

A területprobléma megoldása a klasszikus konvergencia-fogalom kiterjesztésével

KALMÁR DÁNIEL

A terület szabatos fogalmával a legtöbb diák a XII. osztályban ismerkedik meg. Ennek során kiderül, hogy a sokszögek halmazán egy és csak egy olyan függvény van, amely eleget tesz a területtel szemben megfogalmazott intuitív elvárásoknak, azaz pozitív, additív, az egy oldalú négyzeteken 1 értékű és egybevágó sokszögekhez azonos számokat rendel. Ekkor egy értelmes diák megkérdezheti: *„Ki lehet-e terjeszteni ezt a területfüggvényt a sokszögekről a sík minden részhalmazára? A kiterjesztés során persze elvárjuk, hogy a terület általunk megfogalmazott összes tulajdonsága érvényben maradjon.”* Előfordulhat, hogy ez a diák korábban már találkozott „bonyolult” pontthalmazokkal is, például a Cantor-halmazzal (melyet Sierpinski-szönyegnek is hívunk). Ebben az esetben kérdését esetleg a jogos kétkedés hangján fogalmazza meg. A következők során a tanár válaszát szeretnénk könnyebbé tenni: arról fogunk szólni, hogy a középiskolában megismert területfüggvény kiterjeszthető a sík minden részhalmazára. Hangsúlyozzuk, hogy mostantól a „kiterjesztés” fogalmát végig abban az értelemben fogjuk használni, ahogyan azt diákunk is tette: a permanencia-elv figyelembe vételével.

Témánkról a „mértékek nyelvén” szeretnénk beszélni, ezért először a mérték fogalmával ismerkedünk meg. Kezdetben úgynevezett 0-1 mértékekkel foglalkozunk, melyek elvezetnek bennünket egy talán kevésbé ismert – ám annál különlegesebb – matematikai segédeszköz, az ultraszűrő fogalmához, melyet a modern analízis egyik megalapítója, Riesz Frigyes vezetett be 1908-ban. Ezután az ultraszűrők alkalmazásaként megismerkedünk a klasszikus konvergencia-fogalom egy szép általánosításával, az önmagában is érdekes és fontos Banach-limesszel, ahonnan végül a Banach-féle területmértékhez jutunk, amely a területmérés kiterjesztése a sokszögekről a sík valamennyi pontthalmazára. E két eredmény Stefan Banach munkáját dicséri, aki a múlt század első felében tevékenykedett a „Lengyel iskola” legnagyobb hatású matematikusaként.

Állításaink némelyikét feladatként fogalmazzuk meg. Ezek legtöbbször az új fogalmak gyakorlását segítik, a nehezebbeket csillaggal jelöljük. A jegyzetek

néhány, a középiskolai matematika anyagon túlmutató kiegészítést és rövid irodalmi tájékoztatást nyújtanak.

I. Mérés és mérték

A terület mérésének problémája döntő szerepet játszott a matematika megszületésében, amely mintegy 4000 évvel ezelőtt játszódott le az ókori folyam menti kultúrák területén. Az első eredmények még sokszor pontatlanok voltak, amit jól szemléltethetünk Egyiptom példájával, ahol az egyenlő szárú háromszögek területét kezdetben úgy számolták ki, hogy az alap hosszának felét a magasság helyett a szár hosszával szorozták.

A középiskolában elsősorban a sokszögek területére voltunk kíváncsiak és egy területfüggvénnyel szemben – előzetesen – a következő elvárásokat fogalmaztuk meg:

- 1) Egy sokszög területe mindig pozitív szám;
- 2) Ha egy sokszöget felbontunk határukkal egymásra nyúló részsokszögekre egyezésére, akkor ezek területeinek összege egyenlő az eredetivel;
- 3) Az 1 oldalú négyzetek területe 1;
- 4) Egybevágó sokszögek területe egyenlő.

Magyarán: a terület egy függvény a sokszögek családján, amely pozitív (1), additív (2), normált (3) és egybevágóság-invariáns (4).

Emlékezzünk vissza, hogy először a téglalapok területét értelmeztük, az 1 oldalú négyzetek területére (3) való visszavezetéssel. Ennek kulcslépése a következő, az 1), 2) és 4) tulajdonságokból adódó állítás volt: *ha két téglalap egy-egy oldala ugyanolyan hosszú, akkor területeik aránya megegyezik másik két oldaluk hosszának arányával.* Ezután a háromszögek területét értelmeztük, mégpedig – használva 2)-t és 4)-et – a téglalap területére való visszavezetés által. Majd innen kiindulva egy tetszőleges sokszög területét háromszögekre darabolással, ismét 2) alapján tudtuk meghatározni. Végül megtanultuk a következőt.

I.1. Tétel. *A középiskolában nyert terület-függvény eleget tesz az 1) – 4) elvárásoknak és több ilyen függvény nincsen.*

Természetes kérdés, hogy ki lehet-e terjeszteni ezt a területfüggvényt síkbeli halmazok egy bővebb családjára. Kezdetként szeretnénk megadni a terület egy olyan – egyelőre még nagyon általános – definícióját, amely nem kötődik szorosan a sokszögekhez. Ehhez az 1) és 2) tulajdonságokat kissé át kell fogalmaznunk. Általában ugyanis – intuitív módon – számolnunk kell ∞ területű halmazokkal is (gondoljunk csak például a síkra), ugyanakkor elvárjuk, hogy legyenek „kicsi” halmazok is: az üres halmaznak 0 területet szeretnénk tulajdonítani. Továbbá

egy viszonylag „bonyolult” ponthalmaz esetében az additív tulajdonság teljesülését már nem határukkal egymásra nyúló részsokszögekre, hanem páronként idegen részhalmazokra szeretnénk megkövetelni. Mindezek a mérték fogalmának – egy lehetséges – bevezetését motiválják.

Definíció. Legyen T egy függvény, melynek értelmezési tartománya a sík részhalmazainak egy családja, értékkészlete pedig az $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ halmaz. Azt mondjuk, hogy T egy *mérték*, amennyiben teljesülnek a következők:

- 1) Ha T az üres halmazon értelmezve van, akkor $T(\emptyset) = 0$;
- 2) Ha $A, B \subseteq X$ diszjunkt halmazok és T értelmezve van az A , B , $A \cup B$ halmazokon, akkor $T(A \cup B) = T(A) + T(B)$.

Tehát a mérték egy kiterjesztett nemnegatív valós értékű halmazfüggvény, amely az üres halmazhoz biztosan a 0 értéket rendeli (1) és additív (2).

Most már megadhatjuk a terület általános fogalmát.

Definíció. Tekintsük a sík részhalmazainak egy családját. E halmazcsalád egy mértékét *területmértéknek* vagy egyszerűen *területnek* nevezzük, amennyiben eleget tesz a következő két elvárásnak:

- 1) A halmazcsaládhoz tartozó 1 oldalú négyzetek mértéke 1;
- 2) A halmazcsaládhoz tartozó egybevágó ponthalmazok mértékei egyenlők.

Tehát a terület egy normált (1) és egybevágóság-invariáns (2) mérték a sík részhalmazainak valamely családján. Ez a területfogalom intuíciónk precíz megfogalmazása és persze egyelőre még nagyon általános. Ám a matematika mintegy 4000 éves története során a területmérték értelmezési tartománya egyre bővebb lett és ennek eredményeként a terület imént látott fogalma komoly tartalommal telt meg.

Görbe vonallal határolt síkidomok területmérésével már a régi görögök is sokat foglalkoztak. Jól ismert, hogy Arkhimédésznek sikerült meghatározni a parabolaszélet területét, mégpedig a későbbi arab matematikusok által kimerítésnek nevezett módszerrel. Ennek lényegét mai szemlélettel a következő módon fogalmazhatjuk meg. Tegyük fel, hogy a középiskolában megismert területfüggvény kiterjeszthető a sokszögekről egy bővebb halmazcsaládra, amelyben már parabolaszéletünk is benne van. Ez a megfogalmazás egy kissé még pontatlan, de könnyen precízzé tehető: azt tesszük fel, hogy e halmazcsaládon van olyan területmérték, amely a sokszögekhez azok szokásos területét rendeli. Tegyük fel továbbá, hogy halmazcsaládunk minden $\mathcal{S}$ sokszög esetén tartalmazza a $\mathcal{P} \setminus \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}$ halmazokat is, ahol $\mathcal{P}$ a parabolaszélet. Fogjuk most közre parabolaszéletünket kívülről és belülről sokszögek egy-egy végtelen sorozatával. Ekkor területmértékünk nemnegatív

és additív tulajdonsága alapján megállapíthatjuk, hogy a parabolaszület területét bármely kívülrre és belülrre írt sokszög (szokásos) területe közrefogja. Tegyük fel végül, hogy e sokszögek területei pontosan egy értéket fognak közre. Ebből azonnal következik, hogy a parabolaszület területe ez a közrefogott érték. Jól ismert, hogy Arkhimédész módszere már szükségessé tette a „végtelenül kicsi mennyiségek” – lényegében: az integrál – vizsgálatát. A „kimerítés” módszerének „megnyugtató” általánosítására a XIX. század második feléig kellett várni: ekkor született meg a terület Jordan-féle fogalma. Ám a Cantor-halmaz területét még a „kimerítés” módszerének e modern változatával sem lehetett értelmezni: a szóban forgó pont-halmaz területének „helyét” meghatározó „közrefogási területértékek” nemhogy egyetlen számra szűkülnének, hanem ehelyett minden esetben közrefogják az egész $[0, 1]$ intervallumot!

