszont a C körlap zárt, összes torlódási pontját tartalmazza. Vegyük észre, hogy sikerült az ultrametrikus teret két diszjunkt zárt halmazra (C és C') fölbontanunk, ez azt jelenti, hogy a tér nem összefüggő (sőt, bármely pontja bármely másiktól elválasztható diszjunkt zárt halmazokkal).

Végezetül, emlékeztetünk arra, hogy minden metrikus térben maga a tér, valamint az üres halmaz egyszerre nyíltak és zártak is. A fentiek szerint az ultrametrikus terekben vannak valódi részhalmazok is, amelyek egyszerre nyíltak és zártak. Az ilyen halmazokat angolul (closed + open) „clopen” halmazoknak nevezik. Magyarul (nyitott + csukott) nevezhetjük „nyíto-csuki” halmaznak (köszönet feleségemnek a szójátékért), de legérdekesebb a spanyol változat: (abierto + cerrado) ezek az „aberrado” halmazok — ha nem is aberráltak, de eléggé szokatlanok.

Az érdeklődő olvasó nemcsak a német és a francia változatot, hanem további érdekességeket, eredményeket és bőséges irodalomjegyzéket is talál [NB]-ben.

Irodalom

- [F] Filep László, A valós szám fogalmának kialakulása, *Polygon*, **X** (1) 2000, 13–34.
- [H] Hajnal Péter, *Elemi kombinatorikai feladatok*, Polygon Kiadó, Szeged, 1997.
- [N] I. Niven, Formal power series, *Amer. Math. Monthly*, 76 (1969), 871–889.
- [NB] L. Narici, E. Beckenstein, Strange terrain — Nonarchimedean spaces, *Amer. Math. Monthly*, 1981, 667–675.

