

Az $\sqrt[n]{N}$ (amikor nem egész), e és π számok irracionálisok

MÓRICZ FERENC*

0. Bevezetés. Már a középiskolai matematika órákon bizonyításra kerül, hogy miért nem lehet $\sqrt{2}$ racionális szám. Ugyanis annak a feltételezése, hogy $\sqrt{2}$ előállítható lenne két pozitív egészszám hányadosaként, ellentmondásra vezet. Röviden vázoljuk a jólismert bizonyítást.

Tehát induljunk ki abból a feltevésből, hogy léteznek olyan p és q pozitív egészszámok, amelyekre

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Nyilván feltehetjük, hogy p -nek és q -nak nincs 1-nél nagyobb közös osztója (ellenkező esetben a számlálót és a nevezőt osztanánk p és q legnagyobb közös osztójával, amivel a tört értéke nem változna meg). A fenti egyenlőséget négyzetre emeljük és rendezzük:

$$2q^2 = p^2.$$

Eszerint p^2 páros szám. Mivel páratlan szám négyzete is páratlan, ebből következik, hogy p -nek is párosnak kell lennie: $p = 2p_1$, ahol p_1 egészszám. Ezt az előbbi egyenlőségbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$2q^2 = (2p_1)^2 = 4p_1^2, \quad \text{amiből} \quad q^2 = 2p_1^2$$

következik. A fentihez hasonló gondolatmenettel adódik, hogy q -nak is párosnak kell lennie. Eszerint p -nek és q -nak a 2 közös osztója, ami ellentmond annak, hogy p -nek és q -nak nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $\sqrt{2}$ nem lehet racionális szám, azaz $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Már az ókori görögök is rájöttek arra, hogy a $\sqrt{2}$ valami egészen másféle mennyiség, mint amit addig ismertek az aritmetika négy alpművelete: az összeadás, kivonás, szorzás és osztás használata során. Ez a felismerés a geometriában

* Ez a dolgozat a T 046 192 sz. OTKA pályázat támogatásával készült.

a négyzet oldala és átlója hosszának egyidejű mérésekor következett be. Nevezetesen, akármilyen módon is választották meg az egységnyi hosszúság mértékegységét és annak törtrészeit, a négyzet oldalának és átlójának a hossza minden esetben *összemérhetetlennek* (görög eredetű szóval: inkommenzurábilis-nak) bizonyult. Valóban, ha a négyzet oldalának hossza h egység (itt h egy pozitív racionális számot jelöl), akkor Pitagorasz tétele szerint átlójának hossza $h\sqrt{2}$. Így az átló és az oldal hosszának aránya éppen $\sqrt{2}$, amely nem állítható elő két egészszám hányadosaként. Márpedig a zenei hangok harmóniájának vizsgálatából kifejlődött aritmetikában az ókori görögök számon a természetes számokat és a közönséges törteteket értették. Ebbe a számfogalomba a $\sqrt{2}$ nem illett bele, és az így felmerült ellentmondást úgy próbálták elkerülni, hogy az aritmetikát és geometriát mereven elkülönítették egymástól. Például azzal, hogy a geometriában elsősorban a vonalzóval és körzővel történő szerkeszthetőséget vizsgálták, míg az így előálló szakaszok és körívek hosszának pontos mérésével nem foglalkoztak. Ehelyett átvették az ókori Egyiptomban és Babilonban használt közelítéseket az egészszámokból vont négyzetgyökökre, valamint a kör kerületével és területével kapcsolatos π számra.

Jól ismert, hogy minden pozitív racionális szám véges vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban is előállítható azáltal, hogy a tört számlálóját nevezőjével osztjuk és az osztást minden határon túl folytatjuk (kivéve azokat az eseteket, amikor véges sok lépésben jutunk 0 maradékhoz). Például,

$$\frac{1}{8} = 0,125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000},$$

$$\frac{12}{7} = 1, \overline{714285} \overline{714285} \overline{714285} \dots\dots,$$

ahol a "—" jellel az ismétlődő szakaszra utalunk.