Tekintsük most a sík azon részhalmazait, melyek megkaphatók a sokszögekből megszámlálhatóan sok unió-, metszet- és komplementer-képzés segítségével. E halmazosztály elemeit a sík Borel-halmazainak nevezzük. Ez már eléggé „gazdag” család: tartalmazza a sokszögeket, de benne van a Cantor-halmaz is! A XX. század elején Borel és Lebesgue megmutatta, hogy a Borel-halmazok családján van területmérték.¹ Ez a sokszögekhez azok szokásos területét, a Cantor-halmazhoz pedig a 0 értéket rendeli. Sőt, e különleges területmérték egy erősebb additivitási feltételnek is eleget tesz: Borel-halmazok tetszőleges $\{H_n\}$ végtelen sorozatára teljesül, hogy:

$$T\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} T(H_n).$$

Azt is mondjuk, hogy a Borel-Lebesgue féle területmérték σ -additív. A Borel-halmazok szerkezete azonban még mindig nagyon „szabályos”: a sokszögekével „rokon”. A sík egy tetszőleges ponthalmazának szerkezete az övékéénél jóval „bonyolultabb”.

Mi mégis azt állítjuk, hogy *a középiskolában megismert területfüggvény kiterjeszthető a sík valamennyi ponthalmazára*. Ez az állításunk azonban még pontosításra szorul.

Definíció. Legyen T egy területmérték a sík összes részhalmazának családján. Ekkor azt mondjuk, hogy T egy *Banach-mérték* a síkon.

Következő feladatunk állítása az I.1. Tétel következménye.

I.2. Feladat*. Mutassuk meg, hogy a sík egy tetszőleges Banach-mértéke a sokszögekhez azok szokásos területét rendeli.²

¹ E mérték teljessé tételével a szokásos Lebesgue-mértékhez juthatunk.

² És – egyben – kiterjeszti a Jordan-féle területmértéket is: a Jordan-mérhető halmazok családján a területnek unicitása van.

Ezért a síkbeli Banach-mérték fogalma a középiskolai területfogalom kiterjesztése a sokszögekről a sík valamennyi részhalmazára. Központi kérdésünk, hogy van-e ilyen mérték. Ez a nevezetes területprobléma, melyet a sík egy Banach-mértékének megtalálásával szeretnénk megoldani.

Kezdetként érdemes kiterjeszteni a mérték fogalmát a síkról egy tetszőleges alaphalmazra. Ez igen egyszerű: rögzítsünk egy tetszőleges alaphalmazt és tekintsük e halmaz részhalmazaink egy családját. Vegyünk e halmazcsaládon egy kiterjesztett nemnegatív valós értékű függvényt. Ha ez a függvény az $\emptyset$ halmazhoz a 0 értéket rendeli (feltéve, hogy ott értelmezve van), továbbá additív, akkor mértéknek nevezzük. Megállapodunk abban is, hogy ha egy X alaphalmaz esetén egy μ mérték értelmezési tartományát már megadtuk, akkor ezután a „ μ mérték X -en” kifejezést is használjuk majd, az egyszerűbb fogalmazás kedvéért.

A Banach-mérték a sík összes részhalmazán értelmezve van. Ezért érdemes azokat a mértékeket vizsgálni, melyekre ez szintén teljesül. Legyen tehát X egy tetszőleges halmaz és μ pedig egy mérték az X összes részhalmazának családján. Legyenek most már $A \subseteq B$ X -nek részhalmazai. Mivel most minden halmaznak van mértéke, ezért – használva μ nemnegatív és additív voltát – írható, hogy:

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(B),$$

tehát $\mu(A) \leq \mu(B)$, melyet μ monoton tulajdonságának nevezünk. Ez a tény jól szemléltethető az alaphalmaz láncain, melyek általános alakja a következő:

$$(*) \quad \emptyset = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = X.$$

Az előbbiek szerint ugyanis bármely $(*)$ alakú láncon nyomon követhetjük mértékünk megnövéseit:

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu(H_0) \leq \mu(H_1) \leq \mu(H_2) \leq \dots \leq \mu(H_{n-1}) \leq \mu(H_n) = \mu(X).$$

A következők során még azt is feltesszük, hogy μ csupán két értéket vesz fel: a 0-t és az 1-et. Tudjuk, hogy az üres halmaz mértéke 0. A csupa 0 mérték azonban érdektelen, ezért azt is megköveteljük, hogy az alaphalmaz mértéke legyen 1. Egy ilyen mértéket 0-1 mértéknek nevezünk majd. Emlékeztetünk, hogy egy 0-1 mérték az alaphalmaz összes részhalmazán értelmezve van!

II. 0-1 mértékek és ultraszűrők

Figyeljük meg, hogy a 0-1 mértékek igen különleges módon nőnek meg. Ugyanis egy 0-1 mérték esetén minden $(*)$ alakú lánchoz megadhatunk egy $0 < k \leq n$ értéket úgy, hogy a k -nál kisebb indexű H_i -k mértéke 0, H_k -val kezdve pedig minden halmaz 1 mértékű. A továbbiak során azt vizsgáljuk majd, hogy egy adott 0-1 mérték esetén általában mikor következik be a most megfigyelt „ugrás”.

Kezdetként észrevevesszük, hogy 0-1 mértékeket nagyon könnyen nyerhetünk: ha X tetszőleges halmaz és $x \in X$, válasszuk 1-mértékűnek pontosan azokat a halmazokat, melyek tartalmazzák az x elemet, a többiek mértéke pedig legyen 0. Könnyen meggondolhatjuk, hogy ez valóban egy 0-1 mérték. Egy ilyen mérték esetén az 1 mértékű halmazok családját úgy érdemes elképzelni, mint egy virágot, melynek szirmai az 1-mértékű halmazok, ezek pedig a virág közepén található legkisebb szirmon, a kitüntetett $\{x\}$ -en nyugszanak. Érdemes lesz ezt a „képet” alaposan megjegyezni! Ezek a speciális 0-1 mértékek minden (nemüres) halmazon jelen vannak és igen könnyen áttekinthető szerkezetük miatt a triviális jelzővel fogjuk őket „megbélyegezni”. Figyeljük meg, hogy egy triviális 0-1 mérték esetén egy tetszőleges $(*)$ alakú láncban az „ugrás” pontosan azon a halmazon következik be, amely az x -et tartalmazó tagok között a legkisebb indexű.

Most már szeretnénk találni „gazdagabb” szerkezetű 0-1 mértékeket is, melyeket a nemtriviális jelzővel fogunk kitüntetni. Egyszerűen meggondolható, hogy egy 0-1 mérték pontosan akkor nemtriviális, ha az alaphalmaz minden egy elemű részhalmazához a 0-t rendeli.

Lássunk hozzá kitűzött feladatunk megoldásához: keressünk nemtriviális 0-1 mértékeket! Legyen ezért μ egyelőre egy tetszőleges 0-1 mérték az X halmazon (triviális vagy nemtriviális) és tekintsük az 1-mértékű halmazok családját:

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \mu(A) = 1\}.$$

Emlékezzünk vissza, hogy triviális μ esetén $\mathcal{F}$ elemei egy „virágot” formáznak, a nemtriviális esetben pedig tudjuk, hogy $\mathcal{F}$ nem tartalmaz egy elemű halmazt. Most megvizsgáljuk, hogy általában mit állíthatunk e halmazcsaládról.

