

Az ötödfokú egyenlet megoldása

LÓCZI LAJOS

Az egyváltozós $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ polinomegyenletek megoldásainak keresése évszázadokon át az érdeklődés középpontjában állt.

Az első- és másodfokú egyenletek megoldóképleteivel mindannyian magunk is találkoztunk, ám már a középkor óta ismeretesek a harmad-, valamint a negyedfokú egyenletek megoldási módszerei is. Szerkezetüket tekintve ezek a képletek mind *algebrai megoldóképletek*, vagyis az egyenletek megoldásait az egyenlet együtthatóival fejezik ki a négy alapművelet és gyökvonások *véges sokszori* alkalmazásával. A kezdeti sikereken felbuzdulva eleinte tévesen azt gondolták, hogy előbb-utóbb minden polinomegyenletnek meg fogják találni az algebrai megoldóképletét. (Minden bizonnyal erre vezethető vissza, hogy az „egyenlet megoldása” és az „egyenlet gyöke” kifejezéseket ma is egymás szinonimájaként használjuk.)

Az 1800-as évek kezdetétől aztán nagy hatású algebrai elméletek születtek. A *Ruffini-Abel-tétel* szerint az *általános* ötöd- és magasabbfokú egyenletek algebrai megoldóképlettel nem oldhatók meg. (Az „általános” jelző itt arra utal, hogy bizonyos *speciális* esetekben persze lehetnek (és vannak is) algebrai megoldóképletek.) A *csoportelmélet* és a *Galois-elmélet* létrejötte óta az is pontosan eldönthető, hogy egy konkrét n -edfokú polinomegyenlet megoldható-e algebrai megoldóképlettel vagy sem. Az 1990-es években pedig sikerült megtalálni a konkrét algebrai megoldóképleteket (lásd pl. [1] és [2]) mindazokban a speciális esetekben, amikor a *racionális együtthatós* ötödfokú egyenlet ilyen képletekkel egyáltalán megoldható.

Természetes módon felmerül a kérdés, hogy mi mondható az egyéb, nem-algebrai megoldóképletekről. A megoldások *létezése* és a megoldások száma jól ismert: az algebra alaptétele kimondja, hogy a *komplex* számok körében egy n -edfokú polinomegyenletnek pontosan n darab megoldása van (feltéve, hogy az esetlegesen egybeeső, többszörös gyököket megfelelő számban tekintjük). E tétel a fenti formájában azonban csak egy *egzisztenciátétel*: a megoldások létét garantálja ugyan, de nem ad útmutatást ezek megkereséséhez. Az előzőeket is figyelembe véve tehát úgy fogalmazhatunk, hogy a komplex számkörben a polinomegyenletek megoldásai minden $n \in \mathbb{N}$ esetén léteznek, ám $n \geq 5$ esetén a megoldások véges sok alpművelettel és gyökvonással általában nem írhatók fel.

Az 1800-as évek második felében számos matematikus munkája nyomán lényeges előrehaladás történt a polinomegyenletek nem-algebrai megoldóképleteinek felderítésében [3]. Kiderült, hogy az analízis eszközeivel – tehát a határérték, a deriválás és az integrálás segítségével – *analitikus megoldóképletek* nyerhetők. (Az analitikus megoldóképletek mindegyike a határérték fogalmára épül, tehát e megoldóképletekben – *véges sok* helyett – megengedjük *végtelen sok* művelet elvégzését.)

Az ötödfokú egyenlet megoldására például az idők folyamán többféle analitikus megoldóképletet is kifejlesztettek [4]. Ezek közé tartoznak például a különféle iterációs módszerek, a ϑ -függvények (olv.: „theta-függvények”) segítségével történő megoldás, a Klein-féle ikozaéder-egyenleten alapuló megközelítés [5], vagy a megoldás előállítása hipergeometrikus sorok segítségével.

Mindazonáltal fontos szem előtt tartanunk, hogy akár az algebrai-, akár az analitikus megoldóképletek jelentősége ma már inkább csak elvi – gyakorlati hasznuk csekély, hiszen már a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldóképletei is túl bonyolultak ahhoz, hogy belőlük közvetlenül konkrét információt olvassunk ki a megoldásokkal kapcsolatban. A „gyakorlati” problémák főleg olyan kérdések megválaszolását igénylik, mint például a legnagyobb abszolút értékű megoldás meghatározása, a megoldások előjelének vizsgálata, vagy a megoldások komplex számsíkon való elhelyezkedésének jellemzése, illetve adott pontosságú közelítése. A numerikus matematika keretein belül a közelítő módszerek használatával mód nyílik az ilyen kérdések hatékony és praktikus megválaszolására – bármiféle megoldóképlet felírása nélkül. Mindezen algoritmusok tárházát pedig a számítógépes matematikai programcsomagok megjelenése mindenki számára elérhető közelségbe hozta.

