

Négyzethálós fraktálmodellek (egy elemi bevezetés a fraktáldimenziókba)

MÁTÉ LÁSZLÓ

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézete 2006 tavaszától havonta összejöveteleket szervez középiskolai tanárok részére, ahol a matematika olyan aktuális eredményeiről beszélünk, amelyek érdekesek lehetnek az oktatásban. Kezdtük valószínűségi számítással és amikor megkérdeztük a résztvevőktől, hogy milyen témákkal folytassuk, akkor azt a majdnem egyöntetű választ kaptuk, hogy a gráfelmélet mellett fraktálokról szeretnének hallani.

A másik indítéka ennek az írásnak a Yale Egyetem honlapján található és könyvalakban is megjelent középiskolásoknak is szánt fraktálgeometria ([2],[7]). Ez érdekes és hasznos anyag, azonban a magyar matematikaoktatás keretében ennél tovább lehet menni.

A fraktálgeometriának két alapvető koncepciója van, az ön hasonlóság és a fraktáldimenziók. Ezek közül a fraktáldimenzió a fontosabb és nehezebb fogalom és ezért esett erre a választás. A különböző fraktáldimenziók közül a boxdimenziót tárgyaljuk. Ez elemi eszközökkel számítható és eléggé általános azoknak a halmazoknak a köre, amelyeknek van és könnyen kiszámítható a boxdimenziója. Olyan halmazokon fogjuk bemutatni a boxdimenzió tulajdonságait és kiszámítását, amelyek szerkezetét tetszőleges finomságú négyzethálók határozzák meg úgy, hogy belőlük, különböző rekurzív szabállyal, négyzetek sorozatát töröljük. Amint látni fogjuk, ezek a halmazok eléggé változatosak ahhoz, hogy a boxdimenzió minden problémája bemutatható rajtuk, viszont eléggé szabályosak, hogy bemutatásukhoz a matematikai analízis és mértékelmélet elkerülhető.

Bevezető írásként nem kerülhetjük el hogy röviden kitérjünk a boxdimenzió szokásos tárgyalására és néhány alkalmazására. A genetikából majd a geodéziából vett egy-egy példán megmutatjuk, hogy *milyen értelemben léteznek* törtdimenziós halmazok.

A négyzethálós fraktálmodellek szerkesztése és vizsgálata (például az [5] honlapon található „FRACTALSHIFT” nevű szoftverrel) része lehet fraktálokkal kapcsolatos matematikai kísérleteknek és feladatoknak.

A négyzethálós modell

A négyzethálók szerkesztését az 1. ábra mutatja be. Az egységnyégyzetet a 0, 1, 2, 3 jelekkel látjuk el, úgy ahogy azt az 1.a ábrán látjuk, majd a következő rekurzív szabállyal folytatjuk. Ha $\mathcal{E}_n$ a sorozat n -edik eleme, akkor az $\mathcal{E}_n$ minden négyzetét lineárisan felezzük, majd az így kapott négy négyzethez jelsorozatot rendelünk úgy hogy a felosztás előtti négyzet C jeléhez, az 1.c ábra szerint, hozzáfűzzük a 0, 1, 2, 3 jel egyikét. A négyzetekhez rendelt jelsorozatokat *kódoknak* fogjuk nevezni.

1	3
0	2

a.

11	13	31	33
10	12	30	32
01	03	21	23
00	02	20	22

b.

$C1$	$C3$
$C0$	$C2$

c.

1. ábra

Törtdimenziós részhalmazokat fogunk kijelölni úgy, hogy rekurzív módon *törölünk* adott kódokhoz tartozó négyzeteket.

1. Első példaként töröljük mindazokat a négyzeteket, amelyek kódjában a 3 szerepel. Ez például a 2. ábrán szemléltetett eljárással végezhető el. A rekurzív szabály ekkor az lesz, hogy minden lépés után, a lineáris felezéssel kapott négy négyzet közül pontosan egyet (a lineáris felezés után kapott jobbfelső négyzetet) töröljük. Ugyanis, a rekurzív lépéssel kapott négy négyzet közül, pontosan ennek a kódja tartalmaz 3 jelet.

A 3 jelet tartalmazó *összes* négyzet törlésével kapott részhalmaz, a Sierpinski háromszög területe csak 0 lehet. Ugyanis a rekurzív szabállyal kapott négy új négyzet közül pontosan egy olyan van, amelynek kódja tartalmazza a 3 jelet. Ezért minden lépésben, a 3 jelet tartalmazó négyzetek törlése után megmaradó halmaz területe az előző háromnegyede lesz.

A szerkesztés során kapott sokszögek kerülete egyre növekszik, mindegyik közelítés kerülete az előzőnek legalább másfélszerese (2. ábra). Ezért minden M pozitív számhoz van n , hogy az n -edik rekurzív lépés után kapott sokszögek kerülete nagyobb mint M .

