

Másodfokú egyenletek, négyzetgyökvonás az Óbabiloni Birodalom idején

KLUKOVITS LAJOS

Tanárom, Csákány Béla professzor 75. születésnapjára

1. Rövid történeti bevezetés.

Mezopotámia, a „folyók köze”, a régészeti leletek alapján már a Kr.e. VIII. évezredben is lakott terület volt annak ellenére, hogy e vidék és környezete egyáltalán nem volt barátságos. Nyugaton sivatagok, délen mocsarak övezték a termékeny síkságokat. Kincsekben szegény, még kőben és fában is szűkölködő. A környező magas hegyek elolvadt hava gyakran okozott pusztító árvizeket, amelyek özönvíz-legendák forrásául szolgáltak. Mindezek ellenére az emberi kultúra egyik bölcsője volt. Innen eredt három egyistenhívő világvallás: a judaizmus, a kereszténység és az iszlám. A Közel - Kelet civilizációja sohasem volt izolált, magába zárkózott. Minden kulturális vívmányuk viszonylag gyorsan terjedt át más vidékekre.

A IV. évezredben¹ a lakosság túlnyomó része már falvakban, városokban élt, amelyek kultikus helyek, templomok körül jöttek létre. A gazdaság központja is egy-egy templom (ill. más kultikus hely) volt. Ezt megelőzően is létezett már néhány népesebb település, például Kr.e. 7000 körül a Tigristől északra (a mai Kurdisztán területén) Dzsarmo, amelynek 150 lakosa lehetett ekkor, majd mintegy ezer évvel később Jeriko, amely már igazi városnak is tekinthető a maga közel 2000 lakosával. Mindkét település a mai napig létezik. Általánossá vált a réz használata, majd az évezred vége felé már ónnal is ötvözték. Az így nyert bronz lényegesen keményebb a réznél, így hatékonyabb fegyverek készítését tette lehetővé. E korban készültek az első kerek járművek, bár az első „kerék” még négyszögletű volt, és csak fokozatosan „kerekedett le”. Ismerték a fazekaskorongot, a korábbi kézi kerámiákat egyre szebb, jobban használható eszközök váltották föl.

¹ A neolitikum (a kőkorszak) utolsó időszaka az újkőkör, amelyet kőrézkornak is szokás nevezni, ugyanis ekkor már — ha nem is általánosan — rézből készült eszközöket is használtak.

Ebben az évezredben vándoroltak be a sumerok.² Fokozatosan elfoglalták a Tigris és az Eufrátesz között, elsősorban a délebbre fekvő területeket,³ majd átkelve az Eufráteszen újabb területeket foglaltak el magukba olvasztva az őslakosságot. Megalapították Ur, Uruk, majd Kis városát. A két előbbi város hosszú harcot folytatott a hegemoniáért. Megkezdték az Eufrátesz csatornázását, öntözéses földművelést folytattak. A templomgazdaságok államokká (városállamok) fejlődtek.

Kialakult a „sumer írás”, amely ún. képirás, minden szónak külön jele volt. Az ékírásos jeleket lágy agyagból készített táblákra írták kihegyezett náddal, majd napon megszáritották. Később a fontosabbnak tartottakat kiégették. Érdekes, hogy sokszor az agyagtábla mindkét oldalára írtak. Az írás később egyszerűsödött, csökkent a jelek száma. A XIX. század második felétől nagy mennyiségben kerültek elő ékírásos agyagtáblák. Egyedül az ősi Nippur városa mellett mintegy 50.000 táblát ástak ki.

A III. évezred vége felé jelentek meg az első olyan hódítók, akik a sémi népcsoportba tartoztak. Közülük a legjelentősebbek a két hullámban érkezett akkádok voltak, akik a II. évezred elején megszilárdították uralmukat. Miután szinte minden említésre érdemeset megtanultak a sumeroktól, módszeresen kiirtottak azokat. Az előbb említett nagy mennyiségű agyagtábla zöme akkád nyelvű.

A Kr.e. XVIII. század elején alapította meg Hammurapi a babiloni birodalmat, az ún. Óbabiloni Birodalmat. Uralma alatt egyesítette egész Mezopotámiát, legyőzve a többi királyságot. Sztéléjére⁴ vésve fennmaradt törvénygyűjteménye, amely az ókori Kelet legnagyobb hatású jogi alkotása. Ezt ma Hammurapi törvényei néven ismerjük.