E bevezető után cikkünk három fő részre tagolható. Először a teljesség kedvéért röviden áttekintjük a harmad- és negyedfokú egyenletek algebrai megoldóképleteit (a képletek levezetését persze nem tárgyalva), majd rátérünk az ötödfokú egyenlet megoldására – az egyszerűsített ötödfokú egyenlet egyik megoldását fogjuk felírni *hipergeometrikus sor* segítségével. A levezetés fő segédeszköze a *Lagrange-féle inverziós képlet* [6] lesz. Végül – hogy jobban megvilágítsuk a Lagrange-képlet lényegét és erejét – az inverziós képletet először egy jól ismert szituációban alkalmazzuk: a másodfokú egyenlet megoldását állítjuk vele elő, majd pedig megkeressük az $x^m - x + t = 0$ m -edfokú egyenlet egyik megoldását is.

A cikkben szokás szerint $n \in \mathbb{N}$ esetén $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ jelöli n faktoriálisát (megállapodás szerint $0! = 1$), míg $\binom{n}{k}$ jelenti az $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ *binomiális együtthatót* nemnegatív egész $0 \leq k \leq n$ számok esetén. A cikkben $\imath$ jelöli a *komplex képzetes egységet*, melyre tehát $\imath^2 = -1$ teljesül.

A szereplő egyenletekről nyilván mindig feltehető, hogy $a_n = 1$, hiszen az eredeti egyenlet mindig ilyen alakra hozható, ha a nemnulla a_n főegyütthatójával

végigosztjuk.

1. A harmad- és negyedfokú egyenletek algebrai megoldóképletei

Az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ általános harmadfokú egyenlet megoldása alkalmas új változók bevezetésével visszavezethető egy másodfokú egyenlet (az ún. *másodfokú rezolvens*) megoldására. Nem túl bonyolult, de azért ötleteket igénylő számolások után végeredményül a fenti harmadfokú egyenlet három megoldására ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a}{3} - \frac{\sqrt[3]{2U}}{3W} + \frac{W}{3\sqrt[3]{2}}, \\ x_2 &= -\frac{a}{3} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2U}}{3W} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{W}{3\sqrt[3]{2}}, \\ x_3 &= -\frac{a}{3} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2U}}{3W} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{W}{3\sqrt[3]{2}}, \end{aligned}$$

ahol

$$U = -a^2 + 3b,$$

$$V = -2a^3 + 9ab - 27c,$$

$$W = \sqrt[3]{V + \sqrt{4U^3 + V^2}}.$$

Megjegyzés. A fenti, $x_{1,2,3}$ -ra vonatkozó, általános képletek $W = 0$ esetén nem használhatók (hiszen ekkor nullával osztás lépne fel), könnyen megállapítható azonban, hogy ez a probléma csak $b = \frac{a^2}{3}$ esetén jelentkezik. Külön megvizsgálva ezután az $x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x + c = 0$ egyenletet, ennek három megoldására az alábbi egyszerűbb formulákat kapjuk:

$$-\frac{a}{3} + \frac{\sqrt[3]{S}}{3}, \quad \text{illetve} \quad -\frac{a}{3} - \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{S}}{3},$$

ahol $S = a^3 - 27c$.

Szintén dióhéjban vegyük most szemügyre az *általános*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

negyedfokú egyenlet megoldóképletét. Az alapgondolat itt is ugyanaz, mint előbb: ügyes helyettesítések alkalmazásával az egyenlet megoldása visszavezethető egy harmadfokú egyenlet (a *harmadfokú rezolvens*) megoldására, a számítások – és a végeredmény – azonban már jóval bonyolultabb, mint az általános harmadfokú egyenlet esetén. Az általános negyedfokú egyenlet négy megoldása az alábbi formula:

$$x_{1,2,3,4} = -\frac{a}{4} \pm \frac{F}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-2C - F^2 \mp \frac{2D}{F}},$$

ahol

$$\begin{aligned}
 A &= b^2 - 3ac + 12d, \\
 B &= 2b^3 - 9abc - 72bd + 27c^2 + 27a^2d, \\
 C &= -\frac{3}{8}a^2 + b, \\
 D &= \frac{1}{8}(a^3 - 4ab + 8c), \\
 E &= \sqrt[3]{B + \sqrt{-4A^3 + B^2}}, \\
 F &= \sqrt{-\frac{2}{3}C + \frac{\sqrt[3]{2}A}{3E} + \frac{E}{3\sqrt[3]{2}}}.
 \end{aligned}$$