A láncokat szemlélve már korábban láttuk, hogy $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ és ha $A \in \mathcal{F}$, valamint $A \subseteq B$ egy $B \subseteq X$ halmazra, akkor $B \in \mathcal{F}$ szintén teljesül.

Legyenek most $A, B \in \mathcal{F}$ tetszőleges halmazok, vagyis $\mu(A) = \mu(B) = 1$. Ekkor $\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) = 1$ miatt az $A \setminus B$ és $A \cap B$ halmazok közül egynek és csak egynek a mértéke 1. Figyeljük meg, hogy a $\mu(A \setminus B) = 1$ feltevésből az következne, hogy $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) = 1 + 1 = 2$, ami ellentmond annak, hogy mértékünk 0-1 mérték. Így szükségképpen $\mu(A \cap B) = 1$, tehát $A \cap B \in \mathcal{F}$. Végül, ha $A \subseteq X$ egy tetszőleges halmaz, akkor $\mu(X) = 1$ szerint – mint az imént

– az adódik, hogy A és $X \setminus A$ közül pontosan az egyik 1-mértékű, vagyis közülük pontosan az egyik tartozik az $\mathcal{F}$ halmazhoz.

Most összefoglaljuk eddigi megállapításainkat.

II.1. Tétel. *Egy tetszőleges 0-1 mérték szerint 1 mértékű halmazok $\mathcal{F}$ családjára érvényesek a következők:*

- 1) $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- 2) Ha $A \in \mathcal{F}$ és $A \subseteq B$ egy $B \subseteq X$ halmazra, akkor $B \in \mathcal{F}$;
- 3) Ha $A, B \in \mathcal{F}$ akkor $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- 4) Ha $A \subseteq X$, akkor A és $X \setminus A$ közül pontosan az egyik tartozik $\mathcal{F}$ -hez.

A következő feladat állítása szerint előbbi gondolatmenetünk megfordítható.

II.2. Feladat. Legyen X tetszőleges halmaz és $\mathcal{F}$ az X halmaz részhalmazainak egy családja. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ rendelkezik az 1) – 4) tulajdonságokkal. Értelmezzük a μ függvényt az X összes részhalmazának családján a következő módon: legyen μ értéke $\mathcal{F}$ elemein 1, máskor 0. Igazoljuk, hogy μ egy 0-1 mérték!

Könnyen látható, hogy a II.1. Tételben szereplő $\mu \mapsto \mathcal{F}$ és a II.2. Feladatban fellépő $\mathcal{F} \mapsto \mu$ hozzárendelések egymás megfordításai. Ezért e két megfeleltetés a 0-1 mértékeket és az 1)- 4) tulajdonsággal rendelkező halmazcsaládokat párba állítja, mégpedig úgy, hogy egy tetszőleges $(\mu, \mathcal{F})$ pár esetén a μ szerint 1 mértékű halmazok és $\mathcal{F}$ elemei ugyanazok. Ezeknek az $\mathcal{F}$ halmazcsaládoknak azonban még nem adtunk nevet. Ezt most megtesszük, még hozzá két lépésben.

Definíció. Legyen X tetszőleges halmaz és $\mathcal{F}$ az X részhalmazainak egy olyan családja, amely rendelkezik az 1) – 3) tulajdonságokkal. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ egy *szűrő*.

Az elnevezés szemléletes, hiszen például 2) így is mondható: ha egy halmaz fennakad szűrőnkön, akkor ez teljesül minden nála bővebb halmazra is.

Definíció. Ha egy $\mathcal{F}$ szűrő a 4) tulajdonsággal is rendelkezik, akkor *ultraszűrőnek* nevezzük.

Így e kitüntetett szűrők esetében az előbb látott szemléletes kép is gazdagabbá válik: úgy érezhetjük, hogy egy ultraszűrőn az alaphalmaz „nagy” részhalmazai akadnak fent, ezek vannak benne. Emlékeztetünk a 0-1 mértékek és az ultraszűrők azonosítására: egy belőlük alkotott $(\mu, \mathcal{F})$ pár esetén az 1 mértékű halmazok és az ultraszűrő elemei ugyanazok.

Tekintsük most a triviális 0-1 mértékeket. Megfigyeltük, hogy ezeknek a „virág-alakú” ultraszűrők felelnek meg, melyeket triviális ultraszűrőknek nevezünk. Ezek tehát kitüntetnek egy $x \in X$ elemet: pontosan azokat a halmazokat tartalmazzák, melyekben x benne van. Végül nevezzük a nemtriviális 0-1 mértékek

megfelelőit nemtriviális ultraszűrőknek! Így egy korábbi megfigyelésünk szerint egy ultraszűrő pontosan akkor nemtriviális, ha nem tartalmaz egy elemű halmazt.

Vannak olyan ultraszűrőkre vonatkozó állítások, melyeket legegyszerűbben úgy lehet belátni, ha átfogalmazzuk őket a megfelelő 0-1 mértékek „nyelvére”, majd használjuk azok tulajdonságait:

II.3. Feladat. Legyen $\mathcal{F}$ egy ultraszűrő az X halmazon és állítsuk elő ezt az alaphalmazt véges sok részhalmazának diszjunkt uniójaként. Igazoljuk, hogy ekkor ezen részhalmazok közül pontosan egy tartozik az ultraszűrőhöz!

Innen pedig adódik a következő egyszerű állítás.

II.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy véges halmaz minden ultraszűrője triviális!

Előző két feladatunk megoldása bizonyára nem okozott gondot. „Jutalmul” – és kikapcsolódásként is – most megfogalmazzuk ezek egy lebilincselő következményét, melyet Kenneth J. Arrow talált.

II.5. Tétel (Arrow-tétel). *Képzeljünk el egy választást, ahol van véges sok szavazó és legalább három, de szintén véges sok jelölt, akikre szavazni lehet. A választás úgy történik, hogy minden szavazó elkészít egy listát, amelyen a jelölteket rangsorolja tetszése szerint. A szavazólapokat egy gép értékeli, melynek kimenete a választás végeredménye: a jelöltek egy listája. A szavazógép működéséről a következőket tudjuk:*

- 1) *Ha minden beérkező lista megegyezik, akkor a végeredmény is ez lesz;*
- 2) *Az, hogy a gép két adott jelöltet milyen sorrendben rangsorol a végső listán, csak attól függ, hogy ezek a jelöltek az egyes listákon milyen sorrendben szerepelnek, tehát abszolút helyezésük nem számít.*

A választás annyira izgalmas, hogy tetszőlegesen sokszor megismétlik. Az állítás az, hogy a szavazók között van egy diktátor, akinek a listája mindig győz: a végeredménnyel minden alkalommal megegyezik, teljesen függetlenül attól, hogy a többiek hogyan szavaznak.

E híres tétel „üzenete” valójában a következő. Adott egy, a demokratikus döntési folyamatokra vonatkozó minimális feltételrendszer: van szavazógép (azaz a szavazólapok kitöltése a végeredményt egyértelműen meghatározza), fennáll 1) és 2), s végül nincs diktátor. Állítjuk, hogy nem létezik olyan csoportos döntési folyamat, melyre az előzőek mindegyike teljesül. Valóban, hiszen az Arrow-tétel szerint az első három feltétel teljesülése maga után vonja, hogy van diktátor. A tétel névadója, Kenneth Arrow a neoklasszikus közgazdaságtan egyik legismertebb képviselője. Az idézett tétellel kapcsolatos vizsgálataiért 1972-ben Nobel-díjat kapott.

Az Arrow-tétel bizonyítása önmagában is érdekes³ és ennek „csattanóját” mi is leírjuk. Tekintsünk egy adott fordulót és osztályozzuk a szavazókat listáik szerint: tartozzanak egy halmazba azok, akik pontosan ugyanazt a listát állították fel. Feltételeink szerint véges sok ilyen halmaz van, s így ha a szavazók halmazán nézünk egy ultraszűrőt, akkor az ezek közül pontosan egyet tartalmaz, a II.3. Feladat állítása szerint. Kiderül, hogy a szavazógép fent ismertetett működésének eredményeként a választók halmazán fellép egy olyan ultraszűrő is, amely az előbbi halmazok közül tetszőleges forduló esetén éppen azt tartalmazza, ahol a halmazt alkotó szavazók közös listája egyben az adott forduló végeredménye. Mivel a szavazók száma véges, így ez az ultraszűrő a II.4. Feladat állítása szerint triviális, tehát „virág-alakú”. Vizsgáljuk meg e virágnak középső, kitüntetett szirmát! Jól tudjuk, hogy ez a halmaz egyetlen szavazóból áll: ő az a szavazó, aki az ultraszűrő minden elemében fellép. Ezért az ő listája mindig győz, vagyis a diktátor megvan!