A XX. század elején kiteljesedett régészeti feltárások nyomán nagyszámú olyan agyagtábla került elő, amelyeken matematikai tárgyú szövegek voltak. Ezen agyagtáblák zöme a British Museum, ill. a Yale és a Columbia Egyetemek tulajdona. Megfejtésükben alapvető szerepe volt O. Neugebauernek és A. Sachsnek, az Egyesült Államokban tevékenykedő matematikusoknak [3], [4], [5]. Jelen összeállításunk az ő kutatásaikra, valamint C. B. Boyer [1], M. Kline [2] és B. L. van der Waerden [6], [7] könyveire támaszkodik.

2. A mezopotámiai számírás.

Az Óbabiloni Birodalom kora lényegében megegyezett az Egyiptomi Középbirodalom korával. Ez utóbbi matematikájáról számot adó papiruszokat, például

² Ismeretlen eredetű, de minden bizonnyal nem indoeurópai ill. sémi népcsoport.

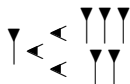
³ Ebben az időben a két folyó még külön torkolattal rendelkezett, csak jóval később alakult ki a mai forma, a folyók közös torkolata.

⁴ Lekerekített felső részű oszlop, amelynek alsó részére akkád nyelven vésték föl a törvényeket. A felső részen domborműves ábrázolás látható, egy trónuson ülő isten (véltetően Marduk) átnyújtja a királynak a törvénytálcát. 1901-ben került elő Susaban, ahová valamikor a Kr.e. II. évezred végén vitték át.

a híres Rhind és a moszkvai (Golenisev) papiruszokat már a XIX. század végén megtalálták és meg is fejtették azokat a XX. század elején. Mindezekből fejlett geometria, és hozzá képest kezdetlegesebb, nehezebb aritmetika tűnt elének.

A mezopotámiai aritmetika nagyrészt azért juthatott az egyiptomiénál lényegesen magasabb fokra, mert — ellentétben az egyiptomival — számírásuk helyiértékes volt. A használt számrendszer alapszáma azonban nem a tíz, hanem a hatvan volt. A hatvanas alap megválasztásának oka nem ismert. Az azonban erősen valószínű, hogy ebből ered az időmérés hatvanas beosztása: egy óra hatvan perc, egy perc hatvan másodperc, stb.

A mezopotámiaiak számírása mindössze két jelet használt, amelyekkel az 1 és a 10 számot jelölték. Az 1 jele, az „ék” ∇ nemcsak 1-et, hanem a 60 bármely egész kitevős hatványát jelölhette (hatvanados törtekkel is számoltak!), míg a 10 jele, a „sarokpánt” $\nwarrow$ szolgált a 60 bármely egész kitevős hatványa tízszeresének jelölésére is. E számírásnak két fogyatéka volt: nem volt jele a hatvanados vesszőnek és a nullának (itt nem a 0-ra mint számra, hanem a számjegy hiányának jelölésére gondolunk). Az utóbbit a későbbiekben — a hellenizmus korában, az Újbabiloni Birodalom idején — részben kiküszöbölték azzal, hogy az egyes jegyek közötti nullák jelölésére egy újabb jelet vezettek be. A szöveggörnyezetből azonban a legtöbbször pontosan kiderült, hogy a jelek mely számot jelölték. Például, az alábbi



jelsorozat — ha egész számnak tekintjük —, akkor egyaránt jelölhette az

$$\begin{aligned} 1 \times 60^3 + 10 \times 60^2 + 20 \times 60 + 5 &= 253.205, \\ 1 \times 60^2 + 30 \times 60 + 5 &= 5.405, \\ 60 + 35 &= 95 \end{aligned}$$

számokat, de további lehetőségek is vannak. Azt, hogy ezek közül aktuálisan melyikről van szó — mint említettük — a szöveggörnyezetből derült ki.

Ha fölteszük, hogy e jelsorozat nemcsak egész szám lehet, akkor többek között az

$$\begin{aligned} 1 + 10 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2} + 5 \times 60^{-3} &= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{43.200}, \\ 1 \times 60 + 35 \times 60^{-1} &= 60\frac{7}{12} \end{aligned}$$

számokat is jelölhette.