A képletben három helyen szereplő kettős előjelek közül az első és a harmadik tartozik össze, a második pedig tőlük függetlenül választható meg – tehát a kérdéses helyeken az előjelek sorrendje $(+, +, -)$, $(+, -, -)$, $(-, +, +)$ vagy $(-, -, +)$ lehet.

A fenti A, B, C, D, E, F rövidítésekkel könnyen át tudjuk tekinteni a megoldóképlet szerkezetét, próbáljuk azonban elképzelni, mekkora helyet foglalna el a képlet ezen rövidítések nélkül, azaz ha $x_{1,2,3,4}$ képletét pusztán az a, b, c, d együtthatókkal íránk fel!

Megjegyzés. Az $x_{1,2,3,4}$ -ra vonatkozó képletben ismét előfordulhatnak bizonyos paraméterkombinációk, amikor nullával osztás lépne fel. Ez akkor következik be, ha $E = 0$ vagy $F = 0$. Ilyenkor a megadott megoldóképlet helyett más, valamivel egyszerűbb képletek alkalmazhatók – ezekkel azonban most nem foglalkozunk.

2. Az ötödfokú egyenlet egyszerűsített alakja

Adott a, b, c, d, e (komplex) számok esetén tekintsük az

$$(1) \quad x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

általános ötödfokú egyenletet. Az egyenlet megoldási módszere egyszerűsödni fog, ha az egyenletet sikerül valamilyen értelemben egyszerűbb alakban felírni.

Több matematikus kitartó munkája nyomán kiderült, hogy ebből az 5 paramétert tartalmazó egyenletből különféle ötletes helyettesítések és új változók bevezetésével a negyed-, harmad-, sőt másodfokú tagok *egyszerre kiküszöbölhetők*, amivel elérhető, hogy az egyenlet az alábbi egyszerű alakot öltse:

$$(2) \quad x^5 - x + t = 0,$$

ahol a t (komplex) szám az eredeti (1) egyenlet a, b, c, d, e együtthatóiból véges sok alpművelet és gyökvonás segítségével fejezhető ki. A két egyenlet közötti átmenetet a *Tschirnhaus–Bring–Jerrard* transzformáció [7] biztosítja. Keményen meg

kell azonban dolgozni azért, hogy az (1) egyenletet az egyszerű (2) alakra hozzasuk: a Tschirnhaus-transzformáció során *többek között* egy negyedfokú egyenletet kell megoldani – nem meglepő tehát, hogy *tucatnyi* oldalra rúg a t paramétert az eredeti a, b, c, d, e együtthatókkal kifejező képlet [8].

Elvileg elegendő tehát a (2)-típusú, *egyszerűsített ötödfokú* egyenletekre szorítkoznunk, illetve ezek megoldásait ismernünk, mert ezekből a Tschirnhaus-transzformáció fordítottjával (inverzével) az eredeti (1) egyenlet megoldásai már előállíthatók.

A továbbiakban a (2) egyenlet egyik megoldását fogjuk megadni egy nagyon egyszerű képlet formájában. (A többi megoldás természetesen ebből már meghatározható, hiszen tudjuk, hogy egy egyenlet valamely α megoldásának ismeretében az egyenletből az $(x - \alpha)$ tényező kiemelhető, ami után egy eggyel alacsonyabb fokú egyenlet marad vissza. Jelen esetben a visszamaradó egyenlet negyedfokú, s így algebrai megoldóképlettel is kezelhető.)

3. A Lagrange-féle inverziós képlet és az ötödfokú egyenlet analitikus megoldása hipergeometrikus sorral

Ismerkedjünk meg először röviden egy fontos és sok helyen jól használható segédeszközzel.