1	3
0	2

a.

terület: $\frac{3}{4}$

kerület: 2

11	13	31	33
10	12	30	32
01	03	21	23
00	02	20	22

b.

terület: $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

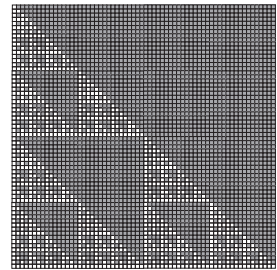
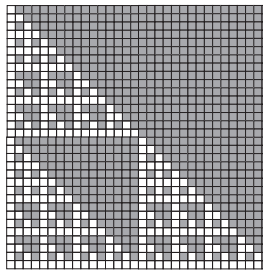
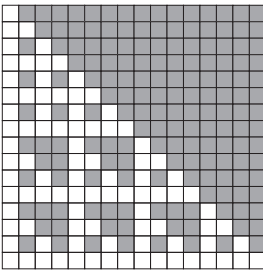
kerület: $\frac{3}{2} \cdot 2$

11	13	31	33
10	12	30	32
01	03	21	23
00	02	20	22

c.

terület: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \dots$ terület: $\left(\frac{3}{4}\right)^n$

kerület: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2 \dots$ kerület: $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot 2$



2. ábra. A 3 törlése a Sierpinski háromszöghöz vezet

A Sierpinski háromszög méretére vonatkozó megállapításainkat röviden így fejezzük ki

(MM) „a terület 0, a kerület ∞ ”.

Megjegyzés. Ha pontosak akarunk lenni a „területe csak 0 lehet” indokolásában, akkor még hozzá kell tennünk azt, hogy a Sierpinski háromszög a rekurzív szerkesztéssel kapott halmazok közös része és a részhalmaz területe nem lehet nagyobb, mint az eredeti halmazé.

2. Most töröljük az összes olyan négyzetet, amelyek kódjában egy megadott *kétjegyű szám* szerepel. Legyen ez például 20. A 3. ábra szürke halmazai azoknak a négyzeteknek az uniója, amelyek kódja tartalmazza a 20 jelet. Ellentétben a Sierpinski háromszög esetével, itt már nem nyilvánvaló, hogy a négyzetek törlése után mennyi lesz a megmaradó halmaz területe.

Ha viszont csupán azokat a négyzeteket töröljük, amelyek kódja *páros* hosszúságú és 20-ra végződik, akkor a Sierpinski háromszög mintájára járhatunk el (4. ábra).

11	13	31	33
10	12	30	32
01	03	21	23
00	02	20	22

a 20 jelű négyzet

		120			320		
		020		20		220	

a négyzetek kódja
legfeljebb háromjeliű

a négyzetek kódja
legfeljebb négyjeliű

a négyzetek kódja
legfeljebb ötjeliű

3. ábra

NEM minden olyan négyzetet törölünk,
amelynek a kódjában a 20 szerepel

11	13	31	33
10	12	30	32
01	03	21	23
00	02	20	22

a négyzetek kódja
kétjegyű

$$\text{terület: } \frac{15}{16}$$

$$\text{kerület: } \frac{9}{2}$$

a négyzetek kódja
négyjegyű

$$\text{terület: } \left(\frac{15}{16}\right)^2$$

$$\text{kerület} > \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

...

hogyan tovább?

4. ábra

A rekurzív szabály *páros számú* alkalmazásával minden előző négyzet helyére 16 új négyzet kerül, amelyek közül pontosan egy olyan van, amelynek kódja 20-ra végződik. Így ezek törlésével, a megmaradó halmaz területe az előző halmaz területének tizenöt tizenhatod része lesz. Ebből következik, pontosan úgy, ahogy a Sierpinski háromszögnél, hogy az eljárás végén megmaradó halmaz területe csak 0 lehet.

A kerület hosszának vizsgálatánál is ugyanúgy járhatunk el, ahogyan azt a Sierpinski háromszögnél tettük. A szerkesztés során kapott sokszögek kerületének az éppen most törölt négyzetekkel határos részei legalább tizenötnegyedszeresen növekednek (4. ábra utolsó sor). Így akármilyen nagy pozitív számot mondunk, elég sok rekurzív lépés után, a kapott sokszögek kerületei ennél is nagyobbá válnak. Ezért a „*a terület 0, a kerület ∞* ” tulajdonság itt is érvényes.

Ez a tulajdonság akkor is érvényes, amikor azt a halmazt tekintjük, amely

akkor marad meg az egységnégyzetből, ha az összes 20 jelet tartalmazó négyzetet töröljük. Hiszen több négyzet törlésével a kapott halmaz területe csökken és kerülete pedig növekedik.

3. Az 5. ábrán az egységnégyzet különböző részhalmazait látjuk, amelyek úgy keletkeztek, hogy töröltük mindazokat a négyzeteket, amelyek kódja azokat az egy vagy több kétjegyű számot tartalmazza, amelyek a halmaz képe alatt láthatók. Az elmondottak alapján, mindegyik halmazra érvényes

$$„a \text{ terület } 0, a \text{ kerület } \infty.”$$

A bemutatott modellel, azzal hogy tetszőleges finomságú négyzethálóból az összes olyan négyzetet töröljük, amelyek kódja előírt egy vagy kétjegyű számokat tartalmaz, a legváltozatosabb mintázatokat kapjuk (például az [5] honlapon található „FRACTALSHIFT” szoftverrel). Már az 1-3 példában bemutatott halmazok is nagyon különböző kiterjedésűek, különböző méretűnek látszanak.