Világos, hogy nekünk ma már az ilyen számírás nehézkes, ezért Neugebauer egy igen egyszerű, tízes alapú átírást vezetett be: a hatvanados számjegyeket tízes

számrendszerbeli számokként írta, és vesszővel választotta el azokat. „Hatvanados vesszőként” pedig pontosvesszőt alkalmazott. Így az előbbi számokat a következőképp írhatók:

$$1, 10, 20, 5 \quad 1, 30, 5 \quad 1, 35 \quad \text{illetve} \quad 1; 10, 20, 5 \quad 60; 35.$$

A számolások megkönnyítésére táblázatokat készítettek, például szorzó- és reciprok táblázatokat, de igen sok olyan is előkerült, amelyeken egy adott szám hatványai (pozitív egész kitevős), vagy számok négyzetgyökei szerepeltek. A hatványtáblákat olykor virtuóz módon alkalmazták olyan problémák megoldására is, hogy egy adott összeg adott kamatláb mellett mennyi idő alatt duplázódik meg. Számos esetben lineáris interpolációt is alkalmaztak! Ezen — önmagukban is érdekes — kérdéseket most nem részletezzük.

3. Néhány érdekes feladat, amely másodfokú egyenletre vezet.

Az elkövetkezőkben kilenc feladatot elemzünk. Eredetileg valamennyi szóveges probléma volt és megtalálható [4]-ben. Néhány esetben — dőlt betűvel — közöljük a feladat eredeti szövegét (szögletes zárójelbe téve Neugebauer kiegészítéseit, amely az egyes táblák töredékes volta miatt vált szükségessé) és az eredeti szóveges megoldást is ugyanígy. Ezeket részben [6]-ból vettük át, de saját interpretációkat is közlünk [7] alapján, valamint egy hasonlatosságra utaláskor [8] alapján. A hatodik, a hetedik és a nyolcadik feladat szövege és szóveges megoldás részlete saját, korhűnek tekinthető megfogalmazás. Véleményünk szerint valami hasonló lehetett az eredeti is.

1. Feladat (amely egy Szenkereh mellett talált agyagtáblán olvasható).

Hosszúság és szélesség. A hosszúságot és a szélességet összeszoroztam, és így megkaptam a területet. Amennyivel pedig a hosszúság meghaladja a szélességet, azt hozzáadtam a területhez, és 3,3[-at kaptam]. Hosszúság és szélesség összeadva pedig 27. Mi a hosszúság, szélesség, terület?

27	3,3	az összegek
15		a hosszúság
12		a szélesség
3,0		a terület

Eljárásod ez legyen: 27-et, a hosszúság és a szélesség összegét 3,3-hoz add hozzá; 3,30 [az eredmény]. 2-t a 27-hez add hozzá; 29 [az eredmény]. 29-ből letöröd a felét; 14; 30-szor 14; 30 [az] 3,30; 15. Levonsz 3,30-at 3,30; 15-ből; 0; 15 a különbség. 0; 15 négyzetgyöke 0; 30. Az első 14; 30-hoz add hozzá a 0; 30-at: a hosszúság 15. 0; 30-at a második 14; 30-ból kivonsz: a szélesség 14. Azt a 2-t, amit a 27-hez hozzáadtál,

14-ből, a szélességből levonod: 12 a végleges szélesség. A 15 hosszúságot és a 12 szélességet összeszoroztam. 15-ször 12 [az] 3,0 [ennyi a] terület.

A 15 hosszúság a 12 szélességen mennyivel nyúlik túl? 3[-ma] haladja meg. 3-at a 3,0-hoz, a területhez adj hozzá: 3,3[-at kapsz]. [6]

Elemzés. Világos, hogy ha a hosszúságot és a szélességet x, y jelöli, akkor az

$$xy + x - y = 3,3$$

$$x + y = 27$$

egyenletrendszert kellene megoldani. A számolás második lépéséből látszik, hogy az y szélesség helyett egy új $y' = y + 2$ szélességet vezet be, így az

$$xy' = 3,30$$

$$x + y' = 29$$

egyenletrendszert oldja meg. Vegyük észre, hogy ez egy egyszerűbb, standartizálható forma, hiszen a két határozatlan összege és szorzata adott. A megoldás ismertetésekor a jobb áttekinthetőség kedvéért egymás mellett szerepeltetjük az eredeti szöveges megoldás lépéseit és a mai szimbolikus számolást.