Jelöljön φ egy adott függvényt, melyre $\varphi(0) = 1$, és tekintsük az alábbi egyenletet

$$(3) \quad u(t) = t \cdot \varphi(u(t)).$$

Azt szeretnénk megtudni, hogy van-e olyan, és ha igen, melyik az az u függvény, amely a fenti egyenletet teljesíti a t változó tetszőleges megválasztása mellett. (A (3) egyenlet tehát egy *függvényegyenlet*: az ismeretlen mennyiség ugyanis maga az u függvény, melynek változója t .)

A *Lagrange-féle inverziós képlet* azt állítja, hogy ha az adott φ függvény *analitikus* (vagyis bizonyos végtelen összeg alakjában előállítható), akkor a (3) egyenletnek létezik pontosan egy u analitikus megoldása, amelyet az alábbi végtelen összeg ad meg:

$$(4) \quad u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi^n)^{(n-1)}(0)}{n!} t^n,$$

ahol a számlálóban a φ függvény n -edik hatványa $(n-1)$ -edik deriváltjának 0-beli értéke áll. A (4) képlet első néhány tagja részletesen kiírva tehát így fest (a felső vessző szokás szerint szintén a deriválást jelenti):

$$u(t) = \varphi(0)t + \frac{(\varphi^2)'(0)}{2}t^2 + \frac{(\varphi^3)''(0)}{6}t^3 + \frac{(\varphi^4)'''(0)}{24}t^4 + \frac{(\varphi^5)''''(0)}{120}t^5 + \dots$$

A Lagrange-inverziós képlet birtokában térjünk most vissza az egyszerűsített ötödfokú egyenlethez. A t paraméter nagyságára tett megszorítás mellett fel fogjuk írni (2) egyik megoldását.

A (2) egyenlet nyilván könnyen megoldható, ha $t = 0$. Ha viszont $t \neq 0$, akkor (2) átírható, mint

$$x = t \cdot \varphi(x),$$

ahol

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 - x^4}.$$

Ha itt x -re úgy tekintünk, mint a t együttható függvényére, akkor $x \equiv x(t)$ játssza az ismeretlen $u \equiv u(t)$ függvény szerepét a (3) Lagrange-féle képletben.

A képlet alkalmazásához induljunk ki az $|x| < 1$ esetén érvényes mértani sor

$$\frac{1}{1 - x^4} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}$$

összegképletéből, amelyből bebizonyítható, hogy $|x| < 1$ mellett

$$\varphi^n(x) = \left(\frac{1}{1 - x^4} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{k} x^{4k}.$$

(Megjegyezzük, hogy a fenti végtelen összegben az x -hatványok együtthatója éppen az n elem k -ad osztályú *ismétléses kombinációja*.) E képlet $(n-1)$ -szeri deriválásával viszont az adódik, hogy ha $n = 4k + 1$ alakú természetes szám, akkor

$$\begin{aligned} \frac{(\varphi^n)^{(n-1)}(0)}{n!} &= (4k)! \binom{4k+1-1+k}{k} \frac{1}{(4k+1)!} \\ &= (4k)! \binom{5k}{k} \frac{1}{(4k+1)!} = \binom{5k}{k} \frac{1}{4k+1}, \end{aligned}$$

míg ha n 4-gyel maradékosan osztva nem 1 maradékot ad, akkor

$$\frac{(\varphi^n)^{(n-1)}(0)}{n!} = 0.$$

Helyettesítsük most be ezeket a mennyiségeket a (4) Lagrange-képletbe.

Az $x^5 - x + t = 0$ *egyszerűsített ötödfokú egyenlet* egyik x megoldására t -függvényében az alábbi, figyelemre méltóan egyszerű *megoldóképletet* nyertük:

$$(5) \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5k}{k} \frac{t^{4k+1}}{4k+1}.$$

A binomiális együtthatók kiszámolása után a végtelen összeg első néhány tagja részletesen kiírva így fest

$$x(t) = t + t^5 + 5t^9 + 35t^{13} + 285t^{17} + 2530t^{21} + 23751t^{25} + 231880t^{29} + \dots$$

Két egyszerű példát követően ennek a megoldóképletnek néhány tulajdonságával foglalkozunk a továbbiakban.