Megjegyezzük, hogy a fenti első példában is lehetséges végtelen szakaszos tizedestört előállítás:

$$\frac{1}{8} = 0,124999\dots = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \dots$$

Valóban, ha a *végtelen geometriai sor*

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{ahol } |x| < 1$$

összegképletét alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \dots &= \frac{9}{10^4} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{9}{10^4} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10^4} \frac{10}{9} = \frac{1}{10^3} \end{aligned}$$

és ennél fogva

$$0,124999\dots = 0,124 + \frac{1}{10^3} = 0,124 + 0,001 = 0,125.$$

Az is jól ismert, hogy minden szakaszos végtelen tizedestört egy pozitív racionális szám kifejtése. (Véges tizedestörtek esetén ez az állítás triviálisan igaz.) Ugyancsak a végtelen geometriai sor összegképletét használva látjuk be, hogy a fenti második példa esetében

$$\begin{aligned} 1, \overline{714285} \overline{714285} \dots &= 1 + \frac{714285}{10^6} \left(1 + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{714285}{10^6} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^6}} = 1 + \frac{714285}{10^6} \frac{10^6}{10^6 - 1} \\ &= 1 + \frac{714285}{999999} = 1 + \frac{5 \cdot 142857}{7 \cdot 142857} = 1 + \frac{5}{7} = \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

A nemszakaszos végtelen tizedestörtek a pozitív irracionális számok tizedestört kifejtései. Ezek esetében a tizedestört előállítás egyértelmű. Ha két nemszakaszos végtelen tizedestört akárcsak egy tizedesjegyben is különbözik egymástól, akkor azok két különböző valós szám kifejtései. A pozitív irracionális számok a pozitív racionális számokkal együtt alkotják a pozitív valós számokat. Magát a valós számok összességét a pozitív valós számok, a zérus (vagy nullának is nevezik) és a negatív valós számok (az utóbbiak formailag a pozitív valós számok negatív előjellel ellátott alakjai) alkotják.

Példaképpen megadjuk a $\sqrt{2}$ szám 31 tizedesjegyre pontos értékét:

$$\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ 7\dots$$

1. Az $\sqrt[m]{N}$ szám vagy egész vagy irracionális. Hasonlóan ahhoz, ahogyan a $\sqrt{2}$ irracionális voltát bizonyítottuk, azt is beláthatjuk, hogy a $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ és általában $\sqrt{N}$ számok is mind irracionálisok, ha N prímszám. Ebben a részben ennél jóval általánosabban azt fogjuk bebizonyítani, hogy ha N és m olyan pozitív egészszámok, hogy $\sqrt[m]{N}$ nem egészszám, akkor $\sqrt[m]{N}$ nem lehet racionális szám.

1. Tétel. *Legyenek N és m tetszőleges pozitív egészszámok, amelyekre $\sqrt[m]{N}$ nem egészszám. Akkor $\sqrt[m]{N}$ nem állítható elő két egészszám hányadosaként.*

Bizonyítás. Emlékeztetünk az egészrész függvény definíciójára, amelyet $[x]$ -szel jelölünk, ahol x tetszőleges valós szám lehet:

$$[x] := \begin{cases} -1, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{ha } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{ha } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

és így tovább mindkét irányban. Az alább bizonyításban nekünk csak az $x > 0$ esetre lesz szükségünk.

Definiáljuk az a valós számot a következőképpen:

$$(1.1) \quad a := \sqrt[m]{N} - [\sqrt[m]{N}].$$

A tétel feltevése, illetve az egészrész függvény definíciója szerint $0 < a < 1$. Jólismert tétel szerint

$$(1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

Ezután megvizsgáljuk, hogy mi lenne a következménye annak, hogy ha $\sqrt[m]{N}$ előállítható lenne két pozitív egészszám p és q hányadosaként:

$$\sqrt[m]{N} = \frac{p}{q}.$$

A *binomiális tételt* fogjuk alkalmazni, amely szerint

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n,$$

ahol x és y valós számok, n pozitív egész szám és az

$$\binom{n}{0} := 1, \quad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ún. *binomiális együtthatók* mind pozitív egészszámok. Megemlítjük, hogy a binomiális együtthatókat lehet rekurzív módon az ún. Pascal háromszög elrendezésben is képezni, de erre nem térünk ki.