A szokásos terület, vagy kerületméréssel nem határozható meg ez a méret hiszen minden ilyen halmazra (MM) érvényes. *Hogyan lehet méret szerint megkülönböztetni az ilyen halmazokat?*

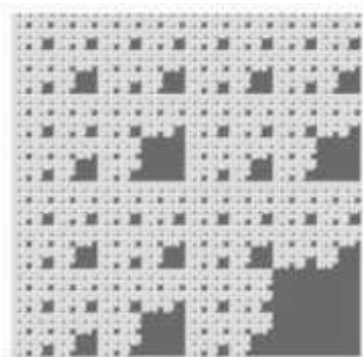
A boxdimenzió

Legyen $r = 2^{-n}$; ($n = 1, 2, \dots$) és N_r azoknak az r -élű négyzeteknek a száma, amelyek a megadott jelet (vagy jeleket) tartalmazó, r -élű négyzetek törlése után maradnak az egységnégyzetben. Az (N_r, r) értékpárok határozzák meg a szóbanforgó halmazok területét. Ugyanis

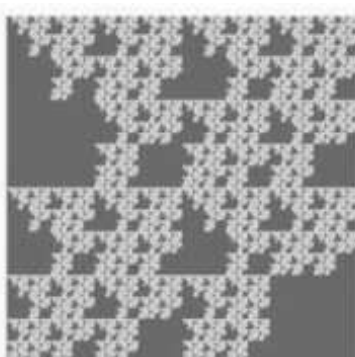
$$N_r r^2$$

a szóbanforgó halmazok területének a közelítő értéke. Mégpedig ez az érték annál pontosabb minél kisebb az r . Esetünkben ez a képlet csődöt mondott, hiszen a legváltozatosabb kiterjedésű halmazokra ugyanazt az értéket, a nullát adja. Mégis, az intuíciónk azt sugallhatja, hogy további megfontolásainkat erre az értékpárra építsük, hiszen az r -élű négyzeteknek a száma, különböző r értékek mellett szoros kapcsolatban van, mondhatnám jellemzi, a szóbanforgó halmazok kiterjedését.

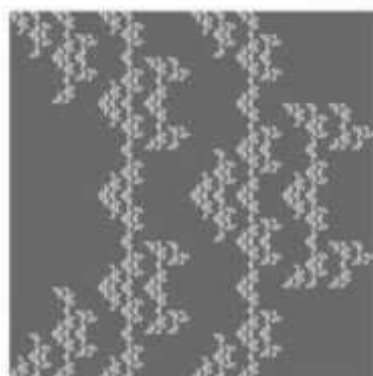
Az ilyenmódon „megmérhetetlen” halmazok megmértetésére a döntő észrevétel az, hogy a $(-\log r, \log N_r)$ pontok egy egyenesen vannak.



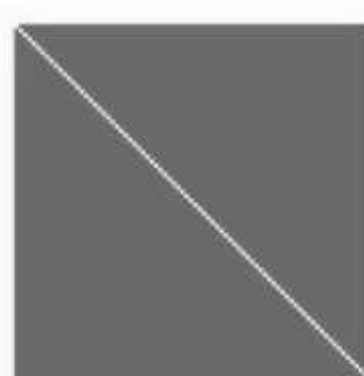
33



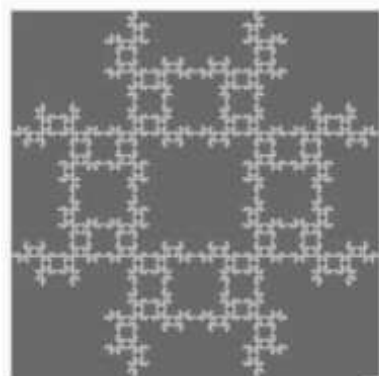
33, 20



33, 20, 11, 02



3, 0



00, 11, 22, 33

azoknak a láncoknak a képei,
amelyekben nem állhat egy-
más mellett két azonos jel

5. ábra

A Sierpinski háromszögnél, amikor a 3 jelet tartalmazó összes négyzetet töröltük, a rekurzív szerkesztésből következik

$$\text{ha } r = \frac{1}{2^n} \text{ akkor } N_r = 3^n$$

és ekkor a $(-\log r, \log N_r)$ pontok egy

$$\frac{\log 3}{\log 2} = 1.5849 \dots$$

meredekségű egyenesen vannak.

Hasonlóan kapjuk, hogy a $(-\log r, \log N_r)$ pontok egy

$$\frac{\log 15}{\log 4} = 1.95342 \dots$$

meredekségű egyenesen vannak, amikor a négyzethálókból *csak* mindazokat a négyzeteket töröljük, amelyek kódja 20-ra végződik és *páros* hosszúságú. Hiszen minden egyes rekurzív lépésnél, a negyedakkora élű négyzetek száma 15-szörös lesz.