1. példa. Az $x^5 - x + \frac{1}{2} = 0$ egyenlet egyik megoldására

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5k}{k} \frac{1}{(4k+1) \cdot 2^{4k+1}} \approx 0,550607$$

adódik. A többi 4 megoldás egyébként $x_2 \approx 0,7691$, $x_3 \approx -1,09833$ és $x_{4,5} \approx -0,110687 \pm 1,0309i$. Megjegyezzük, hogy az iménti végtelen összeg első 35 tagját összeadva a

$$\frac{95929182099087523761435658184061314775069}{174224571863520493293247799005065324265472} \approx 0,550607$$

értéket kapjuk.

2. példa. Az $x^5 - x + 1 = 0$ egyenletre alkalmazva az (5) képletet szomorúan tapasztaljuk, hogy az nem ad véges értéket (noha az egyenletnek mind az öt gyöke 2-nél kisebb abszolút értékű).

4. Az ötödfokú egyenlet megoldóképletének vizsgálata

Az (5) megoldóképlet a $c_k := \binom{5k}{k} \frac{t^{4k+1}}{4k+1}$ jelöléssel röviden $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ alakban írható. Ebből $t \neq 0$ esetén némi egyszerűsítés után látható, hogy

$$(6) \quad \frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{5(1+5k)(2+5k)(3+5k)(4+5k)t^4}{8(1+k)(1+2k)(3+4k)(5+4k)}.$$

Ez a kifejezés a k változó két polinomjának hányadosa, ezt más szavakkal úgy mondjuk, hogy k -nak *racionális törtfüggvénye*. Az olyan $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ végtelen összegeket, melyekre igaz, hogy a $\frac{c_{k+1}}{c_k}$ hányados k -nak racionális törtfüggvénye, *hipergeometrikus soroknak* nevezzük. A hipergeometrikus sorok tehát a közönséges mértani sorok általánosításai, és az analízisben fontos szerepet játszanak, mert velük sok (algebrai- és differenciál-) egyenlet megoldása kifejezhető.

A $\frac{c_{k+1}}{c_k}$ hányados megadása azért sem volt haszontalan, mert segítségével megválaszolhatjuk azt a kérdést, hogy az (5) megoldóképlet mely t számokra ad véges

értéket, azaz mi $x(t)$ értelmezési tartománya. A $\frac{c_{k+1}}{c_k}$ határértékét (6) alapján kiszámolva

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{5^5 t^4}{4^4}$$

adódik, amiből a hányados-kritérium és a Raabe-kritérium alapján azt kapjuk, hogy az egyszerűsített ötödfokú egyenlet általunk megadott (5) megoldóképlete pontosan $\frac{5^5 t^4}{4^4} \leq 1$, vagyis $|t| \leq \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ esetén értelmezhető. Ha $|t| > \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$, akkor a megoldóképlet nem ad véges értéket. (Persze az egyszerűsített egyenletnek ezen (komplex) t számok esetén is létezik megoldása – a fentiek csupán azt jelentik, hogy megoldóképletünk *nem alkalmas* a megoldás megkeresésére a $|t| > \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ esetben.)

Az értelmezési tartomány tisztázása után felmerülhet bennünk a kérdés, hogy $|t| \leq \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ esetén a megoldóképlet az egyszerűsített ötödfokú egyenlet 5 lehetséges megoldása közül éppen melyiket fogja megadni. Ennek eldöntéséhez hívjuk segítségül a számítógépet: jól alkalmazható eszköz például a [9] cikk 20. példájában kidolgozott `komplexyokrajzolo` *Mathematica*-parancs [10], ami egy n -edfokú polinom n darab megoldását ábrázolja a komplex számsíkon:

```
komplexyokrajzolo[polinom_] :=
  ListPlot[Cases[NSolve[polinom==0][[All,1,2]]],
    z:(_Complex|_Real) -> {Re[z],Im[z]}], PlotStyle->PointSize[0.03]]
```

Ennek segítségével az alább következő 1. Ábrán szisztematikusan felrajzoljuk jó néhány ötödfokú egyenlet megoldásait. (A részabrák számozása balról jobbra, illetve fentről lefelé növekszik.) Mivel egy ötödfokú egyenletnek 5 megoldása van a komplex számok körében, az ábrákon egy-egy pont-ötös tartozik minden ötödfokú egyenlethez.