A binomiális tételt fogjuk alkalmazni a^n kifejtésére, ahol a -t (1.1)-ben definiáltuk, és a továbbiakban $\sqrt[m]{N}$ helyett a törtkitevős $N^{1/m}$ alakot használjuk, mivel az utóbbi alkalmasabb a hatványazonosságok alkalmazása szempontjából. Tehát

$$\begin{aligned}
 a^n &= (N^{1/m} - [N^{1/m}])^n = \\
 &= \binom{n}{0} (N^{1/m})^n + \binom{n}{1} (N^{1/m})^{n-1} [N^{1/m}] + \\
 (1.3) \quad &\binom{n}{2} (N^{1/m})^{n-2} ([N^{1/m}])^2 + \dots \\
 &\dots + \binom{n}{n-1} N^{1/m} ([N^{1/m}])^{n-1} + \binom{n}{n} ([N^{1/m}])^n.
 \end{aligned}$$

Ha n -et m -mel osztjuk, a hányadost q -val, a maradékot pedig r -rel jelöljük:

$$n = mq + r, \quad 0 \leq r < m,$$

ahol q és r nemnegatív egészszámok, akkor írhatjuk, hogy

$$(N^{1/m})^n = (N^{1/m})^{mq+r} = N^q (N^{1/m})^r.$$

Hasonló módon járunk el az $(N^{1/m})^{n-1}, (N^{1/m})^{n-2}, \dots$ hatványok esetében is. Ezen a módon olyan $N^{q_1} (N^{1/m})^{r_1}$ szorzatokhoz jutunk, amelyekben $0 \leq q_1 \leq q$ és $0 \leq r_1 < m$. Így (1.3)-at az

$$(1.4) \quad a^n = b_{n1} + b_{n2} N^{1/m} + b_{n3} (N^{1/m})^2 + \dots + b_{nm} (N^{1/m})^{m-1}$$

alakba írhatjuk át, ahol $b_{n1}, b_{n2}, b_{n3}, \dots, b_{nm}$ mindegyike egészszám.

Ha a tétel állításával ellentétben

$$N^{1/m} = \frac{p}{q}$$

lenne, ahol p és q pozitív egészszámok, akkor (1.4)-ből azt kapnánk, hogy

$$(1.5) \quad a^n = \frac{1}{q^{m-1}} (b_{n1} q^{m-1} + b_{n2} p q^{m-2} + b_{n3} p^2 q^{m-3} + \dots + b_{nm} p^{m-1}).$$

A jobb oldalon a kerek zárójelben levő összeg egészszám minden n -re. Mivel $a > 0$ és $q > 0$, ezért ez az összeg is pozitív minden n -re. Tekintve, hogy a legkisebb pozitív egészszám az 1 (egyes), így (1.5)-ből következik, hogy

$$a^n \geq \frac{1}{q^{m-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A most kapott egyenlőtlenség viszont ellentmond (1.2)-nek. Erre az ellentmondásra azért jutottunk, mivel abból a feltevésből indultunk ki, hogy $N^{1/m}$ előállítható két pozitív egészszám hányadosaként. Tehát ez a feltevés nem lehet igaz. Más szóval, $N^{1/m}$ nem lehet racionális szám, azaz $N^{1/m}$ irracionális szám.

2. Az e szám irracionális. Az elsőéves egyetemi Kalkulus előadásából ismert, hogy a *természetes alapú exponenciális függvény* e alapszámát a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

határértékkel definiáljuk. A "természetes" jelző használatát az indokolja, hogy csak az

$$f(x) = ce^x, \quad -\infty < x < \infty$$

alakú exponenciális függvények azok, amelyek minden x -re megegyeznek a deriváltjukkal:

$$f'(x) = (ce^x)' = ce^x = f(x),$$

ahol c tetszőleges állandó lehet. Az $y = e^x$ függvény inverze a *természetes alapú logaritmus függvény*: $x = \ln y$, $y > 0$, amelynek alapszáma szintén e , azaz $\ln y = \log_e y$.

