

A haladványok gyakorlati alkalmazásai

SZÁSZ TÜNDE - ZSUZSÁNNA

Annak ellenére, hogy igen sok haladvánnyal kapcsolatos gyakorlati feladat van, az iskolában viszonylag kevés ideje kezdték el tanítani.

Az iskolában kétféle haladványról tanulunk, a számtani és a mértani haladványról. Ezek speciális valós sorozatok.

Ha a és b valós számok, akkor az

$$a, \quad a + b, \quad a + 2b, \quad \dots, \quad a + nb, \dots$$

sorozatot számtani haladványnak, az

$$a, \quad a \cdot b, \quad a \cdot b^2, \quad \dots, \quad a \cdot b^n, \dots$$

sorozatot pedig mértani haladványnak nevezzük.

Ezekkel kapcsolatosan több kérdést lehet felvetni. Ilyen például a haladvány első n tagja összegének a meghatározása. A számtani haladvány első n tagjának összegét S_n -nel jelölve,

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (a + (n - 1)b) = \\ &= (a + (n - 1)b) + (a + (n - 2)b) + (a + (n - 3)b) + \dots + a. \end{aligned}$$

Ha az egymás alatti tagokat összeadjuk, kapjuk, hogy

$$2S_n = (2a + (n - 1)b) \cdot n.$$

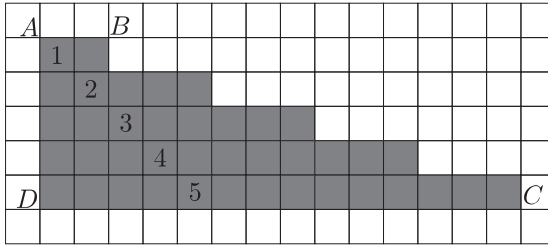
tehát

$$S_n = \frac{(2a + (n - 1)b) \cdot n}{2}.$$

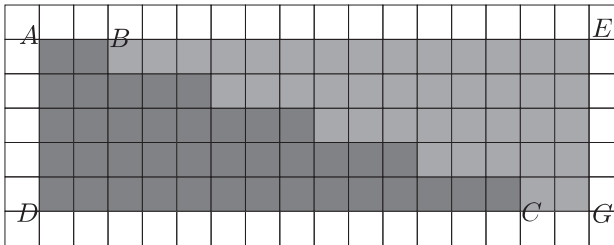
Ennek a képletnek a geometriai értelme egyszerű. Tekintsük például a

$$2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

számtani haladványt és számítsuk ki az első öt tag összegét! Egy kockás lapon ábrázoljuk a tagokat és amint az alábbi ábrán is látható, az $ABCD$ alakzatot kapjuk:



Észrevehető, hogy az $ABCD$ alakzat területe egyenlő a haladvány tagjainak összegével. Egészítsük ki az $ABCD$ alakzatot az $AEGD$ téglalapra, így két egyenő alakzatot kapunk: $ABCD$ és $BEGC$.



Tehát a haladvány összegének kétszerese egyenlő az $ADGE$ téglalap területével, azaz:

$$(AB + BE) \cdot AD.$$

Viszont az $AB + BE$ összeg egyenlő a haladvány első és utolsó tagjának összegével; az AD hossza pedig a haladvány tagjainak a számát adja meg. Tehát kapjuk, hogy:

$$2S = (\text{első és utolsó tag összege}) \cdot (\text{tagok száma})$$

vagy

$$S = ((\text{első és utolsó tag összege}) \cdot (\text{tagok száma}))/2.$$

A mértani haladvány első n tagjának

$$T_n = \begin{cases} a \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1}, & \text{ha } b \neq 1, \\ a \cdot n, & \text{ha } b = 1. \end{cases}$$

összegét a $(b - 1)(1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^{n-1}) = b^n - 1$ egyenlőségből kapjuk.

A következő feladat a gabona szétosztásával kapcsolatos, amelyet egy híres egyiptomi papiruszon találtak leírva. Ezt a papiruszt Henry Rhind fedezte fel, amely 2000 évvel időszámításunk előtt íródott, és amely a maga során másolata egy még régebbi, időszámításunk előtt 3000-ben írt dolgozatnak. Az aritmetikai, algebrai és geometriai feladatok között szerepelt a következő feladat (szabad fordításban):

1. feladat. Szét kell osztani 100 kg mennyiségű gabonát 5 munkás között úgy, hogy a második munkás annnyival többet kapjon az elsőnél, mint amennyivel többet kap a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és végül az ötödik a negyediknél. Még egy fontos feltétel volt, hogy az első és a második munkás összesen 7-szer kevesebbet kapjon mint a többi három összesen. Mennyit kap az öt munkás külön-külön?