Ha az *összes* olyan négyzetet töröljük, amelyek kódjában a 20 szerepel, akkor az N_r meghatározása már nem ilyen egyszerű. Közvetlen számlálással kapjuk a következő táblázat értékeit

$$\begin{array}{ll} r = \frac{1}{4} & N_r = 15 \\ r = \frac{1}{8} & N_r = 56 \\ r = \frac{1}{16} & N_r = 209 \end{array}$$

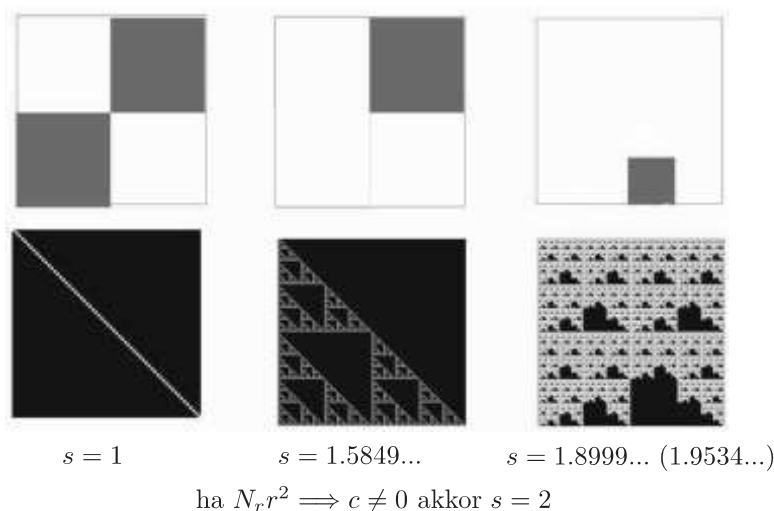
amelyekből

$$\frac{\log 56 - \log 15}{\log 2} = 1.9004 \dots \quad \text{és} \quad \frac{\log 209 - \log 56}{\log 2} = 1.9000 \dots$$

meredekséget kapunk aszerint, hogy melyik pontpárral számolunk.

Finomabb számítással, az

$$(R) \quad N_{2^{-n}} = 4N_{2^{-n+1}} - N_{2^{-n+2}}; \quad N_{2^{-2}} = 15, \quad N_{2^{-3}} = 56$$



6. ábra

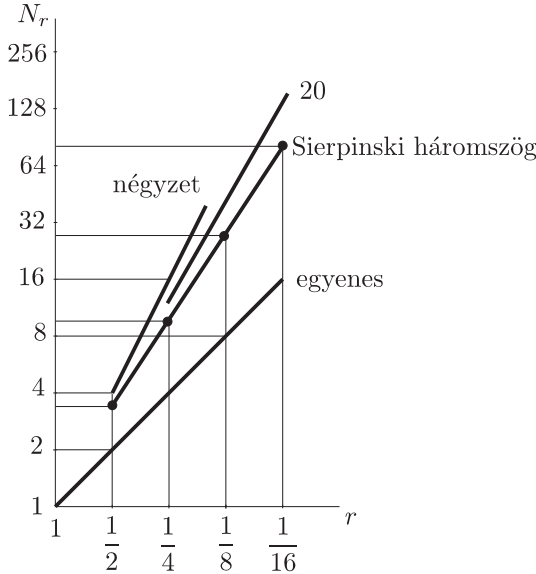
rekurzív formula alapján (amit később igazolni fogunk), azt kapjuk, hogy $n > 5$ esetén ez az érték $1.8999\dots$

Az elmondottakat, megfelelően kiegészítve, a 6. ábrán illusztráljuk. Az Olvasóra bízunk annak az ellenőrzését, hogy az összes olyan négyzetet töröve, amelynek kódjában 3 vagy 0 van, egy egyenesszakaszt, a négyzet átlóját kapjuk. Véges sok négyzet törlése után megmaradó halmaz területe egy $c \neq 0$ pozitív szám. Ekkor a $(-\log r, \log N_r)$ pontok, legalábbis kis r értékekre, olyan egyenesen vannak amelynek s meredeksége 2.

Azt tapasztaljuk, hogy a $(-\log r, \log N_r)$ pontok olyan egyenesen vannak, amelynek s meredeksége követi a halmaz kiterjedését (7. ábra). Így az s értékével méret szerint meg tudjuk különböztetni azokat a halmazokat, amelyek területe csakis nulla lehet.

Megjegyzés. A 7. ábrán log-log rendszerben (N_r, r) pontokat ábrázoltunk. Könnyen belátható, hogy ez ugyanazt a grafikont adja mintha az N_r, r koordinátarendszerben a $(-\log r, \log N_r)$ pontokat ábrázoljuk. Ez a szokásos eljárás, mivel ekkor az N_r értékek közvetlenül olvashatók le a grafikonról.

Az s értéke, a $(-\log r, \log N_r)$ pontsorozattal adott egyenes meredeksége, a halmaz boxdimenziója. Ez a név arra utal, hogy az s értékét, a halmazt lefedő r élű négyzetháló mérete határozza meg és egy sima görbénél $s = 1$ és egy kör lapnál, vagy egy szabályos sokszögnél $s = 2$.



7. ábra

Lemma. Ha $r \Rightarrow 0$ esetén $N_r r^2 \Rightarrow c \neq 0$ akkor a $(-\log r, \log N_r)$ pontok, legalábbis kis r értékekre, olyan egyenesen vannak amelynek s meredeksége 2.