Az $e = 2,718\dots$ szám, amely számos matematikai tételben és gyakorlati alkalmazásban (például a rádióaktív anyagok bomlását vagy baktériumtenyészetek növekedését leíró differenciálegyenletek megoldásában) alapvető szerepet játszik, szintén irracionális szám. Ezt bizonyítjuk a következő tételben.

2. Tétel. *Az e szám nem állítható elő két pozitív egészszám hányadosaként.*

Bizonyítás. A bizonyítás a Kalkulusból jólismert

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Taylor sorfejtésen alapul, amely sor tetszőleges x valós számra konvergál. Nekünk csak az $x = 1$ esetre lesz szükségünk:

$$(2.1) \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

ahol a pozitív egészszámokra értelmezett faktoriális függvény definíciója közismert:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A (2.1) jobb oldalán levő végtelen sor konvergenciáját az biztosítja, hogy a sor $\frac{1}{n!}$ általános tagja rendkívül gyorsan tart a zérushoz. Sőt még az ún. maradéksor

$$(2.2) \quad r_n := \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

összege is "majdnem olyan gyorsan" tart a zérushoz, mint $\frac{1}{n!}$. Az alábbi becslésben ismét a végtelen geometriai sor összegképletét használjuk fel:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} 0 < r_n &< \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \frac{n+1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ezen előzmények után, a tétel állításával ellentétben tegyük fel, hogy az e szám előállítható lenne két pozitív egészszám p és q hányadosaként:

$$e = \frac{p}{q}.$$

Helyettesítsük itt e helyébe a (2.1) képlet jobboldalát, szorozzunk át $q!$ -sal és csoportosítsunk:

$$\begin{aligned} (q-1)!p = q!e &= \left(q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!} \right) + \\ &+ \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \cdots \end{aligned}$$

Mivel mind a baloldal, mind a kerek zárójelben levő összeg tagjai a jobb oldalon egészs számok, ezért a jobb oldalon levő

$$\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \cdots = q!r_{q+1}$$

összegnek is pozitív egészs számnak kell lennie, ahol r_{q+1} -et a (2.2) képlettel definiáltuk. A (2.3) becslés szerint

$$(2.4) \quad 0 < q!r_{q+1} < \frac{q!}{(q+1)!} \frac{q+2}{q+1} = \frac{q+2}{(q+1)^2} < \frac{1}{q},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség annak következménye, hogy

$$(q+2)q = q^2 + 2q < q^2 + 2q + 1 = (q+1)^2.$$

Mivel q pozitív egészs szám, ezért $q \geq 1$. Ezt figyelembe véve, (2.4)-ből következik, hogy

$$0 < q!r_{q+1} < 1,$$

ami viszont lehetetlen, mivel fentebb már megállapítottuk, hogy $q!r_{q+1}$ pozitív egészs szám. Erre az ellentmondásra azért jutottunk, mivel abból a feltevésből indultunk ki, hogy az e szám előállítható két pozitív egészs szám hányadosaként. Ez a feltevés hamisnak bizonyult. Tehát e irracionális szám, amelynek 31 tizedesjegyre pontos értéke

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 7 \dots$$

3. A π szám irracionális. Már az általános iskolában is tanítják, hogy az r sugarú kör területét a $2r\pi$, a területét pedig az $r^2\pi$ képlettel számítjuk ki és π -re a 3,14 közelítő értéket használjuk. Ez a közelítés annak a több ezer évvel ezelőtti egyiptomi geometriai tudásnak felel meg, hogy

$$3,140845 \dots = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3,142857\ 142857 \dots$$

Az elsőéves egyetemi Kalkulus előadásából ismert, hogy az $\arctan x$ függvény

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Taylor sora a $-1 \leq x \leq 1$ értékekre konvergens. Az $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Az itt szereplő végtelen sor azonban olyan lassan konvergál, hogy π -nek ez az előállítása nem alkalmas sem π értékének numerikus kiszámítására, sem annak bizonyítására, hogy π irracionális szám.