Az érdekes kitérő után visszatérünk mértékeinkhez. A II.4. Feladat állítását úgy is megfogalmazhatjuk, hogy véges halmaz minden 0-1 mértéke triviális. Most szeretnénk megmutatni, hogy a végtelen halmazok egészen másként „viselkednek”: egy végtelen halmazon mindig van nemtriviális 0-1 mérték.

Előbb azonban meggondoljuk, hogy – az additivitás szempontjából – többet nem állíthatunk. Belátjuk, hogy egy végtelen halmazon általában nincsen olyan nemtriviális 0-1 mérték, amely σ -additív is. Valóban, érvényes például, hogy a számegyenes σ -additív 0-1 mértékei mind triviálisak. Tekintsünk ugyanis a számegyenesen egy ilyen mértéket. Ekkor szemlélhetjük őt a 0-1 számjegyekből álló végtelen sorozatok halmazán is, hiszen jól tudjuk, hogy ennek ugyanannyi eleme van, mint az $\mathbb{R}$ halmaznak. Legyünk figyelmesek arra, hogy ebben az új alaphalmazon fellép egy „mindentudó” elem: ez az a sorozat, amely egy $j \in \mathbb{N}$ helyen azt mondja meg, hogy az itt 1, illetve 0 értékű sorozatok két halmaza közül melyik az 1-mértékű. Meggondolható, hogy ekkor a „mindentudó” sorozatunkból álló egy elemű halmaz mértéke 1. Így mértékünk valóban triviális, a hozzá tartozó ultraszűrő „virág-formájú”, melynek középső „szirmát” éppen a „mindentudó” sorozat alkotja.

Most már nem csigázzuk tovább az érdeklődést: belátjuk, hogy minden végtelen halmazon létezik nemtriviális 0-1 mérték. Legkönnyebben úgy juthatunk eredményre, ha az ultraszűrőket „nyelvén” szólunk. Fogalmazzuk át ezért állításunkat, a korábban látott módon!

II.6. Tétel. Minden végtelen halmazon van nemtriviális ultraszűrő.

A bizonyítás több lépésből áll, melyeket feladatokként fogalmazzunk meg.

³ Péter Komjáth – Vilmos Totik: Ultrafilters. in: The American Mathematical Monthly. 2008/I. 33-44.

Szükségünk lesz egy egyszerű fogalomra: egy végtelen halmaz valamely részhalmazát *kovégesnek* nevezzük, ha komplementere véges. Velük kapcsolatos kiinduló feladatunk.

II.7. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges végtelen halmaz kovéges részhalmazai egy szűrőt alkotnak!

Az ultraszűrők bevezetésekor úgy láttuk, hogy egy ultraszűrő bizonyos értelemben az alaphalmaz „nagy” részhalmazait tartalmazza. A kovéges halmazok persze szemléletesen a „lehető legnagyobb”, így felmerülhet a kérdés: fellépnek-e ezek bizonyos ultraszűrőkben? E kérdés eldöntése már fő célunk felé vezet.

II.8. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy végtelen halmaz tetszőleges ultraszűrője pontosan akkor nemtriviális, ha tartalmazza a kovéges halmazokat!

Így elég lenne belátni, hogy minden szűrő kiterjeszthető egy ultraszűrővé. Ezt gondolhatjuk meg következő két feladatunk megoldása során. Először az ultraszűrőket jellemezzük a szűrők körében.

II.9. Feladat*. Igazoljuk, hogy egy szűrő akkor és csak akkor ultraszűrő, ha nincsen nála bővebb szűrő.

Akik ismerik a Zorn-lemmát, az iménti állításból kiindulva újabb feladatunkat már könnyen megoldhatják.

II.10. Feladat. Igazoljuk, hogy minden szűrő kiterjeszthető egy ultraszűrővé!

Az előbbi állítások összegzéseként tehát megállapíthatjuk, hogy tetszőleges végtelen halmaz kovéges részhalmazainak szűrőjét kibővíthetjük egy ultraszűrővé, s ezáltal egy nemtriviális ultraszűrőhöz juthatunk. Ezzel igazoltuk a II.6. Tételt. Sőt, a II. 8. Feladat állítása szerint most már a nemtriviális 0-1 mértékek „ugrási” helyeit is pontosabban ismerjük. Nyertük ugyanis, hogy egy ilyen mérték egy tetszőleges, (*) alakú láncon szükségképpen az első nem véges és az első kovéges halmaz között „ugrik”.

Most pedig eddigi fő eredményünk, a II.6. Tétel alkalmazásaként megismerkedünk a középiskolában tanult konvergencia-fogalom egy szép általánosításával.

III. Banach-limesz

Ebben a fejezetben sorozaton mindig valós számokból álló sorozatot fogunk érteni. Emlékeztetünk, hogy ezek a természetes számok halmazán értelmezett valós értékű függvények. Jelölje most $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ a korlátos sorozatok halmazát. Jól ismert, hogy minden konvergens sorozat korlátos. Ez azonban fordítva nem igaz. Legyen ugyanis $\{a_n\}$ az a sorozat, melynek páros indexű tagjai 0-k, a többi tagja pedig 1. Magyarán $\{a_n\} = (0, 1, 0, 1, \dots)$. Ez a sorozat korlátos, de nem konvergens.

Az előbbieket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a konvergens sorozatok $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ -nek egy valódi részhalmazát alkotják. Most szeretnénk minden korlátos sorozatnak egy $\lim^*$ határértéket tulajdonítani, a klasszikus konvergencia-fogalom valamilyen kiterjesztésével. Érdekességgént gondoljuk meg: milyen értéket rendeljen egy ilyen $\lim^*$ függvény az $\{a_n\} = (0, 1, 0, 1, \dots)$ sorozathoz? Bizonyára egyetértünk Leibniz német matematikussal, aki szerint „úgy lenne méltányos”, ha ez az érték az $1/2$ lenne.

A konvergencia általánosítása során persze arra fogunk törekedni, hogy a szokásos határértékre vonatkozó, középiskolában is jól ismert tulajdonságokat tovább „örököstük” a $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ sorozatainak értelmezett $\lim^*$ függvényre. Egy ilyen $\lim^*$ függvényt Banach-limesznek fogunk hívni.

Definíció. Egy $\lim^* : \mathcal{B}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *Banach-limesznek* nevezzük, amennyiben következő elvárásainknak eleget tesz:

- 1) Ha egy $\{x_n\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim^* x_n$;
- 2) Ha $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$, akkor $\lim^*(x_n + y_n) = \lim^* x_n + \lim^* y_n$;
- 3) Ha $\{x_n\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ és α egy valós szám, akkor $\lim^* \alpha x_n = \alpha \lim^* x_n$;
- 4) Amennyiben $\{x_n\}$ egy nemnegatív tagokból álló korlátos sorozat, akkor $\lim^* x_n \geq 0$;
- 5) Ha $\{x_n\} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ és $\{y_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ az előbbi sorozat eltoltja, akkor $\lim^* x_n = \lim^* y_n$.

Így egy Banach-limesz kiterjeszti a szokásos határértéket (1), lineáris (2; 3), nemnegatív sorozatokhoz nemnegatív számokat rendel (4) és eltolás-invariáns (5).

Tekintsünk most egy $\lim^*$ Banach-limeszt. Legyen $\{a_n\}$ ismét Leibniz sorozata, $\{b_n\} = (1, 0, 1, 0, \dots)$ pedig ennek eltoltja. Ekkor:

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{(1)}{=} \lim^*(1, 1, 1, 1, \dots) = \lim^*(a_n + b_n) \stackrel{(2)}{=} \lim^* a_n + \lim^* b_n \\ &\stackrel{(5)}{=} \lim^* a_n + \lim^* a_n = 2 \lim^* a_n. \end{aligned}$$

Ezért $\lim^* a_n = 1/2$, vagyis Leibniz vágya teljesül!⁴ Már csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy létezik-e egyáltalán ilyen $\lim^*$ függvény. Most megmutatjuk, hogy van

⁴ Jól ismert, hogy egy konvergens sorozatnak és tetszőleges részsorozatának határértéke ugyanaz. Az előbbieket szerint azonban ezt a tulajdonságot a Banach-limeszre már nem tudjuk átörököltetni.

Banach-limesz.