$$27 + 3,3 = 3,30$$

$$2 + 27 = 29$$

$$29 : 2 = 14;30$$

$$14;30 \times 14;30 = 3,30;15$$

$$3,30;15 - 3,30 = 0;15$$

$$\sqrt{0;15} = 0;30$$

$$14;30 + 0;30 = 15$$

$$14;30 - 0;30 = 14$$

$$14 - 2 = 12$$

$$xy' = 3,30$$

$$x + y' = 29$$

$$\frac{x + y'}{2} = 14;30$$

$$\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 = 3,30;15$$

$$\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy' = 0;15$$

$$\sqrt{\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy'} = \frac{x - y'}{2} = 0;30$$

$$\frac{x + y'}{2} + \frac{x - y'}{2} = x = 15$$

$$\frac{x + y'}{2} - \frac{x - y'}{2} = y' = 14$$

$$y' - 2 = y = 12$$

Összegezve. Egy

$$xy = P$$

$$x + y = a$$

alakú egyenletrendszert úgy oldottak meg, hogy bevezettek egy új w határozatlant (a két eredeti határozatlan számtani közepétől való eltérést), amelynek révén

egyhatározatlanossá vált a probléma:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}a + w \\y &= \frac{1}{2}a - w, \quad w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - P}.\end{aligned}$$

A megoldásból sejthető, hogy egyrészt ismerték az

$$\begin{aligned}(1) \quad & (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\(2) \quad & (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

azonosságokat,⁵ amelyre bizonyítékul szolgálnak a további feladatok is, másrészt tudniuk kellett négyzetgyököket vonni. A feladatok megoldásánál ugyan táblázatokat használtak (erre utalnak a megoldások leírásai), de ezeket is egyszer meg kellett szerkeszteni, el kellett végezni a gyökvonásokat. Ez utóbbit később megmutatjuk.

Egy másik agyagtáblán (**VAT** 6598) szereplő probléma hasonló alakú egyenletrendszerre vezet, csak itt a határozatlanok szorzata mellett nem az összegük, hanem a különbségük adott. A módszer lényegében megegyezett az előbbivel, ezért csak mai szimbolikával vázoljuk azt.

2. Feladat. *Megoldandó az*

$$\begin{aligned}xy &= P \\x - y &= d\end{aligned}$$

egyenletrendszer.

Az eredeti számolásból az vehető ki, hogy most a határozatlanok számtani közepére vezettek be új határozatlant. Ha ezt K jelöli, akkor az eredmény (mai jelölésekkel) a következő formulák alapján adódik, amelyeket úgy kapunk meg, hogy először a második egyenlet négyzetéhez hozzáadjuk az elsőt, és végül négyzetgyököket vonunk.

$$K = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + P}$$

Mivel ezen számtani középtől a két határozatlan nyilván $\frac{d}{2}$ -vel tér el

$$x = K + \frac{d}{2}, \quad y = K - \frac{d}{2}.$$

⁵ Ezen azonosságokat először Euklidész bizonyította be geometriai formában, az *Elemek* II.4. és II.13. Tételként.

Az előbbi eljárások, mint az „összeg és különbség módszere” szerepelnek a Kr.u. 250 körül élt Diophantos Arimetikájában.⁶

A BM 13901 jelű agyagtáblán olyan problémák szerepelnek, amelyek másodfokú egyenletek megoldását kívánják. Tekintsük először a 8. és a 9. problémát. Mindkettőben négyzetek területei összege, valamint az oldalak összege, ill. a különbsége szerepel. Ezeket az előző két feladat módszerével oldották meg. Nevezetesen,

3. Feladat (8. probléma). *Megoldandó az*

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= S = 21, 40 \\ x + y &= a = 50\end{aligned}$$

egyenletrendszer.

A számolás az mutatja, hogy a második egyenlet négyzetéből kivonták az első egyenletet, és ezzel ugyanolyan egyenletrendszert kaptak, mint az 1. Feladatban szereplő, s az ott megismert módon az

$$\begin{aligned}w &= \sqrt{\frac{S}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \\ x &= \frac{a}{2} + w, \\ y &= \frac{a}{2} - w,\end{aligned}$$

formulák által leírt úton haladtak.

4. Feladat (9. probléma). A második egyenlet most $x - y = d = 10$ alakú, s a megoldás a

$$\begin{aligned}w &= \sqrt{\frac{S}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2}, \\ x &= w + \frac{d}{2}, \\ y &= w - \frac{d}{2},\end{aligned}$$

formulákkal írható le, ugyanúgy, mint a 2. Feladatban.

Mindkét egyenletrendszer korabeli stílusú megoldásának elvégzése jó gyakorló feladat az olvasónak.

Vannak azonban ezen agyagtáblán olyan problémák is, amelyek megoldása meglepi még a tudománytörténetben bizonyos jártassággal rendelkező olvasót is.