Valamivel gyorsabb közelítést kaphatunk π -re, ha a

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi$$

Fourier sorra az ún. Parseval formulát alkalmazzuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

De π -nek ez az előállítása sem alkalmas a fejezet címében levő állítás bizonyítására. Az érdeklődő olvasó a Taylor és Fourier sorokra vonatkozó fentebbi állításoknak például Szász Pál könyvében tud utánanézni (lásd az 1. kötet 3. fejezetének első három részében, illetve a 2. kötet 7. fejezetének első részében).

A következőkben ismertetésre kerülő ötletes bizonyítás először G.H. Hardy és E.M. Wright könyvében jelent meg (lásd a 46-47. oldalakon). Mi ennek egy olyan módosítását mutatjuk be, amely jobban igazodik a Kalkulus magyarországi tanításához.

3. Tétel. *A π szám nem állítható elő két pozitív egészszám hányadosaként.*

Bizonyítás. A bizonyítás alapját két határozott integrál kiszámítása képezi. Elsőként az

$$(3.1) \quad I_n := \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{n!} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

integrált számítjuk ki n -szer ismételt parciális integrálással:

$$\begin{aligned}
 n!I_n &= \int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \\
 &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^n \right]_0^1 + \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1} dx = \\
 &= \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1} dx = \\
 &= \frac{n}{n+1} \left\{ \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}(1-x)^{n-1} \right]_0^1 + \frac{n-1}{n+2} \int_0^1 x^{n+2}(1-x)^{n-2} dx \right\} = \\
 &= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2}(1-x)^{n-2} dx = \dots \\
 &\dots = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \int_0^1 x^{n+k}(1-x)^{n-k} dx, \quad k = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

A $k = n$ választással (az n -edik lépésben) kapjuk, hogy

$$n!I_n = \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2)\dots (2n)} \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{n!}{(n+1)(n+2)\dots (2n+1)}.$$

Tehát

$$(3.2) \quad I_n := \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{n!} dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots (2n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ezután a

$$(3.3) \quad J_n := \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \sin \pi x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

integrált fogjuk vizsgálni, amelyben az integrandusz csak a $\sin \pi x$ tényezőben különbözik a (3.1)-beli integrandusztól. Célunk annak megmutatása, hogy

$$(3.4) \quad n!J_n = \frac{c_1}{\pi^{n+1}} + \frac{c_2}{\pi^{n+2}} + \dots + \frac{c_{n+1}}{\pi^{2n+1}},$$

ahol (és ez nagyon lényeges lesz majd számunkra) a $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ számlálók mindegyike egészszám.

Ezt bizonyítandó, meghatározzuk a

$$g_n(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

függvény $g_n^{(k)}(x)$ deriváltjainak az értékét az $x = 0$ és $x = 1$ pontokban, ahol $k = 0, 1, 2, \dots$ lehet. (A nulladik derivált megállapodás szerint maga a függvény: $g_n^{(0)}(x) := g_n(x)$.) A binomiális tétel szerint

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{x^n}{n!} \left\{ 1 - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \dots + (-1)^n x^n \right\} = \\ &= \frac{1}{n!} \left\{ x^n - \binom{n}{1}x^{n+1} + \binom{n}{2}x^{n+2} - \dots + (-1)^n x^{2n} \right\}. \end{aligned}$$

Ismételt differenciálással és az $x = 0$ helyettesítéssel egyből adódik, hogy

$$(3.5) \quad g_n^{(k)}(0) = 0, \quad \text{ha} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1; 2n+1, 2n+2, \dots;$$

míg a $k = n, n+1, \dots, 2n$ esetekben azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_n^{(n)}(0) &= \frac{1}{n!}n! = 1, \\ g_n^{(n+1)}(0) &= -\binom{n}{1}\frac{(n+1)!}{n!} = -\binom{n}{1}(n+1), \\ g_n^{(n+2)}(0) &= \binom{n}{2}\frac{(n+2)!}{n!} = \binom{n}{2}(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