Kezdetként egy olyan $\mathcal{B}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt szeretnénk találni, amely csupán az 1) - 4) tulajdonságokat tudja, azaz kiterjeszti a hagyományos határértéket, lineáris és nemnegatív sorozatokhoz nemnegatív számokat rendel.⁵ Idézzük fel ezért a konvergencia definícióját! Egy $\{x_n\}$ sorozatot konvergensnek nevezünk és azt mondjuk, hogy határértéke az α szám, amennyiben bármely ε pozitív szám esetén $x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ teljesül majdnem minden n -re, ahol a „majdnem minden n -re” kifejezés annyit jelent, hogy „véges sok n kivételével”. Emlékezzünk vissza, hogy a véges komplementerű halmazokat kovéges halmazoknak neveztük. Ugyanakkor most egy tetszőleges korlátos sorozathoz intuitív módon egy olyan számot szeretnénk hozzárendelni, melynek bármely kicsiny környezetében benne van a sorozat „nagyon sok” tagja. Ezért úgy érezzük, hogy elég lenne kiterjeszteni a „nagy halmaz” fogalmát $\mathbb{N}$ kovéges részhalmazairól egy bővebb halmazosztályra. Vegyük észre, hogy egy ilyen kiterjesztés már a kezünkben van! Tekintsünk ugyanis egy nemtriviális ultraszűrőt az $\mathbb{N}$ halmazon, melyet jelöljön $\mathcal{F}$. Ennek létezését a II.6. Tétel biztosítja. Emlékezzünk vissza az $\mathcal{F}$ -beli halmazok szemléletes képére: úgy éreztük, hogy ezek $\mathbb{N}$ „nagy” részhalmazai, melyek között a II.8. Feladat állítása szerint ott vannak a kovéges halmazok is. Vezessük be most már a következő fogalmat.

Definíció. Legyen $\mathcal{F}$ egy nemtriviális ultraszűrő a természetes számok halmazán. Tekintsünk továbbá egy állítást $\mathbb{N}$ -en. Azt mondjuk, hogy ez az állítás *majdnem minden $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz* (az $\mathcal{F}$ szerint), ha az állítást igazgató elemek halmaza az $\mathcal{F}$ -hez tartozik.

Most pedig megmutatjuk, hogy a „majdnem minden” szokásos fogalmának előbbi általánosítása kitűzött célunknak valóban megfelel. Rögzítsünk ezért egy $\mathcal{F}$ nemtriviális ultraszűrőt $\mathbb{N}$ -en, a II.6. Tétel alapján. Nézzünk egy tetszőleges $\{x_n\}$ korlátos sorozatot. Azt fogjuk mondani, hogy az α valós szám ezen sorozatnak $\mathcal{F}$ -limesze, amennyiben az α tetszőlegesen kicsiny környezete tartalmazza a sorozat majdnem minden elemét (az $\mathcal{F}$ szerint). Így az eddig mondottak szerint egy konvergens sorozat határértéke annak $\mathcal{F}$ -limesze is.

Vegyük észre azt is, hogy egy korlátos sorozatnak legfeljebb egy $\mathcal{F}$ -limesze lehet, melynek belátása ugyanúgy történik, mint a szokásos határérték egyértelműségének bizonyítása: azt kell kihasználni, hogy a számegyenes pontjai kellően kicsiny környezetekkel elválaszthatók egymástól. Most meggondoljuk, hogy minden korlátos sorozatnak létezik $\mathcal{F}$ -limesze. Egy korlátos sorozat $\mathcal{F}$ -limeszét pontosan ugyan-

⁵ Megjegyezzük, hogy egy ilyen függvény létezése a Hahn-Banach tételből azonnal következik. Mi azonban a nemtriviális ultraszűrők létezését állító II.6. Tételt használjuk majd, ami egy elemibb és szemléletesebb tárgyalást tesz lehetővé.

úgy lehet megtalálni, mint valamely torlódási pontját: az „oroszlánfogás” módszerét kell alkalmazni! Emlékeztetünk, hogy a szóban forgó Bolzano-Weierstrass tétel bizonyítása során minden egyes „oroszlánketrec” felállításakor a következőt mondtuk: „ha a tekintett intervallumon ott van a sorozat végtelen sok tagja, akkor ez az állítás az intervallum legalább egyik felére is biztosan teljesül!”, majd ezt a részintervallumot választottuk újabb oroszlánketrecnek. Most ehelyett ezt kell mondanunk: „ha a tekintett intervallumon ott van a sorozat majdnem minden tagja (az $\mathcal{F}$ szerint), akkor ez az állítás az intervallum pontosan egyik felére szintén teljesül!”, melyet a II.3. Feladat állításával indokolhatunk. Az eljárás végén ott álldogál ketrecünkben sorozatunk $\mathcal{F}$ -limesze, a „befogott oroszlán”. Adódott, hogy minden korlátos sorozatnak létezik egy egyértelműen meghatározott $\mathcal{F}$ -limesze, ez konvergens sorozatok esetén azok határértéke, általában pedig a sorozat egy torlódási pontja.

III.1 Feladat. Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{F}$ -limesz függvény lineáris és nemnegatív sorozatokhoz nemnegatív számokat rendel.

Tehát az $\mathcal{F}$ -limesz függvény teljesíti az 1) - 4) feltételeket.

Figyeljük meg, hogy $\mathcal{F}$ -limeszünk nem eltolás-invariáns, azaz nem Banach-limesz. Valóban, hiszen például Leibniz sorozatának, $\{a_n\}$ -nek két torlódási pontja van: a 0 és az 1. Ezért e sorozat $\mathcal{F}$ -limesze is e két érték valamelyike, vagyis biztosan nem az $1/2$. Érdekes azonban, hogy $\mathcal{F}$ -limeszünkéből kiindulva a Banach-limesz létezésére már könnyen következtethetünk. Jelölje ugyanis az $\mathcal{F}$ -limesz függvényt $\lim_0^*$. Most bevezetünk egy $L_0 : \mathcal{B}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ függvényt, melynek feladata az 5) tulajdonság $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ sorozatainak „azonosítása” lesz. Legyen:

$$L_0(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0, \frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3}, \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{4}, \dots).$$

És legyen végül $\lim^* x_n = \lim_0^*(L_0(\{x_n\}))$. Állítjuk, hogy $\lim^*$ egy Banach-limesz.

Vegyük először egy $\{x_n\}$ konvergens sorozatot. Jelölje α a határértékét és $\{l_n\}$ pedig legyen a sorozat L_0 melletti képe. Ha ε egy kicsi pozitív szám, akkor van olyan ν küszöbszám, hogy a nála nagyobb n indexekre $|x_n - \alpha| < \varepsilon/2$. Egy ilyen n -re érvényes, hogy:

$$\begin{aligned} |l_n - \alpha| &= \left| \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n+1} - \alpha \right| = \frac{|\sum_{i=0}^n (x_i - \alpha)|}{n+1} \\ &\quad \begin{array}{l} \text{Legyen a számláló a } c(\varepsilon) \\ \text{nemnegatív konstans} \end{array} \quad \begin{array}{l} (n+1)\varepsilon/2 \text{ a számlálónál} \\ \text{nagyobb} \end{array} \\ \Delta \leq & \frac{\sum_{i=0}^{\nu} |x_i - \alpha|}{n+1} + \frac{\sum_{i=\nu+1}^n |x_i - \alpha|}{n+1} < \frac{c(\varepsilon)}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ahol a jobb oldali összeg első tagja elég nagy n -ekre maga is kisebb, mint $\varepsilon/2$. Így $\{l_n\}$ konvergens és határértéke α . Nyertük, hogy L_0 konvergens sorozatokhoz konvergens sorozatokat rendel, miközben azok határértékét is megőrzi.⁶ Ezért $\lim^*$ függvényünk kiterjeszti a szokásos határértéket, ami az 1) tulajdonság. Most meggondoljuk, hogy a további négy tulajdonság is teljesül.

Vegyük észre, hogy L_0 lineáris. Így $\lim^*$ is az, hiszen két lineáris függvény egymásutánja. Vegyük most szemügyre az L_0 definíciójában fellépő számtani közepet! Megállapíthatjuk, hogy L_0 nemnegatív sorozatokhoz ugyanilyeneket rendel. Ezért $\lim^*$ örökli $\lim_0^*$ 4) tulajdonságát: nemnegatív sorozatokhoz nemnegatív számokat rendel.