Bizonyítás. Ekkor

$$\frac{\log N_r r^2}{-\log r} \Rightarrow 0$$

és

$$\frac{\log N_r r^2}{-\log r} = \frac{\log N_r}{-\log r} - 2.$$

■

Rekurzív formula. A 20 jelet tartalmazó összes r élű négyzet törlése után megmaradó r élű négyzetek száma

$$(R) \quad N_{2^{-n}} = 4N_{2^{-n+1}} - N_{2^{-n+2}}; \quad N_{2^{-2}} = 15, \quad N_{2^{-3}} = 56$$

az (R) igazolása: Legyen

$$N_{2^{-n}}^{\circ} = 2^{2n} - N_{2^{-n}}$$

vagyis $N_{2^{-n}}^{\circ}$ az egység-négyzetből az n -edik lépés után törölt négyzetek száma. Ekkor

$$N_{2^{-n}}^{\circ} = 4N_{2^{-n-1}}^{\circ} + N_{2^{-n-2}}.$$

Ugyanis fele akkora élű négyzetekben mérve, az eddig törölt négyzetek száma négyszeres lesz, amihez hozzájönnek azok a négyzetek, amelyek éle $r = 2^{-(n+1)}$ és kódja 20-ra végződik, továbbá egyetlen 20 jelet tartalmaz. Ugyanis a 20 jelet tartalmazó többi négyzetet, a 20 jelet tartalmazó nagyobb négyzetek részeként, már töröltük.

Mit mér a boxdimenzió?

Ha r elég kicsi akkor

$$(T) \quad N_r r^2 \approx c \cdot (\text{terület}).$$

A (T) összefüggésből rögtön következik, hogy ha $c \neq 0$, akkor

$$(T^*) \quad N_r \approx cr^{-2}.$$

A (T^*) -nak azonban egészen más olvasata van mint a (T) területformulának.

(T^*) szerint $N_r \rightarrow \infty$ ha $r \rightarrow 0$ mégpedig úgy, ahogyan cr^{-2} . Ezen azt értjük, hogy ha r közeledik a 0-hoz és $c \neq 0$, akkor N_r egyre nagyobb lesz, tetszőlegesen nagyvá válhat, mégpedig ha r felére, harmadára, negyedére csökken, akkor N_r kb. négyszerese, kilencszerese, tizenhatszorosa lesz az eredeti értékének.

Mi érvényes az elmondottakból a Sierpinski háromszögre és a négyzethálós modellel előállított halmazokra, ahol $c = 0$?

Ekkor is nyilvánvalóan $N_r \rightarrow \infty$ ha $r \rightarrow 0$. Nem nyilvánvaló azonban az a tapasztalat, hogy ekkor is egy *hatványszabály* érvényes. Ez azt jelenti, hogy van olyan $s \geq 0$ hogy

$$(B) \quad N_r \approx ar^{-s}$$

(ekkor $s < 2$, amint példák során látni fogjuk). Ez az s megegyezik a boxdimenzióval.

Ugyanis a (B)-ből

$$(B^*) \quad \log N_r \approx -s \log r + \log a$$

ami azt jelenti, hogy a $(-\log r, \log N_r)$ pontok egy s iránytangensű egyenesen vannak, vagy legalábbis az egyenes körül csoportosulnak, ha r elég kicsi.

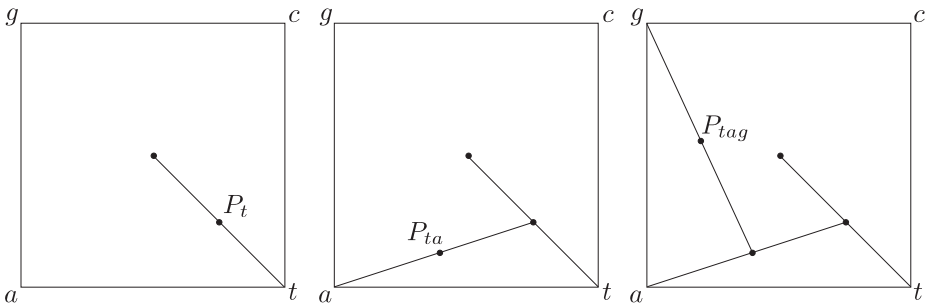
Az elmondottakból következik hogy az s boxdimenzió az $N_r \rightarrow \infty$ sebességét méri. Pontosabban, egy eléggé sűrű négyzetrácsból, nagyobb s boxdimenzió mellett, több négyzet szükséges a halmaz lefedéséhez még akkor is, ha a halmazok c területe nulla. Nagyobb s esetén N_r rohamosabban növekszik, ha r közeledik a nullához, mint kisebb s esetén. Ez rögtön leolvasható a 7. ábráról.

Egy kevésbé matematikus válasz arra, hogy mit mér a boxdimenzió. Egy halmazt adott felbontás mellett tudunk csak megfigyelni. A számítógép képernyőjén megjelenő kép megfigyelésének a képernyő pixelmérete, egy „valóságos” tárgy megfigyelésének pedig a szemünk felbontóképessége szab határt. Legyen h -átmérőjű az a legkisebb objektum, amelyet megfigyelni tudunk. Ez a nullához nagyon közeli érték. Így az elmondottak alapján nagyobb s mellett több lesz a halmazt lefedő h élű négyzetek N_h száma és így több ilyen négyzetet tudunk megfigyelni mint kisebb s boxdimenzió esetén. Így valóban nagyobbak látjuk a halmazt. Ez akkor is érvényes, amikor $s < 2$, vagyis a halmaz területe nulla. *Ezzel méret szerint is különbséget tudunk tenni olyan halmazok között is, amelyek mindegyikének területe nulla.*

Eddig csak a négyzethálós modellel előállítható halmazokról beszéltünk. Ezzel a modellel előállítható halmazok eléggé változatosak ahhoz, hogy a boxdimenzió minden problémája bemutatható rajtuk, viszont eléggé szabályosak, hogy bemutatásukhoz a matematikai analízis és mértékelmélet elkerülhető. Ezért esett ezekre a halmazokra a választás. Később, a „Kitekintés” c. részben, tetszőleges (síkbeli) halmazok boxdimenziójára is kitérünk.