és általában (a $k = n + (k - n)$ esetben):

$$g_n^{(k)}(0) = (-1)^{k-n} \binom{n}{k-n} \frac{k!}{n!} = (-1)^{k-n} \binom{n}{k-n} (n+1)(n+2) \dots k.$$

Innen jól látható, hogy $g_n^{(k)}(0)$ az $n \leq k \leq 2n$ esetekben is egészszám, amely azonban negatív is lehet.

Vegyük még azt is észre, hogy

$$g_n(x) = g_n(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

amiből következik, hogy

$$(3.6) \quad g_n^{(k)}(1) = (-1)^k g_n^{(k)}(0) \quad \text{minden } k \text{ - ra,}$$

speciálisan (3.5) szerint

$$(3.7) \quad g_n^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

A következőkben J_n -et n -szer parciálisan integráljuk. Először azt az esetet tekintjük, amikor n páratlan szám. Az írásmód egyszerűsítése végett a $g_n(x)$ függvény jelölésében elhagyjuk az n indexet. A kiintegrált részek (3.5) és (3.7) következtében eltűnnek:

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 g(x) \sin \pi x \, dx \\ &= \left[-g(x) \frac{\cos \pi x}{\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 g'(x) \frac{\cos \pi x}{\pi} \, dx = \\ &= \int_0^1 g'(x) \frac{\cos \pi x}{\pi} \, dx \\ &= \left[g'(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^2} \right]_0^1 - \int_0^1 g''(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^2} \, dx = \\ &= - \int_0^1 g''(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^2} \, dx = \\ &= \left[g''(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^3} \right]_0^1 - \int_0^1 g'''(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^3} \, dx = \\ &= - \int_0^1 g'''(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^3} \, dx = \dots = \pm \int_0^1 g^{(n)}(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^n} \, dx, \end{aligned}$$

ahol az utolsó integráljel előtt "+" jel áll, ha n -et 4-gyel osztva 1-et kapunk maradékul; "-" jel pedig akkor áll, ha n -et 4-gyel osztva 3-at kapunk maradékul.

Ha a fentebb kapott integrált tovább integráljuk parciálisan, akkor a kiintegrált részek már csak minden második lépésben tűnnek el, míg a közbeeső lépésekben (3.6)-ot kell alkalmaznunk:

$$\begin{aligned}
 \pm J_n &= \int_0^1 g^{(n)}(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^n} dx = \\
 &= \left[g^{(n)}(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^{n+1}} \right]_0^1 - \int_0^1 g^{(n+1)}(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^{n+1}} dx = \\
 &= - \int_0^1 g^{(n+1)}(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^{n+1}} dx = \\
 &= \left[g^{(n+1)}(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^{n+2}} \right]_0^1 - \int_0^1 g^{(n+2)}(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^{n+2}} dx = \\
 &= -2 \frac{g^{(n+1)}(0)}{\pi^{n+2}} - \int_0^1 g^{(n+2)}(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^{n+2}} dx = \\
 &= -2 \frac{g^{(n+1)}(0)}{\pi^{n+2}} - \left[g^{(n+2)}(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^{n+3}} \right]_0^1 + \int_0^1 g^{(n+3)}(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^{n+3}} dx = \\
 &= -2 \frac{g^{(n+1)}(0)}{\pi^{n+2}} + \int_0^1 g^{(n+3)}(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^{n+3}} dx = \\
 &= -2 \frac{g^{(n+1)}(0)}{\pi^{n+2}} - \left[g^{(n+3)}(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^{n+4}} \right]_0^1 + \int_0^1 g^{(n+4)}(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^{n+4}} dx = \\
 &= -2 \frac{g^{(n+1)}(0)}{\pi^{n+2}} + 2 \frac{g^{(n+3)}(0)}{\pi^{n+4}} + \int_0^1 g^{(n+4)}(x) \frac{\cos \pi x}{\pi^{n+4}} dx = \dots \\
 &\dots = -2 \frac{g^{(n+1)}(0)}{\pi^{n+2}} + 2 \frac{g^{(n+3)}(0)}{\pi^{n+4}} - \dots \pm 2 \frac{g^{(2n)}(0)}{\pi^{2n+1}}.
 \end{aligned}$$