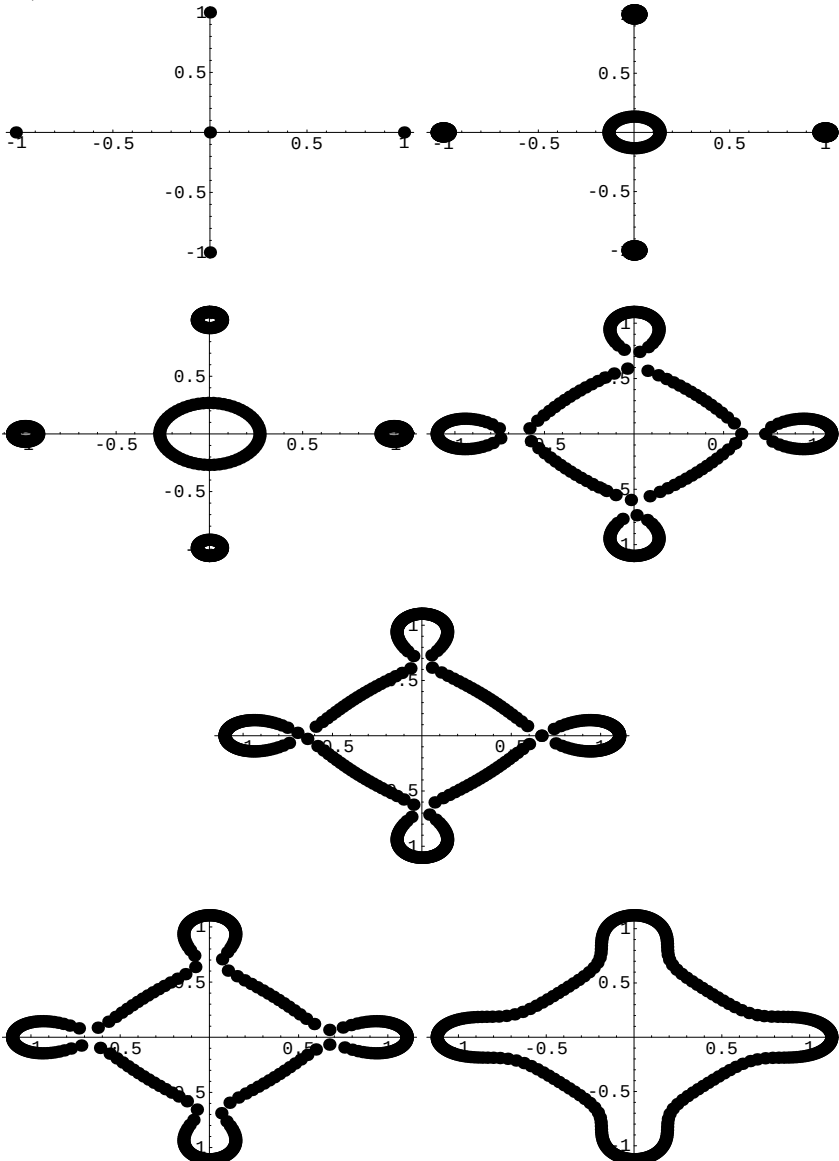
Az első ábra az $x^5 - x + 0$ egyenlet megoldásait tünteti fel (amelyek nyilván a 0, 1, i , -1 és $-i$ számok).

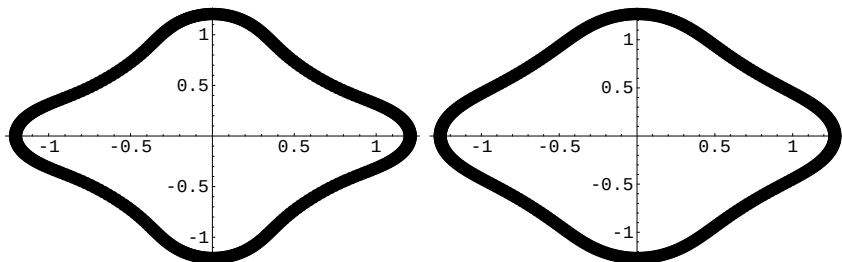
A második ábrán azon $x^5 - x + t$ ötödfokú egyenletek megoldásainak összességét ábrázoltuk, amelyeknél a t paraméter bizonyos lépésközzel befutja az $\frac{1}{5\sqrt[4]{5}}$ -sugarú, origó középpontú körvonalat a komplex számsíkon. (Ezt gyakorlatilag úgy valósítottuk meg, hogy t helyett az $e^{is} \frac{1}{5\sqrt[4]{5}}$ paraméterezést írtuk a polinomba, illetve a `komplexyokrajzolo` parancsba, amint s $\frac{1}{10}$ -es lépésközökkel befutja a $[0, 2\pi]$ intervallumot – lásd a megadott programkódot alább. Itt e természetesen a természetes alapú logaritmus alapszámát jelenti.)