⁶ Ezen 13 „könyvet” tartalmazó műnek hosszú ideig csak 6 könyve volt ismert, amelyek először a XVI. század közepén jelentek meg nyomtatásban latinul Tartaglia fordításában. Azóta számos kiadást ért meg, s egyik XVII. századnak a margójára írta Fermat legendás megjegyzését. Az 1970-es években 4 további könyvet talált meg egy XIII. századi arab kéziratban.

5. Feladat (2. probléma). *Kivontam a négyzetet a területéből és az 14,30.*

Megjegyzés. Itt (és másutt) a „négyzet” a négyzet oldalát jelenti.

Az agyagtáblán e feladat megoldása a következő.

Vedd az 1-et [az együtthatót] és osszad két részre. A 0;30-at szorozd önmagával, az 0;15. Ezt add hozzá a 14,30-hoz. A 14,30;15 [négyzet]gyöke 29;30. Ezt add hozzá a 0;30-hoz, amit önmagával szoroztál. Ez 30, ami a négyzet [oldala]. [7]

Elemzés. A probléma az $x^2 - x = 14,30$ egyenlet, azaz egy $x^2 - ax = b$ alakú egyenlet megoldását kívánja. A közölt megoldásból világos, hogy az egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakították, ami egyrészt a (2) azonosság ismeretét, másrészt a ma „mérlegelvnek” nevezett módszer ismeretét tételezi föl. Az utóbbiról az 1930-as évekig úgy vélték, hogy a Kr.u. VIII. században, mintegy 2500 évvel később élt al-Khwarizmi alkalmazta először egyenletek megoldásában.⁷ Mindezek alapján az $x^2 - ax = b$ alakú egyenlet megoldását az

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b}$$

formula alapján számolták ki. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy számukra általános „formulák” nem léteztek, kizárólag konkrét feladatokat oldottak meg, mindig adott mennyiségekkel (számokkal) dolgoztak. Jól példázza ezt a következő feladat is, amelynek megoldását csak mai terminológiával, de hatvanados számokkal írjuk le.

6. Feladat (7. probléma). *A négyzet hétszereséhez hozzáadtam a terület tizenegyszeresét és ez 6;15.*

Világos, hogy a

$$11x^2 + 7x = 6;15$$

másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Ismét négyzetté alakították az egyenlet bal oldalát, de ehhez előbb 11-gyel megszorozták az egyenletet, azaz a

$$2,1x^2 + 1,17x = 1,8;45$$

egyenlettel dolgoztak. Ha most ez utóbbi egyenletet

$$ax^2 + bx = c$$

⁷ Al-Khwarizmi e módszert *al-jabrnak* nevezte, és szerepel híres könyvének címében is.

alakban írjuk, akkor számolásuk az

$$x = \frac{1}{a} \left(\sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \right)$$

formulával írható le, azaz mindét eset azt tanúsítja, hogy tulajdonképpen ismerték a „másodfokú egyenletek gyökképletét”, hiszen aszerint számoltak.

Összeállításunkat olyan feladatokkal folytatjuk, amelyek további tudománytörténeti meglepetéssel is szolgálhatnak.

7. Feladat (14. probléma). *Két négyzetem területét összeadtam, 25,25. A második négyzet kétharmada az első négyzetnek és még 5.*

Világos, hogy egyrészt a „négyzet” itt a négyzet oldalának hosszát jelenti, továbbá ha x, y jelöli ezeket, akkor az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25,25 \\ y &= 0;40x + 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani.

Az olvasó számára azonnal kínálkozik az a megoldás, hogy a második egyenletből y -t az elsőbe helyettesítjük, így egy egyhatározatlan

$$a_1x^2 + a_2x = a_3$$

alakú másodfokú egyenletet kapunk. E kézenfekvő ötletnek ellentmond az az 1930-as évekik általánosan elfogadott vélemény, hogy e módszer — a „behelyettesítés” — bevezetése szintén a Kr.u. VIII. században élt al-Khwarizmi nevéhez fűződik. Ha megvizsgáljuk a megoldás szövegét, akkor nem kétséges, hogy már e korban is ismerniük kellett az al-Khwarizminek tulajdonított eljárást. Véleményünk szerint ezt az is alátámasztja, hogy amikor az 1. Feladatban szereplő, Diophantos által összeg módszernek nevezett eljárást a következő feladatnál különbségre is átvitték (ami szintén Diophantos egy módszere) lényegében behelyettesítést végeztek.