Hasonló módon járunk el akkor is, amikor n páros szám. Ebben az esetben azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_0^1 g(x) \sin \pi x dx = \dots = \pm \int_0^1 g^{(n)}(x) \frac{\sin \pi x}{\pi^n} dx = \dots \\
 &\dots = \pm 2 \left\{ \frac{g^{(n)}(0)}{\pi^{n+1}} - \frac{g^{(n+2)}(0)}{\pi^{n+3}} + \dots \pm \frac{g^{(2n)}(0)}{\pi^{2n+1}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Összefoglalva, akár páratlan, akár páros az n , mindkét esetben a (3.4)-ben jelzett alakhoz jutunk, amelyben a $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ számlálók egészszámok, mivel

azt már korábban láttuk, hogy a $g^{(n)}(0), g^{(n+1)}(0), \dots, g^{(2n)}(0)$ derivált értékek mindegyike egészszám.

A parciális integrálás fenti kimerítő "ujjgyakorlatai" után minden készen áll arra, hogy a 3. Tételt elegánsan bizonyítsuk. A tétel állításával ellentétben tegyük fel, hogy π előállítható lenne két pozitív egészszám p és q hányadosaként:

$$\pi = \frac{p}{q}.$$

Megmutatjuk, hogy ez a feltevés ellentmondásra vezet. Ezen célból válasszuk az n egészszámot olyan nagyra, hogy fennálljon a

$$(3.8) \quad \frac{p^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)} < 1$$

egyenlőtlenség. Például az $n = p^2$ választás erre már megfelelő, hiszen

$$(p^2+1)(p^2+2)\dots(p^2+p^2+1) > (p^2)^{p^2+1} = p^{2(p^2+1)} > p^{2p^2+1}.$$

Egyrészt, (3.4)-ből következik, hogy

$$p^{2n+1}J_n = c_1p^nq^{n+1} + c_2p^{n-1}q^{n+2} + \dots + c_{n+1}q^{2n+1}$$

egészszám. Másrészt (3.2)-ből, (3.3)-ból és (3.8)-ból az következik, hogy

$$0 < p^{2n+1}J_n < p^{2n+1}I_n = \frac{p^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)} < 1,$$

ami ellentmondás, hiszen a $(0, 1)$ nyitott intervallumban nincs egészszám. Ez az ellentmondás megint annak a következménye, hogy π -t racionális számnak tételeztük fel. Tehát π irracionális szám, amelynek 31 tizedesjegyre pontos értéke

$$\pi = 3, 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 5\dots$$

4. További megjegyzések. Egy valós számot akkor nevezzük *algebrai számnak*, ha olyan

$$(4.1) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

algebrai egyenletnek gyöke, amelyben az $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ együtthatók mindegyike egészszám; itt az n fokszám tetszőleges természetes szám lehet.

A definícióból nyilvánvaló, hogy minden racionális szám egyúttal algebrai szám is, hiszen a $\frac{p}{q}$ racionális szám gyöke a

$$qx - p = 0$$

elsőfokú egyenletnek. De $\sqrt{2}$ is algebrai szám, mivel az

$$x^2 - 2 = 0$$

másodfokú egyenletnek gyöke; és természetesen $-\sqrt{2}$ is algebrai szám.

Ha a (4.1) egyenletben a *főegyüttható* $a_n = 1$, akkor ezen egyenlet gyökeit *algebrai egészszámoknak* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy minden egészszám algebrai egészszám is. Sőt $\pm\sqrt{2}$ is algebrai egészszámok. Továbbá az ún. aranymetszés problémájában szerepet játszó

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618\dots \quad \text{és} \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,382\dots$$

irracionális számok is algebrai egészszámok, mivel az

$$x^2 + x - 1 = 0, \quad \text{illetve} \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

másodfokú egyenletek gyökei. Viszont

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

már nem algebrai egészszámok (bár algebrai számok), mivel a

$$2x^2 - 1 = 0, \quad \text{illetve} \quad 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

másodfokú algebrai egyenletek gyökei.