Egy genetikával kapcsolatos példa

A négyzetbe írt törtdimenziós halmazok DNS láncok vizsgálatára is alkalmazhatók [3]. A DNS lánc génbankban tárolt alakját (8. ábra) az egységnyezetbe transzformálva, a kapott halmaz mintázata jelzi bizonyos rövid szavak hiányát a DNS láncból. Ez a transzformáció a következőképpen történhet (10. ábra).



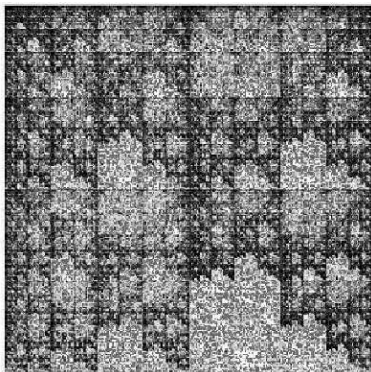
10. ábra

A négyzet középpontját összekötjük a négyzetnek a lánc első betűjéhez tartozó csúcspontjával. Ennek a szakasznak a felezőpontja lesz az első betűnek megfelelő P_1 pont. Ha már az első k betűből álló szónak megfelelő $\{P_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ pontokat megszerkesztettük, akkor a lánc $k+1$ -edik betűjének megfelelő P_{k+1} pont

Reind	TTTTACGGT	GAACTGCGA	ATGGCTCATT	ACAACAGTTA	TAGTTTCITT	GGTATTCGTT	TTCCATGGAT	AACCGTGCTA	150
Bdiv	TTTTACGGT	GAACTGCGA	ATGGCTCATT	ACAACAGTTA	TAGTTTCITT	GGTATTCGTT	TTCCATGGAT	AACCGTGCTA	
Reind	ATTGTAGGGC	TATATCAAGT	TCGAGGGGCT	TTGGGGGGCT	TTATTAGTTC	TAAACCATC	CGTTTGGGTT	TTGGGTGATT	230
Bdiv	ATTGTAGGGC	TATATCAAGT	TCGAGGGGCT	TTGGGGGGCT	TTATTAGTTC	TAAACCATC	CGTTTGGGTT	TTGGGTGATT	
Reind	CATAATAAAC	TTGGGAATCG	CAATTTTTTG	GGATGGAGCA	TTCAAGTTTC	TGACCTATCA	CGTTGACGGT	AGGGTATTGG	310
Bdiv	CATAATAAAC	TTGGGAATCG	CAATTTTTTG	GGATGGAGCA	TTCAAGTTTC	TGACCTATCA	CGTTGACGGT	AGGGTATTGG	
Reind	CCTACCGAGG	CAGCAACGGG	TAACGGGGAA	TTAGGGTTCC	ATTCCGGAGA	GGGAGCGTGA	GAAACGGCTA	CCACATCCAA	390
Bdiv	CCTACCGAGG	CAGCAACGGG	TAACGGGGAA	TTAGGGTTCC	ATTCCGGAGA	GGGAGCGTGA	GAAACGGCTA	CCACATCCAA	
Reind	GGAGGCGAGC	AGGCGCGCAA	ATTADCCAAT	CCTGCACAGC	GGAGGTAGTG	ACAAGAAATA	ACAATGCAGG	GCAATTGTCT	470
Bdiv	GGAGGCGAGC	AGGCGCGCAA	ATTADCCAAT	CCTGCACAGC	GGAGGTAGTG	ACAAGAAATA	ACAATGCAGG	GCAATTGTCT	
Reind	TGTATTGGGA	ATGATGGTGA	CCTAAACCGT	CAACAGAGTA	ACAATTGGAG	GGCAGTCTG	GTGCCAGCAG	CCGAGGTAAT	550
Bdiv	TGTATTGGGA	ATGATGGTGA	CCTAAACCGT	CAACAGAGTA	ACAATTGGAG	GGCAGTCTG	GTGCCAGCAG	CCGAGGTAAT	
Reind	TCCAGCTCCA	ATAGCGTATA	TTAACTTTGT	TGCAGTTAAA	AAGCTCGTAG	TTGAATTTTT	GGCTGGTGTT	AATATTGACT	630
Bdiv	TCCAGCTCCA	ATAGCGTATA	TTAACTTTGT	TGCAGTTAAA	AAGCTCGTAG	TTGAATTTTT	GGCTGGTGTT	AATATTGACT	
Reind	GATGTGAGGA	TTGCACCTTC	CTTTTGGGAT	TTTCCCTTTT	TTACTTTGAG	AAAATTAGAG	TGTTTCAAGC	AGACTTTTGT	710
Bdiv	AATGTGAGGA	TTGCACCTTC	CTTTTGGGAT	TTATCCCTTT	TTACTTTGAG	AAAATTAGAG	TGTTTCAAGC	AGACTTTTGT	
Reind	CTTGAATACT	TCAGCATGGA	ATAATAGAGT	AGGACITTTG	TTCTATTTTG	TTGGTTTGTG	AACCTTAGTA	ATGGTTAATA	790
Bdiv	CTTGAATACT	TCAGCATGGA	ATAATAGAGT	AGGACITTTG	TTCTATTTTG	TTGGTTTGTG	AACCTTAGTA	ATGGTTAATA	
Reind	GGAACGGTTG	GGGGCATTCC	TATTTAACTG	TCAGAGGTGA	AATCTTAGA	TTTGTTAAAG	ACGAACACT	CGGAAGCAT	870
Bdiv	GGAACGGTTG	GGGGCATTCC	TATTTAACTG	TCAGAGGTGA	AATCTTAGA	TTTGTTAAAG	ACGAACACT	CGGAAGCAT	
Reind	TTGCCAAGGA	CGTTTTCATT	AATCAAGAAC	GAAAGTTAGG	GGATCGAGGA	CGATCAGATA	CGCTCGTAGT	CCTAACCTTA	950
Bdiv	TTGCCAAGGA	CGTTTTCATT	AATCAAGAAC	GAAAGTTAGG	GGATCGAGGA	CGATCAGATA	CGCTCGTAGT	CCTAACCTTA	
Reind	AACATGCGCG	ACTAGGGATT	GGAGGTGCTC	ATTTTTCGGA	CTCCTTCAGC	ACCTTGAGAG	AAATCAAAGT	CTTTGGGTTT	1030
Bdiv	AACATGCGCG	ACTAGGGATT	GGAGGTGCTC	ATTTTTCGGA	CTCCTTCAGC	ACCTTGAGAG	AAATCAAAGT	CTTTGGGTTT	