Megoldás. Az egyes munkások által kapott gabonamennyiségek egy növekvő számtani haladvány tagjai. Jelöljük x -el az első munkás által kapott gabonamennyiséget és r -el azt a mennyiséget amennyivel többet kap mindegyik a másiknál. Tehát:

- az első munkás része: x
- a második munkás része: $x + r$
- a harmadik munkás része: $x + 2r$
- a negyedik munkás része: $x + 3r$
- az ötödik munkás része: $x + 4r$.

A feladat másik feltételét is figyelembe véve a következő egyenletekhez jutunk:

$$x + (x + r) + (x + 2r) + (x + 3r) + (x + 4r) = 100$$

$$7[x + (x + r)] = (x + 2r) + (x + 3r) + (x + 4r)$$

Elvégezve a lehetséges összevonásokat, az első egyenlet a következő alakú lesz:
 $x + 2r = 20$, a második pedig: $11x = 2r$.

Megoldva az egyenletrendszer, kapjuk, hogy: $x = 1\frac{2}{3}$, $r = 9\frac{1}{6}$.

Tehát a gabonát a következőképpen kell szétosztani: $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20 , $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. ■

L. F. Magnyickij orosz matematikus, 1703-ban írt *Aritmetika, más szóval számolástudomány* című könyvét, közel 50 évig használták tankönyvként az iskolákban. Ebben a könyvben voltak ugyan haladványokkal kapcsolatos feladatok, de nem volt megadva egy általános formula sem amely a tagok közötti összefüggést leírta volna.

A fent említett Magnyickij orosz matematikus tankönyvében szerepelt a következő feladat:

2. feladat. Egy ember eladott egy lovat 156 rubelért. Viszont a vásárló meggondolta magát, visszahozta a lovat és így szólt:

-Visszahoztam a lovat, mert nem ér meg annyi pénzt!

Ekkor az eladó ajánlott egy másik vásárt:

-Ha úgy találsz, hogy a ló nem ér meg annyi pénzt, akkor vásárold meg csak a patkószegeket, így a lovat ingyen kapod. Mindegyik patkó 6 darab szeggel van fel-fogva. Az első patkószegért adsz $\frac{1}{4}$ kopejkát, a másodikért $\frac{1}{2}$ kopejkát, a harmadikért pedig egy kopejkát és így tovább.

A vásárló csodálkozva a patkószegek kicsi árán és annak reményében, hogy a lovat is megkapja, elfogadta az ajánlatot, és kiszámította, hogy a patkószegekért nem fizet többet mint 10 rubelt. Mennyit tévedett a vásárló?

Megoldás. A vásárló 24 darab patkószegért kell fizessen:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{24-3}$$

kopejkát. A fenti összeg pedig egy 21 tagból álló mértani haladvány összege:

$$\frac{2^{21} \cdot 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303\frac{3}{4} \text{ kopejka.}$$

Tehát nagyon elszámolta magát a vásárló. ■

A továbbiakban pedig íme még néhány haladványokkal kapcsolatos gyakorlati feladat.

3. feladat *Egy gazdaságban 62 nyúl részére előkészítettek terv szerint egy bizonyos mennyiségű sárgarépat úgy, hogy minden héten egy nyúlnak 2 kg sárgarépa jár, feltételezve, hogy a nyulak száma nem változik. Viszont minden héten két nyúllal kevesebb lett és az előkészített sárgarépa mennyiség kétszer annyi ideig volt elég mint ahogy tervezték. Számítsuk ki, hogy mennyi volt az a bizonyos mennyiségű sárgarépa és mennyi időre gondolták, hogy elég lesz?*

Megoldás. Feltételezzük, hogy x kg sárgarépa volt előkészítve y hétre. Mivel az x kg sárgarépa 62 nyúl részére volt kiszámítva úgy, hogy hetente minden nyúlnak 2 kg jár kapjuk, hogy:

$$x = 62 \cdot 2 \cdot y = 124y.$$

Tudjuk azt, hogy az

-első héten elfogyasztottak 124 kg-ot

-a második héten elfogyasztottak $124 - 2 \cdot 2 = 124 - 1 \cdot 4 = 120$ kg-ot

-a harmadik héten elfogyasztottak $124 - 2 \cdot 4 = 116$ kg-ot

⋮

-a $2y$ -dik héten elfogyasztottak $124 - (2y - 1) \cdot 4 = (124 - 8y + 4)$ kg-ot.