Legyenek végül $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ az 5) tulajdonság sorozatai, vagyis $\{x_n\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ egy tetszőleges korlátos sorozat és $\{y_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ ennek eltoltja. Állítjuk, hogy $\lim^* x_n = \lim^* y_n$. Segítségként tekintsük a következő feladatot.

III.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy $L_0(\{x_n\} - \{y_n\})$ egy nullához konvergáló sorozat!

Így $\lim_0^*(L_0(\{x_n\} - \{y_n\})) = 0$, ahonnan – használva előbb L_0 , majd $\lim_0^*$ lineáris voltát – adódik, hogy $\lim_0^*(L_0(\{x_n\})) = \lim_0^*(L_0(\{y_n\}))$, tehát $\lim^* x_n = \lim^* y_n$. Ezért $\lim^*$ eltolás-invariáns, s így valóban egy Banach-limesz. Ezzel igazoltuk a következő fontos tételt.

III.3. Tétel. *Van Banach-limesz.*

E tételből kiindulva fogjuk meggondolni, hogy a középiskolában megismert terület-függvény kiterjeszthető a sík minden ponthalmazára: a síkon van Banach-mérték. Előbb azonban megismerjük lehetőségeink korlátait.

IV. Banach-mértékek nemlétezése

Tekintsünk egy mértéket a számegyenes részhalmazainak valamely családján. Azt mondjuk, hogy ez *hosszúságmérték*, ha az 1-hosszú szakaszokhoz az 1 számot rendeli és egybevágóság-invariáns. Ha egy hosszúságmérték értelmezési tartománya az egyenes összes részhalmazának családjá, akkor ezt a függvényt az egyenes egy Banach-mértékének nevezzük. Következő állításunk szerint az egyenesen tekintett Banach-mérték a hosszúság fogalmának kiterjesztése az intervallumokról az egyenes minden részhalmazára.

IV.1. Feladat*. Mutassuk meg, hogy az egyenes tetszőleges Banach-mértéke az intervallumokhoz azok szokásos hosszát rendeli.

⁶ Érdekes, hogy a Banach-limeszhez a konvergencia Cesaro-Fejér féle gyengítésén át jutunk.

Vegyük észre, hogy a hosszmerés általánosításához elegendő a területmérést általánosítanunk:

IV.2. Feladat. Tegyük fel, hogy van Banach-mérték a síkon. Mutassuk meg, hogy ekkor az egyenesen is van!

A területprobléma megoldására vonatkozó törekvésünkkel kapcsolatban némely olvasónkban esetleg felmerült a következő kérdés: miért nem tűztünk ki valami nagyobb feladatot? Például megpróbálhatnánk belátni, hogy a területmérés σ -additív módon is kiterjeszthető a síkon! Ez a feladat azonban nem oldható meg: σ -additív Banach-mérték már az egyenesen sem létezik. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik a számegyenesen egy μ Banach-mérték, amely σ -additív. Ekkor a $[0, 1]$ intervallum mértéke 1, a $[0, 2]$ intervallumé pedig 2. Belátható, hogy léteznek olyan, külön-külön páronként idegen elemekből álló $\{A_n\}$ és $\{A_n^*\}$ halmazsorozatok, melyekre teljesül, hogy $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = [0, 1]$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^* = [0, 2]$ és az A_n, A_n^* párok minden n természetes szám esetén egymás eltoltjai⁷. Ám ez ellentmondásra vezet, kihasználva, hogy egy halmaznak és eltoltjának mértéke mindig ugyanaz:

$$1 = \mu[0, 1] = \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)}_{\text{Itt használjuk a } \sigma\text{-additivitást}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)}_{\text{Ismét, a } \sigma\text{-additivitás miatt}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n^*) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^*\right) = \mu[0, 2] = 2.$$

Adódott, hogy σ -additív Banach mérték nincs a számegyenesen. Így persze a síkon még inkább nincs, amit a IV.2. Feladat bizonyításához hasonlóan gondolhatunk át.

Rendben van, akkor legalább azt mutassuk meg, hogy a térfogatmérés is kiterjeszthető a tér valamennyi részhalmazára – javasolhatná még előbbi olvasónk. Ez a „javaslat” persze még pontosítandó: ugyanúgy, mint a sík és a számegyenes esetében.

IV.3. Feladat. Adjuk meg a térfogatmérték, majd a térbeli Banach-mérték definícióját!

Ha jól dolgoztunk, akkor definíciónk szerint a tér egy tetszőleges Banach-mértéke a poliéderekhez azok szokásos térfogatát rendeli. Ezért a térbeli Banach-mérték fogalma a térfogat fogalmának kiterjesztése a poliéderekről a tér valamennyi ponthalmazára. Állításunk azonban az, hogy ilyen mérték nincsen!

Kezdetként térjünk vissza egy kicsit a síkra, a sokszögek területének kérdésére. Tegyük fel, hogy valaki ad nekünk két sokszöget, melyekről be kell látnunk, hogy

⁷ Ennek igazolása hasonló a Zermelo-féle halmaz felépítéséhez. Ld.: Péter Komjáth – Vilmos Totik: *Problems and Theorems in Classical Set Theory* (a továbbiak során PTCST). Springer, 2006. 63-64, 306-307.

egyenlő a (szokásos) területük. Hogyan próbálkozhatunk? Észrevesszük, hogy elegendő megmutatni, hogy sokszögeink véges sok vágással egymásba darabolhatók, azaz felbonthatók véges sok, páronként egybevágó sokszög egyesítésére. Ekkor ugyanis a szokásos terület additív és egybevágóság-invariáns tulajdonsága szerint a két sokszög területe megegyezik. Bolyai Farkas volt az, aki a XVIII. század végén sejtést fogalmazott meg előbbi észrevételünk megfordíthatóságáról, amely szerint az egyenlő területű sokszögek véges sok vágással egymásba darabolhatók. Ezt az állítást néhány évtized leforgása alatt maga Bolyai, továbbá tőle függetlenül Paul Gerwien és William Wallace igazolta, ezért ma *Bolyai-Gerwien-Wallace tétel* néven ismerjük.

Érdeklődő olvasónk megkérdezheti: igaz marad-e ez az állítás, ha kilépünk a térbe és „terület” helyett „térfogat”-ot, „sokszög” helyett pedig „poliéder”-t mondunk? Ez a kérdés foglalkoztatta David Hilbertet is, aki „harmadik problémaként” fel is vette 1900-ban kitűzött nevezetes 23 problémája közé, melyek megoldásától a matematika látványos előrehaladását remélte. Érdekes, hogy ez a kérdés az elsőként megoldott Hilbert-probléma volt, ugyanis Max Dehn már 1902-ben megmutatta, hogy *a szabályos tetraéder nem darabolható át téglatestbe véges sok vágással*. Ez az eredmény azt jelezte, hogy már a poliéderek térfogatát sem lehet meghatározni csupán átdarabolással, hanem ezen egyszerű módszer helyett a „végtelenül kicsi mennyiségek” vizsgálatához – az integrál fogalmához – kell nyúlnunk. Ez az oka annak, hogy a térfogat középiskolai tárgyalása során a Cavalieri-elvet lehetetlen kikerülni. A térfogatmérés „sokkal nehezebb” feladat, mint a területmérés.

Így talán már most is „elhinnénk”, hogy a térfogatmérés nem terjeszthető ki a tér minden részhalmazára. Ez valóban így is van, melynek magyarázata a *Banach-Tarski paradoxonban* rejlik, amely Dehn eredménye után bő két évtizeddel, 1924-ben született meg. E rendkívül izgalmas állítást Jan Mycielski, a neves lengyel matematikai gondolkodó egy alkalommal „az elméleti matematika legmeglepőbb eredményének” nevezte. A tételt most a következő módon fogalmazzuk meg. Tekintsük a tér egy $\mathcal{B}$ -vel jelölt egységnyi sugarú gömbjét. Az állítás az, hogy ekkor ezt a gömböt fel tudjuk osztani véges sok halmazra, jelben mondjuk az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazokra úgy, hogy ezekből – hézagmentesen és fedés nélkül – fel tudunk építeni két, egységnyi sugarú és egymás mellett álló gömböt: $\mathcal{B}_1$ -et és $\mathcal{B}_2$ -t, miközben az A_i -ket kellő ügyességgel mozgatjuk a térben eltolások és forgások által. Tehát $\mathcal{B}$ gömbünk megkétszerezhető! Érdekességgént megemlíthetjük, hogy ehhez már $n = 10$ gömbdarab elegendő.⁸ Végül meggondoljuk, hogy a Banach-Tarski paradoxon lényegi állítása éppen az, hogy a térfogatmérést nem tudjuk kiterjeszteni a tér minden részhalmazára. Tegyük fel ugyanis indirekt módon, hogy létezik egy

⁸ Ld. *Laczkovich Miklós: Sejtés és Bizonyítás*. TypoTEX, 1998. 71-77. E könyv középpontjában a mérték problémája áll, ezért itt az érdeklődő olvasó fő témánkról mélyebben is tájékozódhat.