Az ezután következő ábrákon azon ötödfokú egyenletek megoldásseregét ábrázoltuk, amelyekben $|t| = \frac{r}{5\sqrt[4]{5}}$, és rendre $r = 2, r = 3, 9, r = 4, r = 4, 1, r = 5, r = 10$, illetve $r = 15$. Az utolsó részábra *Mathematica*-kódja például egyszerűen


```
Show[Table[komplexyokrajzolo[x5-x+eIs51545],{s,0,2π,0.1}]]
```

Az ábrák tehát összesen több mint 500 darab ötödfokú egyenlet megoldásait tüntetik fel. (Az ábrák elkészítése a *Mathematica*-nak mindössze néhány másodpercig tartott.)





1. ábra. A komplex számsíkon különböző t paraméterértékek mellett ábrázoltuk az $x^5 - x + t = 0$ egyenlet megoldásait.

Az ábrák tanulmányozásából kitűnik, hogy az (5) megoldóképlet $|t| \leq \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ esetén az egyszerűsített ötödfokú egyenlet *legkisebb abszolút értékű* megoldását szolgáltatja. A legkisebb abszolút értékű megoldások összessége az első 5 ábrán mint „belső” alakzat látszik.

Az is kiolvasható továbbá a középső ábrából (amely a $|t| = \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ kritikus értékhez tartozó egyenletek megoldásainak összességét tünteti fel), valamint a *Mathematica* által szolgáltatott adatokból, hogy amikor $t = \pm \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ vagy $t = \pm \frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$, akkor az $x^5 - x + t = 0$ egyenlet legkisebb abszolút értékű megoldása a hozzá legközelebbi megoldással kétszeres gyökké olvad össze, amit az ábrán úgy érzékelünk, hogy a belső alakzat találkozik a 4 külső alakzattal. (Az összeolvadáskor egyébként az összeolvadó gyökök algebrai megoldóképlettel pontosan meghatározhatók: a többszörös gyökök értékei a $t = \pm \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ vagy $t = \pm \frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$ paraméterértékek mellett rendre $x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$, illetve $x = \pm \frac{i}{\sqrt[4]{5}}$.)

A kritikus $|t|$ paraméterértéken túl, vagyis közvetlenül az öt alakzat egybeolvadása után válik az általunk megadott (5) megoldóképlet alkalmatlanná az egyszerűsített ötödfokú egyenlet megoldására. (Természetesen az ábrák elkészítéséhez használt `NSolve` *Mathematica*-parancs minden további nélkül jól teljesít ezekben az esetekben is. Az `NSolve` a Jenkins-Traub algoritmus alapján közelíti (a felhasználó által igényelt pontossággal) az egyváltozós polinomegyenletek megoldásait. Az algoritmusról és matematikai háttéréről részletesen olvashatunk a [11] webcímen fellelhető további hivatkozásokban. Az `NSolve` parancs kifinomultságát mutatja, hogy csak a ritkamátrixú lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldásának programkódja több 250 oldalnál.)

5. A Lagrange-inverziós képlet és a másodfokú egyenlet megoldása. Általánosítás m -edfokú egyenletre.

A (4) Lagrange-inverziós képlet nyilván nem csak az ötödfokú egyenlet megoldására használható. Ennek illusztrálására vegyük szemügyre, hogyan alkalmazható Lagrange módszere az

$$(7) \quad x^2 - x + t = 0$$

másodfokú egyenlet megoldására, ahol t adott paraméter. Figyeljük meg, hogy ha a $p = 0$ triviális esetet kizárjuk, akkor a szokásos $x^2 + px + q = 0$ alaknál semmivel sem speciálisabb a (7) alak, abban az értelemben, hogy az általános másodfokú egyenlet megoldása visszavezethető az $x^2 - x + t = 0$ alakú egyenlet megoldására, mert a $t = \frac{q}{p^2}$ választás mellett ez utóbbi egyenlet megoldásainak $(-p)$ -szerese éppen $x^2 + px + q = 0$ megoldásait adja. Ugyanazt látjuk tehát, mint amit a Tschirnhaus-transzformációnál láttunk, amikor az (1) általános alakú egyenlet megoldását visszavezettük a (2) speciális alakú egyenlet megoldására.