8. ábra

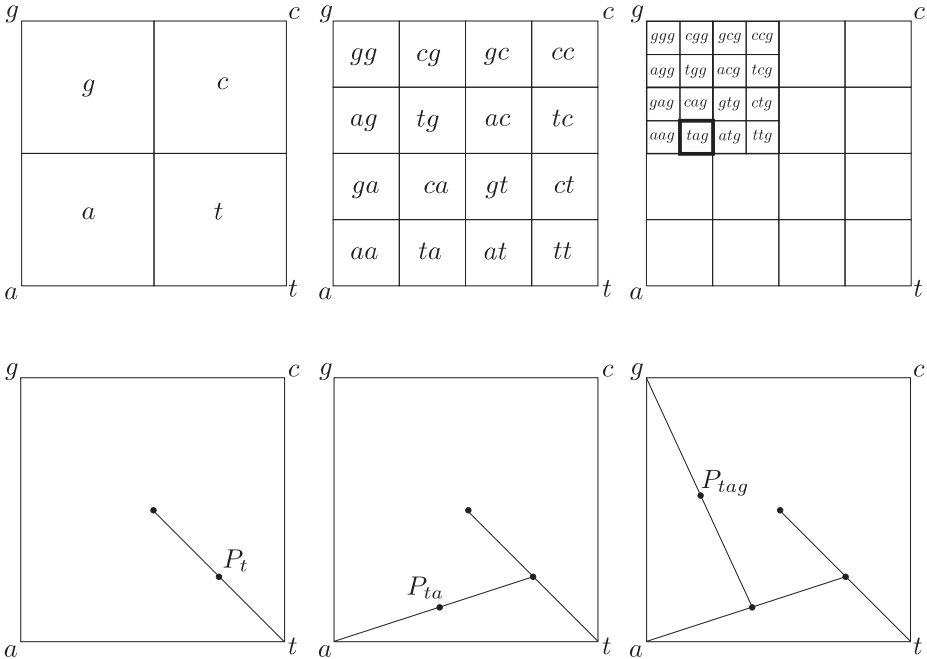
a $[c_{k+1}, P_k]$ szakasz felezőpontja lesz, ahol c_{k+1} a lánc $k + 1$ -edik betűjéhez tartozó csúcs (a 10. ábra a **tag...** kezdetű lánc ábrázolását mutatja). Ezzel minden n betűből álló láncnak egy n -elemű pontsorozat felel meg. Így egy nagyon hosszú, több ezer betűből álló láncnak a képe egy mintázattá tömörül (9. ábra).



9. ábra. human beta globin region on CHROMOSOME 11

A mintázatból kiolvasható a DNS láncból gyakorlatilag hiányzó rövid szó és a

mintázat boxdimenziója „a hiány mértékére” ad felvilágosítást. A 11. ábra alsó és felső sorának összehasonlításával történhet a hiányzó szavak felderítése. Figyeljük meg a g, c, a, t betűkkel kódolás és a négyzethálós fraktálmodell szerkesztésének a kapcsolatát.