Az agyagtáblán ugyanis a feladatot a következő számolással oldották meg. (Az eredeti számolást kiegészítettük.)

$$\begin{aligned} 1 + 0;40 \cdot 0;40 &= 1;26,40, \\ 5 \cdot 0;40 &= 3;20, \\ 25,25 - 5 \cdot 5 &= 25,0 \end{aligned}$$

Ez pedig nem más, mint azon egyenlet együtthatói kiszámítása, amit az említett behelyettesítéssel kapunk, azaz

$$x^2 + (0; 40x + 5)^2 = 25, 25,$$

amit rendezve

$$(1 + 0; 40^2)x^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0; 40x = 25, 25 - 5^2 = 25, 0.$$

Ezen egyenlet megoldását az alábbi számolásokkal végezték el:

$$1; 26, 40 \cdot 25, 0 = 36, 6; 40,$$

$$3; 20 \cdot 3; 20 = 11; 6, 40,$$

$$36, 6; 40 - 11; 6, 40 = 36, 17; 46, 40.$$

Ezután megadták a 36, 17; 46, 40 négyzetgyökét, ami 46; 40, majd így folytatták.

A gyöknek és annak, amit önmagával szoroztál a különbsége 43; 40. Ha ezt megszorozod 1; 26, 40 reciprokával, megkapod az egyik négyzetet [a négyzet oldalát], ami 30. A másik négyzet [oldala] pedig 25.

Az olvasó számára hasznos lehet a reciprokok meghatározása hatvanados alakban, mi nem részletezzük. Az azonban világos, hogy korrekt megoldást kaptak.

Ha végignézzük eljárásukat akkor nyilvánvaló, hogy a behelyettesítés után kapott

$$ax^2 + 2bx = c$$

alakú egyenletet előbb a -val megszorozták (ismét egy olyan lépés, aminek első alkalmazását al-Khwarizminek szokás tulajdonítani), majd az egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakították,

$$(ax + b)^2 = ac + b^2,$$

ezután gyököt vontak, s így kapták az

$$x = \frac{\sqrt{ac + b^2} - b}{a}$$

megoldást. Vegyük észre, hogy ma is ilyen eljárással oldjuk meg a másodfokú egyenleteket.

Feladatsorunk zárása előtt tekintsünk egy háromhatározatlanos egyenletrendszerre vezető problémát ugyanezen agyagtábláról.

8. Feladat (18. probléma). *Három négyzetem összege 23, 20. Az első és a második négyzet különbsége 10, a második és a harmadik négyzet különbsége szintén 10.*

Megoldandó tehát az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 23, 20$$

$$x - y = 10$$

$$y - z = 10$$

egyenletrendszer. A táblán található számolásból világos, hogy úgy dolgoztak, mintha előbb a második és a harmadik egyenletből kifejezték volna a z segítségével az x, y -t, majd behelyettesítették az elsőbe. Ezzel z -ben másodfokú egyenlethez jutottak, aminek megoldása már rutin feladat volt.

Érdekes megemlíteni, hogy e feladat és megoldási eljárása erősen hasonlít a Kr.e. I. évezred kínai matematikáját összegző „Az aritmetika művészete kilenc könyvben” című összeállítás IX. könyvében a 12. probléma ugyanis a következőképp szól [8]:

Van egy ajtó, de nem ismerjük sem a magasságát, sem a szélességét. Csak azt tudjuk, hogy a magasság 2 lábbal, a szélesség pedig 4 lábbal rövidebb, mint az ugyancsak ismeretlen hosszúságú bambuszrudunk. Ez azonban ugyanolyan hosszú, mint az ajtó átlója.

Az érdekesség kedvéért édesemes röviden áttekinteni (mai jelölésekkel) a kínai feladat megoldását. Ha d jelöli a bambuszrúd kosztát, az átlót, akkor az ajtó szélessége és magassága $d - 4$ és $d - 2$. Ezeket használva, és Pithagorasz tételének ismeretében⁸ a következő egyenletet kell megoldanunk.

$$z^2 = (z - 2)^2 + (z - 4)^2.$$

Vélhetően a következőképp számoltak.

$$z^2 = 2z^2 - 2(a + b)z + a^2 + b^2 \quad / + 2ab$$

$$z^2 + 2ab = 2z^2 - 2(a + b)z + (a + b)^2$$

$$2ab = (z - (a + b))^2$$

$$z - (a + b) = \sqrt{2ab}$$

$$z = a + b + \sqrt{2ab} = 10 \text{ láb}$$

$$z - a = b + \sqrt{2ab} = 6 \text{ láb}$$

$$z - b = a + \sqrt{2ab} = 8 \text{ láb}$$

⁸ E tétel empirikus formában az összes ókori folyammenti kultúrában ismert volt már a Kr.e. II. évezredben.