Tegyük fel, hogy $t \neq 0$ (különben a megoldás nyilvánvaló). Ekkor a $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ választással a (3) egyenlet és a megoldandó $x^2 - x + t = 0$ egyenlet egyenértékű, ha x -et a t paraméter függvényének tekintjük, és persze $u(t) \equiv x(t)$.

Innen az előzőekhez hasonlóan eljárva belátható (a számolások ellenőrzését az érdeklődő Olvasóra bizzuk), hogy a (4) képlet az alábbi alakot ölti:

$$(8) \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{t^{k+1}}{k+1} = t + t^2 + 2t^3 + 5t^4 + 14t^5 + 42t^6 + 132t^7 + \\ + 429t^8 + 1430t^9 + 4862t^{10} + \dots,$$

amely $x \equiv x(t)$ szám tehát az $x^2 - x + t = 0$ egyenlet egyik megoldása.

A (8) képletről megmutatható, hogy $|t| \leq \frac{1}{4}$ esetén ad véges értéket. A binomiális sorfejtésre vonatkozó tétel felhasználásával viszont ellenőrizhető, hogy $|t| \leq \frac{1}{4}$ mellett

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{t^{k+1}}{k+1} = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2}.$$

Ez utóbbi alak pedig – legalábbis $|t| \leq \frac{1}{4}$ esetén – nem más, mint az $x^2 - x + t = 0$ egyenlet egyik megoldása, amint azt a szokásos másodfokú egyenlet megoldóképlete mutatja.

Végül a (8) képletet összevetve az (5) képlettel gyönyörű analógiára lelhetünk, és megsejthetjük (sőt, be is bizonyíthatjuk), hogy tetszőleges, rögzített $m > 1$ pozitív egész esetén az $x^m - x + t = 0$ egyenlet egyik megoldása előállítható

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{mk}{k} \frac{t^{(m-1)k+1}}{(m-1)k+1}$$

alakban. Figyeljük meg, hogy az egyenlet fokszámának változása ellenére mennyire egységesek és egyszerűek ezek a megoldóképletek – összevetve őket például a harmad- és negyedfokú egyenletek szokásos algebrai megoldóképleteinek rohamosan bonyolódó szerkezetével. Sőt, tovább menve, az összefüggések igazi szépségét az mutatja, hogy a legutolsó képletben (a binomiális együtthatók értelmezési tartományát megfelelően kiterjesztve) az $m > 1$ számnak nem is kell egésznek lennie: a képlet *valós* $m > 1$ esetén is megadja az $x^m - x + t = 0$ *transzcendens egyenlet* egyik megoldását.

Hivatkozások

- [1] D. S. Dummit, *Solving Solvable Quintics*, Math. Comput. 57, 387-401, 1991.
- [2] B. K. Spearman, K. S. Williams, *Characterization of Solvable Quintics* $x^5 + ax + b$, Amer. Math. Monthly 101, 986-992, 1994.
- [3] Wolfram Research, *A Short History From the Quintic Poster*, Champaign, IL, Wolfram Research, 1995.
<http://library.wolfram.com/examples/quintic/timeline.html>
- [4] Wolfram Research, *Solving the Quintic Poster*, Champaign, IL, Wolfram Research, 1995.
<http://library.wolfram.com/examples/quintic/>
- [5] J. Shurman, *Geometry of the Quintic*, New York, Wiley, 1997.
- [6] H. S. Wilf, *generatingfunctionology*, Academic Press, Inc., 1994. A könyv szabadon letölthető a
<http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html> webcímről.
- [7] <http://www.mathworld.com/QuinticEquation.html>
- [8] R. J. Drociuk, *On the Complete Solution to the Most General Fifth Degree Polynomial*, 3 May 2000.
<http://arxiv.org/abs/math.GM/0005026/>
- [9] Lóczy Lajos, *Mathematica*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2002/6, 351–357.
- [10] *Mathematica*, Wolfram Research Inc., 1988–2007.
- [11] http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/jenkinstraub/JenkinsTraubBib/Links/JenkinsTraubBib_lnk_1.html

Lóczy Lajos, ELTE Informatikai Kar, Numerikus Analízis Tanszék H-1117, Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C. lloczi@cs.elte.hu

A szerző köszönetét fejezi ki a bíráló gondos és segítő megjegyzéseiért.