Azokat a valós számokat, amelyek nem algebrai számok, *transzcendens számoknak* nevezzük. Másszóval, egy transzcendens szám egyetlen egész együttthatójú algebrai egyenletnek sem gyöke.

Már a 18. század végén felmerült az a sejtés, hogy az e és π számok transzcendensek. Lindemann német matematikusnak sikerült ezt a sejtést 1882-ben először bizonyítania. Az érdeklődő olvasó Szőkefalvi-Nagy Gyula könyvében találhatja meg a bizonyítást magyar nyelven (lásd a 137-142. oldalakon).

Az alábbi halmazelméleti megfontolásból kiderül, hogy végtelen sok transzcendens szám van. Sőt, a transzcendens számok halmazának számossága nagyobb, mint az algebrai számok halmazának számossága.

Definíció szerint egy végtelen elemű halmazt akkor nevezünk *megszámlálhatóan végtelen számosságúnak*, ha az adott halmaz elemeit sorozatba lehet rendezni, azaz ha az adott halmaz elemei egy-egyértelmű módon le tudjuk képezni a természetes számok $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ halmazára. Jól ismert, hogy a racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú, míg a valós számok halmaza nem megszámlálhatóan végtelen számosságú ("több annál"). Azt is mondhatjuk, hogy több irracionális szám van, mint racionális szám.

Kihasználva azt a jólismert tényt, hogy ha a $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ halmazok mindegyike megszámlálhatóan végtelen számosságú, akkor ezek $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ egyesítése is megszámlálhatóan végtelen számosságú, egyszerűen belátható, hogy az algebrai számok halmaza is megszámlálhatóan végtelen számosságú. Ebből viszont az következik, hogy a transzcendens számok halmaza nem lehet megszámlálhatóan végtelen számosságú. Valójában, a transzcendens számok halmazának számossága megegyezik a valós számok halmazának számosságával.

Irodalom

- [1] G.H. Hardy–E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers, 3rd edition, Clarendon Press, Oxford, 1954.
- [2] Szász Pál, A differenciál- és integrálszámítás elemei, Typotex Kiadó, Budapest, 2001.
- [3] Szőkefalvi-Nagy Gyula, A geometriai szerkesztések elmélete, 2. bővített és átdolgozott kiadás, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

Kiegészítő megjegyzés. A további részletek iránt érdeklődő olvasónak ajánljuk még az alábbi két tudományos cikket, amelyre Dr. Pintér Lajos egyetemi docens hívta fel a figyelmünket:

- [4] I. Niven, A simple proof that π is irrational, Bull. Amer. Math. Soc., 53(1947), 509.
- [5] A.E. Parks, π , e , and other irrational numbers, Amer. Math. Monthly, 93(1986), 722-723.

Az utóbbi cikk szerzője Niven módszerét használva a következő lényegesen általánosabb tételt bizonyítja be:

- (a) Ha $\cos r$ és $\sin r$ mindketten racionális számok valamely radiánban mért r nagyságú szögre és $0 < |r| \leq \pi$, akkor r irracionális szám.
- (b) Ha $r \neq 1$ pozitív racionális szám, akkor $\ln r$ irracionális.

Vegyük észre, hogy az (a) állításból egyből következik, hogy π irracionális szám, mivel $\cos \pi = -1$ és $\sin \pi = 0$. A (b) állításból szintén egyből következik, hogy e irracionális szám. Ugyanis, ha azt tesszük fel, hogy e racionális szám, akkor a $\ln e = 1$ számnak irracionálisnak kellene lennie, ami ellentmondás.

*Móricz Ferenc, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
moricz@math.u-szeged.hu*