Az imént ismertetett 8 feladat alapján megállapíthatjuk, hogy az Óbabiloni Birodalom írnokai minden olyan másodfokú egyenletet meg tudtak oldani, amelyeknek volt pozitív gyöke. (Érdekes, hogy abban az esetben, amikor két pozitív gyök is volt, mindig csak a nagyobbikat adták meg.) Mivel az ilyen jellegű problémáknál negatív számok nem fordulhattak elő (bár néhány gazdasági számításnál találkozhatunk velük, mit hiánnyal), számukra három típusú másodfokú egyenlet létezett, nevezetesen

$$\begin{aligned}x^2 + px &= q \\x^2 &= px + q \\x^2 + q &= px\end{aligned}$$

alakúak. Ha ismét áttekintjük az ismertett feladatokat, láthatjuk, hogy mindhárom típus előfordult.

Feladatsorunkat egy igazi „gyöngyszemmel” zárjuk, amely az **YBC 4697** jelű agyagtáblán található.

9. Feladat. A szintén szöveges probléma a

$$\begin{aligned}0; 20(x + y) + 0; 1(x - y)^2 &= 15 \\xy &= 10, 0\end{aligned}$$

egyenletrendszerre vezet.

Sajnos ezen — a Yale Egyetem gyűjteményében őrzött — agyagtábla csak egy töredék, a feladat megoldása már hiányzik róla. Az előbbieken ismertetett megoldási technikák közül azonban több is kínálkozik. Megtehetnénk például azt, hogy a második egyenletből kifejezzük az egyik határozatlan, majd behelyettesítjük azt az elsőbe. Ekkor azonban harmadfokú, mégpedig ún. teljes harmadfokú egyenletet kellene megoldanunk. Ez azonban eddigi ismereteink szerint már meghaladja a korabeli ismereteket. Találtak ugyan olyan táblákat, amelyeken harmadfokú egyenleteket oldottak meg (ilyen egyenletekre vezető problémákat taglaltak), de azok meglehetősen speciális alakúak, például

$$x^3 = A, \quad \text{vagy} \quad x^3 + x = B$$

alakúak voltak, s az elvégzendő számolásokra speciális táblázatok szolgáltak. A teljes harmadfokú egyenletek bizonyos típusainak megoldására először a közel három évezreddel későbbi iszlám matematikusok adtak meg geometriai módszereket. Ezek közül különösen érdekesek Omar Khajjam — a nagy perzsa költő és csillagász — eljárásai. E lehetőséget így el kell vetnünk.

Egy másik lehetőség az, hogy a második egyenlet $4 \cdot 0; 1$ -szeresét hozzáadva az első egyenlethez $(x + y)$ -ban másodfokú egyenletet kapunk, ami kezelhető lehetne

az ismert módszerekkel. Ez az út elképzelhető, de véleményem szerint kevésbé valószínű, mint a következő módszer.

Egy további lehetőség — erre először Neugebauer mutatott rá — eddigieknél jobban illeszkedik a mezopotámiaiak korabeli gondolkodásmódjához. Nevezetesen, vezessünk be két új határozatlan (korábban csak egy újat vezettek be), az eredeti határozatlanok számtani közepére, valamint az attól való eltérésre. Vegyük észre, hogy a feladatban ismét összeg és különbség szerepel, de az eddigiektől eltérően most mindkettő egyszerre. Ha tehát az

$$x = u + v$$

$$y = u - v$$

helyettesítéseket alkalmazzuk, akkor az

$$0; 2u + 0; 4v^2 = 15$$

$$u^2 - v^2 = 10, 0$$

egyenletrendszert kapjuk, ami már könnyen megoldható, csak a második egyenletből v^2 -et az elsőbe kell helyettesítenünk, vagy a második egyenlet $0; 4$ -szeresét hozzá kell adnunk az elsőhöz.

4. Négyzetgyökvonás.

A Yale Egyetem gyűjteményének 7289-es agyagtábláján szerepel a $\sqrt{2}$ kiszámítása 3 hatvanados tört helyiértékre:

$$1; 24, 51, 10.$$

E szám decimálisan közelítőleg $1,41421\overline{296}$. A közelítés igen jó, hiszen csak kb. $6 \cdot 10^{-7}$ -nel tér el a helyes értéktől. Ezt a pontosságot a reneszánsz kor vége felé tudták újra elérni az európai, valamint az iszlám matematikusok.