μ Banach-mérték a téren. Ekkor kiindulási A_i gömbdarabjaink elmozgatott képeit A_i^* -al jelölve megállapíthatjuk, hogy $\mu(A_i) = \mu(A_i^*)$ teljesül minden $i = 1, 2, \dots, n$ értékre, s így végül a következőre jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi = \mu(\mathcal{B}) &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i^*) = \underbrace{\sum_{i=1}^k \mu(A_i^*)}_{\text{A } \mathcal{B}_1\text{-et alkotó darabkák mértékei}} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^n \mu(A_i^*)}_{\text{A } \mathcal{B}_2\text{-t alkotó darabkák mértékei}} \\ &= \mu(\mathcal{B}_1) + \mu(\mathcal{B}_2) = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Az ellentmondás mutatja, hogy a térfogatprobléma megoldhatatlan: a téren nincsen Banach-mérték. Persze, a középiskolai térfogatfogalom azért a poliéderek családjánál lényegesen általánosabb halmazosztályokra is kiterjeszthető.

Most már megfogalmazzuk központi tételünket, amely a korábban mondottak tükrében a lehető legtöbbet állítja.

IV.4. Tétel (Stefan Banach, 1923). *Van Banach-mérték a síkon, vagyis a területmérés kiterjeszthető a sokszögekről a sík minden ponthalmazára.*

Megjegyezzük, hogy Banach idézett eredményei a kiválasztási axiómán nyugszanak. E nevezetes axióma igaznak tételezése a modern matematika egyik központi „dogmája”, sarokköve. Állítása, hogy *páronként diszjunkt, nem üres halmazok tetszőleges családjához megadható egy olyan halmaz, melynek a halmazcsalád minden tagjával alkotott metszete egyetlen elemből áll.* Ez persze „első látásra nyilvánvalónak tűnik” – mondja Bertrand Russel, a híres angol logikus – ám az említett két következmény erőteljessége és különössége gondolkozásra késztet, s így „végül az ember elkezd nem érteni, amit ez az állítás jelent”.

A IV.4. Tétel bizonyításáról következő, utolsó fejezetünkben szólnunk.

V. A síkon van Banach-mérték

Úgy érezzük, hogy a sík Banach-mértékétől megkövetelt egybevágóság-invariancia igen komoly elvárás. Ezért kezdetben a sík egybevágóságaira összpontosítjuk figyelmünket. Értelmezzük két egybevágóság szorzatát a szokásos módon, vagyis ezek egymás utáni végrehajtásaként. Pontosabban, ha γ_1 és γ_2 két egybevágóság, akkor legyen:

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(P) = \gamma_2(\gamma_1(P))$$

a sík tetszőleges P pontjára. Jól ismert, hogy két, tetszőleges egybevágóság ily módon értelmezett szorzata szintén egybevágóság és a sík egybevágóságai e művelettel egy csoportot alkotnak. Érvényes ugyanis, hogy a szorzás asszociatív, továbbá a

sík identikus leképezése a szorzásra nézve egységelem és minden elemnek létezik inverze, amely nem más, mint az adott transzformációnak – mint függvénynek – az inverze.

Most bevezetjük a közép fogalmát, amely a Banach-limesz csoportok felett tekintett „testvére”.

Definíció. Legyen G egy tetszőleges csoport a „ $\cdot$ ” művelettel. Jelölje továbbá $\mathcal{B}_G$ a G csoporton értelmezett, valós értékű korlátos függvények családját. Ekkor egy $\kappa : \mathcal{B}_G \rightarrow \mathbb{R}$ függvény egy *közép* a G csoport felett, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- 1) $\kappa(\mathbf{1}) = 1$, ahol $\mathbf{1}$ az a függvény, amely G minden eleméhez az 1-et rendeli;
- 2) Ha $f, g \in \mathcal{B}_G$, akkor $\kappa(f + g) = \kappa(f) + \kappa(g)$;
- 3) Ha $f \in \mathcal{B}_G$ és α egy valós szám, akkor $\kappa(\alpha f) = \alpha \kappa(f)$;
- 4) Amennyiben $f \in \mathcal{B}_G$ minden értéke nemnegatív, akkor $\kappa(f) \geq 0$;
- 5) Ha $f \in \mathcal{B}_G$ és $g \in G$, akkor $\kappa(f) = \kappa(gf)$, ahol gf az f „balra toltja” g -vel:
 $gf : G \rightarrow \mathbb{R} : gf(h) = f(g^{-1} \cdot h)$.

Így egy G feletti közép az azonosan 1 függvényhez az 1 értéket rendeli (1), lineáris (2, 3), nemnegatív függvényekhez nemnegatív számokat rendel (4) és balratolás-invariáns (5). Fő kérdésünk, hogy mely csoportok felett létezik közép.

Meggondolható, hogy véges csoportok felett mindig van közép, mégpedig pontosan egy: a számtani közép. Tekintsük most az egész számoknak az összeadással alkotott $\mathbb{Z}$ csoportját. Rögzítsünk továbbá egy $\lim^*$ Banach-limeszt. Idézzük fel, hogy ez a III.3. Tétel alapján megtehető! Legyen $f \in \mathbb{B}_{\mathbb{Z}}$ és másoljuk le e függvény nemnegatív helyeken felvett értékeit egy f_n sorozattal: legyen $f_n = f(n)$, ha $n \in \mathbb{N}$. És végül legyen $\kappa(f) = \lim^* f_n$. Könnyen ellenőrizhető, hogy κ egy közép $\mathbb{Z}$ felett: az 1) - 5) állítások teljesülése rendre következik a Banach-limesz megfelelő tulajdonságaiból. Innen kiindulva már gyorsan adódik, hogy a $\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n\text{-szer}} = \mathbb{Z}^n$ csoport felett is létezik közép minden n pozitív számra⁹

(emlékeztetünk, hogy e csoportokban az összeadást egyszerűen komponensenként végezzük el). A $\mathbb{Z}^n$ $n \in \mathbb{N}^+$ csoportról tudjuk, hogy kommutatív és végesen generált: az $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, 0, \dots, 1)$ véges sok (n darab) elemből minden csoportelem megkapható véges számú összeadás és kivonás segítségével. A $\mathbb{Z}^n$ csoportok felett nyert közepekből kiindulva meggondolható, hogy minden végesen generált kommutatív csoport felett létezik közép.¹⁰ Innen pedig bizonyítható a következő tétel.¹¹

⁹ A bizonyítás alap gondolata a többszörös integrál fogalmának lemásolása, ld. PTCST, 458.

¹⁰ PTCST, 458. Megjegyezzük, hogy ez az állítás közvetlenül levezethető Tyihonov tételéből, ld. *Stan Wagon: The Banach-Tarski paradox*. Cambridge University Press, 1985. 150.

¹¹ Kompaktsági megfontolásokkal, ld. Wagon, 150.

V.1. Tétel. *Minden kommutatív csoport felett létezik közép.*¹²

A sík egybevágóságainak csoportja nem kommutatív, ám szerkezete a kommutatív csoportokéhoz eléggé közeli: e csoport ugyanis „kirakható” három kommutatív csoportból.¹³ E tényt kihasználva az V.1. Tételből a következő nagyon fontos állítás már levezethető.¹⁴

V.2. Tétel. *A sík egybevágóságainak csoportja felett létezik közép.*

Egyetlen segéd-tételt kell még kimondanunk.

V.3. Tétel. *A sík összes részhalmazának családján van olyan mérték, amely az egy oldalú négyzetekhez az 1 számot rendeli.*

E tétel bizonyítása viszonylag nem bonyolult¹⁵, ami azt mutatja, hogy a Banach-mérték keresésekor leginkább az egybevágóságokkal szembeni invariancia biztosítása okoz problémát. Ezért volt szükségünk az előbbi kitérőre, amely az V.2. Tételhez vezetett bennünket. Megjegyezzük, hogy ezt az utat először Neumann János (von Neumann) javasolta.