Tehát az eredeti mennyiség a következő alakban írható:

$$x = 124y = 124 + 120 + 116 + \dots + (124 - 8y + 4)$$

Észrevehető, hogy a fenti összegben a tagok egy számtani haladványt képeznek, amelyben az első tag 124 az utolsó tag pedig $(124 - 8y + 4)$ és összesen $2y$ tag van. Tehát a haladvány összege:

$$124y = \frac{(124 + (124 - 8y + 4)) \cdot 2y}{2} = (252 - 8y)y$$

Mivel y nem lehet nulla, egyszerűsítés után kapjuk, hogy $8y = 128$, innen pedig $y = 16$, majd $x = 1984$. Tehát elő volt készítve 1984 kg sárgarépa 16 hétre. Mivel a nyulak száma csökkent, tehát elég volt 32 hétre. ■

4. feladat Egy csapat munkás arra vállalkozott, hogy felépítenek egy házat. Ha a csapat minden munkása egyidőben dolgozik, akkor a ház felépítése 96 nap lenne. A valóságban a munkát csak 2 ember kezdte el, majd egy bizonyos idő múlva csatlakozott hozzájuk még két munkás, majd ugyanannyi idő után csatlakozott még kettő és így tovább. A munka elvégzése után megállapították, hogy az első két munkás 15-ször többet dolgozott az utolsó kettőnél. Hány napot dolgozott az utolsó két munkás?

Megoldás. Feltételezzük, hogy a két utolsó munkás x napot dolgozott és összesen y munkás volt. Tudjuk, hogy az első munkás 15-ször többet dolgozott az utolsó-nál, tehát az első $15 \cdot x$ napot dolgozott. Így a munkások által ledolgozott napok számának összege egy számtani haladvány összege, amelynek az első tagja $15x$ az utolsó pedig x , tehát:

$$\frac{(15x + x)y}{2} = 8xy.$$

Másfelől ha a csapat minden munkása egyidőben dolgozott volna, akkor a ház felépítése 96 nap lett volna, így az összes munkás által ledolgozott napok számának összege $96y$, tehát:

$$8xy = 96y.$$

Mivel az y nem lehet nulla, egyszerűsítés után kapjuk, hogy: $8x = 96$, tehát $x = 12$.

Így az utolsó két munkás 12 napot dolgozott.

Meg lehet figyelni, hogy megállapítottuk ugyan az utolsó két munkás mennyit dolgozott, de meg tudnánk-e mondani, hogy hány munkás dolgozott összesen? Nyilván nem, annak ellenére, hogy a munkások száma (y) szerepelt a fenti egyenletekben! Ahhoz, hogy ki tudjuk számítani, a feladat nem szolgáltat elég adatot. ■

5. feladat. Egy gazda kivitt a piacra néhány zsák búzát, minden zsákban 64 kg búza volt. Az első vásárlónak eladta a búza felét és még egy negyed zsákot, a második

vásárlónak a megmaradt búza felét és még egy negyed zsákot, a harmadik vásárlónak a megmaradt búza felét és még egy negyed zsákot, és így tovább, míg a hatodik vásárlónak is eladta a megmaradt búza felét és egy negyed zsákot. Így a gazdának maradt még egy fél kiló búzája. Hány zsák búzája volt a gazdának?

Megoldás. Ha x -el jelöljük a zsákok számát akkor kapjuk, hogy:

$$\begin{array}{ll}
 \text{-az első vásárló megvásárolt} & \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2x+1}{2^2}, \\
 \text{-a második vásárló megvásárolt} & \frac{1}{2} \left(x - \frac{2x+1}{4} \right) + \frac{1}{4} = \frac{2x+1}{2^3}, \\
 \text{-a harmadik vásárló megvásárolt} & \frac{1}{2} \left(x - \frac{2x+1}{4} - \frac{2x+1}{8} \right) + \frac{1}{4} = \frac{2x+1}{2^4}, \\
 & \vdots \\
 \text{-a hatodik vásárló megvásárolt} & \frac{2x+1}{2^7} \text{ zsák búzát.}
 \end{array}$$

Felírva a következő egyenletet

$$(2x+1) \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^7} \right) = x - \frac{1}{128}$$

és kiszámítva a mértani haladvány összegét, kapjuk, hogy:

$$(2x+1) \frac{2^6 - 1}{2^7} = \frac{128x - 1}{128} \implies 2x = 64 \implies x = 32$$

Tehát a gazdának 32 zsák búzája volt. ■