Az Óbabiloni Birodalom idején — az agyagtáblák tanúsága szerint — a következő eljárást alkalmazták (mai jelölésekkel írjuk le).

Határozzuk meg az a (pozitív racionális) szám négyzetgyökét, a $\sqrt{a}$ számot.

1. *lépés:* Válasszunk egy a_1 első közelítést, a második közelítő értékünk pedig a $b_1 = \frac{a}{a_1}$ legyen. Világos, hogy $\sqrt{a}$ e két érték közé esik.
2. *lépés:* Az eddigieknél jobb közelítést ad az előbbi két szám számtani közepe,

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad \text{s legyen } b_2 = \frac{a}{a_2}.$$

E két érték ismét közrefogja $\sqrt{a}$ -t és $|a_1 - b_1| > |a_2 - b_2|$.

Az eljárást folytatva olyan

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

sorozatokot kapunk, hogy egyrészt minden i -re az a_i, b_i számok közrefogják $\sqrt{a}$ -t, másrészt

$$|a_1 - b_1| > |a_2 - b_2| > |a_3 - b_3| > \dots$$

Elemi függvénytani eszközökkel igen egyszerűen belátható, hogy az eljárás valóban a négyzetgyökhöz konvergál, mégpedig igen gyorsan.

Az imént leírt algoritmust a későbbi korok számos tudós tulajdonították. Olvashatunk róla úgy, mint a Kr.e. 426-365 között élt tarrentumi Archytas (az „utolsó nagy pitagoreus”), a Kr.u. 100 körül élt alexandriai Heron eljárása, de úgy is, mint Newton algoritmusa.

Vegyük észre, hogy az említett Yale 7289-es táblán található érték egyszerűen és gyorsan megkapható ezen eljárással. Tekintsük kezdő értéknek az $a_1 = 1; 30$ -at. Ekkor $b_1 = 1; 20$, amiből $a_2 = 0; 30(1; 30 + 1; 20) = 0; 30 \cdot 2; 50 = 1; 25$, és $b_2 = \frac{2}{1; 25} = 1; 24, 42, 21$. Az eljárást folytatva

$$a_3 = 0; 30(1; 25 + 1; 24, 42, 21) = 0; 30 \cdot 2; 49, 42, 21 = 1; 24, 51, 10, 30.$$

Ebből az utolsó jegyet elhagyva, vagy a 21 felét egyszerűen 10-nek véve, adódik a tábla 1; 24, 51, 10-es értéke.

E ponton javasoljuk az olvasónak a következő kísérlet elvégzését egy egyszerű, 8 jegyre számoló zsebkalkulátorral. Az imént leírt eljárással számolja ki $\sqrt{2}$ értékét, kezdő értéknek az $a_1 = 1$ -et (ez nem igazán jó közelítés még) választva. Azt fogja tapasztalni, hogy az a_5 értéke megegyezik azzal a számmal amit úgy kap, hogy közvetlenül a négyzetgyökvonó funkciót használja. Megjegyezzük, hogy ennek a pontossága is kb. $6 \cdot 10^{-7}$. Ebből — az eljárás gyorsaságán kívül — arra is következtethetünk, hogy kalkulátorunk szintén ezen ősi algoritmust követi.

Számos feladatban alkalmazták a

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

közelítést. Ez első látásra a binomiális sorral való — két tagot figyelembe vevő — közelítés, de ők ezt nyilván nem tudták alkalmazni. Egyszerűen adódik azonban az előbbi eljárásból úgy, hogy $a_1 = a$, és az a_2 -t kell meghatározni mindössze. Ezen egyszerű közelítést még ma is használjuk.

Irodalom

- [1] Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York–London–Sydney, 1968.
- [2] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York–Oxford, 1990. (paperback edition in 3 volumes)
- [3] O. Neugebauer, *Egzakt tudományok az ókorban*, Gondolat, Budapest, 1984.
- [4] O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte*, Springer, Berlin 1935–37. (3 kötet)
- [5] O. Neugebauer and A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, Yale University Press, New Haven, Conn. 1945.
- [6] B. L. van der Waerden, *Egy tudomány ébredése*, Gondolat, Budapest, 1977.
- [7] B. L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, 1983.
- [8] Chiu Chang Suan Shu, *Neun Bücher Arithmetischer Technik*, (németre fordította és kommentálta Kurt Vogel), Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Braunschweig, 1968.

Klukovits Lajos, SZTE TTK, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
 klukovits@math.u-szeged.hu