A Banach-mérték bevezetéséhez érkeztünk. Kezdetként használjuk fel segéd-állításainkat! Rögzítsünk egy κ közepet a sík egybevágóságainak csoportja felett, továbbá rögzítsünk még a sík összes részhalmazának családján egy μ -vel jelölt mértéket, amely az egy oldalú négyzetekhez az 1 számot rendeli. A sík egybevágóságainak csoportját mostantól $\mathcal{I}$ fogja jelölni.

Tekintsünk most már egy tetszőleges síkbeli ponthalmazt, A -t. Szeretnénk „megmérni” az A területét. Ezt az értéket – az A ponthalmaz Banach-mértékét – egyszerűen $T(A)$ jelöli majd. Vegyünk fel először egy f_A függvényt, amely „megnézi” az A halmazzal egybevágó alakzatok μ melletti mértékeit:

$$f_A : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} : f_A(\gamma) = \mu(\gamma\langle A \rangle),$$

ahol $\gamma\langle A \rangle$ az A halmaz elemeinek γ melletti képeiből álló halmaz:

$$\gamma\langle A \rangle = \{\gamma(P) : P \in A\}.$$

¹² E tételből a Banach-mérték már elemi megfontolásokkal megkapható, mégpedig az integrál kiterjesztésén át, ld. PTCST, 119-121, 459-462. Ennek során előbb az egyenesen mutatunk Banach-mértéket. Innen kiindulva ugyanis a síkbeli állítás már viszonylag egyszerűen bizonyítható. Végül megjegyezzük, hogy a hossz-mérés szóban forgó kiterjesztése a Hahn-Banach tétel alkalmazásaként is megtehető, ld. *Kérchy László: Valós- és funkcionálanalízis. POLYGON, 2008. 261-268.*

¹³ A sík egybevágóságai *feloldható* csoportot alkotnak, melynek faktora az $\mathcal{E}/\{\text{id}\}$, $\mathcal{M}/\mathcal{E}$ és az $\mathcal{I}/\mathcal{M}$ kommutatív csoportok, ahol $\mathcal{E}$ az eltolások, $\mathcal{M}$ pedig a mozgások részcsoportját jelöli a síkizometriák $\mathcal{I}$ csoportjában.

¹⁴ A kiválasztási axióma egy érdekes alkalmazásaként, ld. Wagon, 149.

¹⁵ Tyihonov tételével, ld. Wagon 152-154.

Először vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor f_A nem korlátos függvény. Ekkor úgy érezhetjük, hogy az A halmaz „nagyon nagy”, ezért Banach-mértékét válasszuk végtelennek. Ellenkező esetben az f_A értékeit „kiátlagolhatjuk” a κ közép segítségével: legyen az A halmaz Banach-mértéke $\kappa(f_A)$. Összefoglalva, legyen:

$$T(A) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } f_A \text{ nem korlátos} \\ \kappa(f_A), & \text{ha } f_A \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}. \end{cases}$$

Végül meggondoljuk, hogy ez a T függvény egy Banach-mérték. Mivel κ nemnegatív függvényekhez nemnegatív számokat rendel, így T – a ∞ mellett – nemnegatív valós értékeket vesz fel és az üres halmaz T melletti képe persze 0.

Legyenek most A és B diszjunkt ponthalmazok. Figyeljük meg, hogy ha $\gamma \in \mathcal{I}$, akkor $\gamma\langle A \rangle$ és $\gamma\langle B \rangle$ szintén diszjunktak, hiszen γ kölcsönösen egyértelmű leképezés. Ezért:

$$f_{A \cup B}(\gamma) = \mu(\gamma\langle A \cup B \rangle) = \underbrace{\mu(\gamma\langle A \rangle \cup \gamma\langle B \rangle)}_{\mu \text{ végesen additív}} = \mu(\gamma\langle A \rangle) + \mu(\gamma\langle B \rangle) = f_A(\gamma) + f_B(\gamma),$$

vagyis $f_{A \cup B} = f_A + f_B$. Egyszerű megállapítás az is, hogy ha f_A és f_B valamegyike nem korlátos, akkor $f_{A \cup B}$ sem az. Ezért ebben az esetben $T(A) + T(B) = T(A \cup B)$. Egyébként pedig, ha f_A és f_B mindketten korlátosak, akkor $f_{A \cup B}$ is az, továbbá:

$$T(A) + T(B) = \underbrace{\kappa(f_A) + \kappa(f_B)}_{\kappa \text{ lineáris tulajdonsága szerint}} = \kappa(f_A + f_B) = \kappa(f_{A \cup B}) = T(A \cup B).$$

Tehát T additív és így egy mérték a sík összes részhalmazának családján.

Jelöljön most $\square$ egy 1 oldalú négyzetet. Ekkor $f_{\square} = \mathbf{1}$, hiszen μ az 1 oldalú négyzetekhez az 1 számot rendeli. Ezért $T(\square) = \kappa(\mathbf{1}) = 1$, a közép 1) tulajdonsága szerint. Tehát az 1 oldalú négyzetek T melletti képe 1.

Az eddigiek során azt mutattuk meg, hogy a μ mérték tulajdonságait a κ közép átörökíti a T függvényre. Ellenőriznünk kell még, hogy T egybevágóság-invariáns. Legyen ezért A ismét egy tetszőleges ponthalmaz a síkon és vegyünk egy $\xi \in \mathcal{I}$ egybevágósági transzformációt. Be kell látnunk, hogy $T(A) = T(\xi\langle A \rangle)$. Figyeljük meg, hogy tetszőleges $\gamma \in \mathcal{I}$ esetén:

$$f_{\xi\langle A \rangle}(\gamma) = \mu(\gamma\langle \xi\langle A \rangle \rangle) = \mu(\xi \cdot \gamma\langle A \rangle) = f_A(\xi \cdot \gamma) = \xi^{-1} f_A(\gamma),$$

azaz $f_{\xi\langle A \rangle} = \xi^{-1} f_A$. Magyarán az $f_{\xi\langle A \rangle}$ függvény az f_A balra-toltja a ξ^{-1} értékkel. Persze egy függvény és annak balra-toltja egyszerre korlátos, így nem korlátos f_A

esetén állításunk nyilvánvaló. Végül, ha f_A korlátos függvény, akkor állításunk következik a κ közép balratolás-invariáns voltából. Ezzel beláttuk, hogy a T függvény egybevágóság-invariáns.

Az előbbiek során megmutattuk, hogy T Banach-mérték, ami igazolja a IV.4. Tételt.

Láttuk, hogy a térfogatmérés nem terjeszthető ki a tér minden pontthalmazára, ám a síkon minden „idomnak” tudunk területet tulajdonítani. E két állítás egy, a sík és a tér szerkezete között fennálló lényeges különbségről tanuskodik. E különbség leginkább a sík és a tér egybevágóságainak eltérő viselkedésében érhető tetten. Ezzel kapcsolatos záró gondolatunk.

Szükségünk lesz egy érdekes fogalomra. Tekintsünk egy G csoportot. Legyen $H \subseteq G$ és g egy elem G -ben. Jelölje továbbá ${}_gH$ a H halmaz g -vel vett balra toltját, azaz legyen ${}_gH = \{gh : h \in H\}$. Azt mondjuk, hogy G *megkétszerezhető*, ha felosztható véges sok diszjunkt halmaz, jelben mondjuk a $H_1, H_2, \dots, H_n$ halmazok egyesítésére úgy, hogy e halmazok alkalmas $g_1, g_2, \dots, g_n$ csoportelemekkel vett balra toltjai a csoport *kétszeres lefedőrendszerét* alkotják: G minden eleme pontosan két ${}_{g_i}H_i$ -ben lép fel.

Emlékezzünk vissza, hogy a síkbeli Banach-mérték létezésére az V.2. Tétel állításából következtettünk, amely szerint a sík egybevágóságainak csoportja felett létezik közép. E fontos állításból kiindulva az is meggondolható, hogy a sík egybevágóságainak csoportja nem megkétszerezhető. Ám a térbe kilépve már egészen mást tapasztalunk. Kiderül ugyanis, hogy a tér egybevágóságainak csoportjában fellép egy kicsiny – megszámlálható – részcsoporthoz, amely megkétszerezhető.¹⁶ Innen kiindulva jutott el Banach és Tarski a térbeli gömbök megkétszerezhetőségéhez és ezen keresztül a térfogatprobléma megoldhatatlanságához.

Kalmár Dániel SzTE Matematika Tanárszak V. évf.

Kalmar.Daniel@stud.u-szeged.hu

¹⁶ Ez a két elem által generált *szabad csoport*.