11. ábra

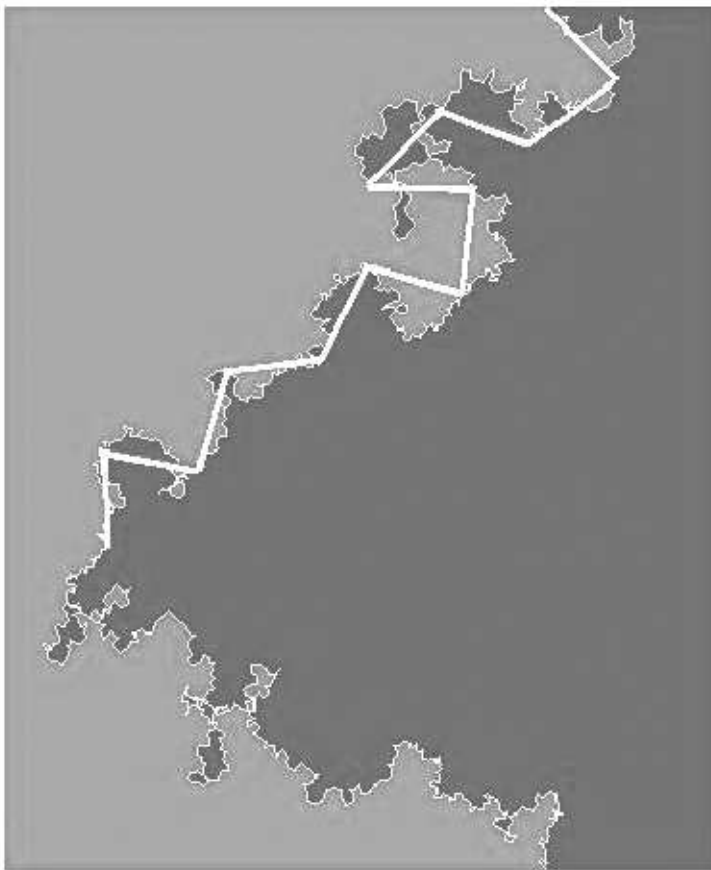
Fraktáldimenzió a geodéziában

A geodéziában szokásos eljárás egy partvonal (vagy egy folyó hosszának) mérésére, hogy egymástól ugyanakkora d távolságban, pontokat (u.n. mérési sarokpontokat) jelölnek ki a partvonal mentén (12. ábra). Legyen az így kijelölt pontok száma $M(d) + 1$. Ekkor a partvonal közelítő hosszának az

$$(1) \quad L(d) = M(d) \cdot d$$

értéket tekinthetjük. Ezt a mérési sokszög hosszának nevezzük. Nagyon zeg-zugos partvonalak esetén, mint amilyen például Norvégia, vagy Izland partvonala, vagy egy zeg-zugos folyó, a mérési sokszög hosszával nem kapható meg a partvonal hossza megfelelő pontossággal. Ennek oka egyrészt az, hogy a méréseknél felvehető ugyanazon d távolságban, de különböző helyeken kijelölve ezeket a mérési pontokat az (1)

értékek lényegesen eltérnek egymástól, ha a partvonal nagyon zezgugos, másrészt, ekkor a d csökkentésével a mérési sokszög hossza lényegesen megváltozik. Így a mérési sokszög hossza nem ad kellő tájékoztatást a partvonal hosszáról. Ebben az esetben, ha a mérési sokszög hossza mellett a görbe egy fraktáldimenzióját is feltüntetjük, akkor felvilágosítást adunk a mérés pontosságáról is.



12. ábra

A görbének ez a fraktáldimenziója, amit *kompassz* (tájoló) *dimenzió*nak nevezzük, hasonlóan épül fel az $L(d), d$ párra, mint ahogyan a boxdimenzió az N_r, r párra. Itt is a lényeges észrevétel az, hogy a $(\log M(d), \log d)$ pontok (közelítőleg) egy egyenesen vannak. Az egyenes meredeksége a görbe dimenziója.

A dimenzió megállapításának a legegyszerűbb módja, hogy különböző d_1 és d_2

mellett meghatározzuk a hozzájuk tartozó mérési sokszögek $L(d_1)$ és $L(d_2)$ hosszát. Összevetjük a sokszögek éleinek a csökkenését a hozzájuk tartozó ívhossz növekedésével. Pontosabban az

$$(2) \quad \log \frac{M(d_1)}{M(d_2)} \quad \text{és} \quad \log \frac{d_1}{d_2} \quad \text{arányát}$$

számítjuk a mért d_1, d_2 párra.

A (2) a következővel egyenlő

$$\frac{\log M(d_1) - \log M(d_2)}{\log d_2 - \log d_1}$$

ami a $(-\log d, \log M(d))$ pontokkal meghatározott egyenes h iránytangense, vagyis a görbe dimenziója.

Megjegyzés. (2) a mérési sokszögek hosszának a relatív növekedését adja, ami gazdagabb információ mintha csupán az $L(d_1)$ és $L(d_2)$ hányadosát adjuk meg, hiszen tekintetbe veszi azt is, hogy a d milyen változásához tartozik a növekedés. A logaritmus bevetését a hatványszabály indokolja.

Térképek készítésénél a következő szerepe lehet a kompasz dimenziónak. Ha egy kisebb léptékű térkép alapján egy *nagyobb léptékűt* készítünk, akkor a térkép vonalai „megrövidülnek”. Rövid, éles kanyarok a folyókon, vagy egy partvonal kisméretű öblei eltűnhetnek a nagyobb léptékű térképen. A vonalhossz megváltozásának a mértékét ekkor a kompasz dimenzió adja és a térképszerkesztés jóságának egyik paramétere, hogy a szerkesztés során mennyire változik meg a görbék dimenziója.

Kitekintés

A fraktáldimenziók elmélete a matematikai analízis és a mértékelmélet fogalmaira épít. A négyzethálós fraktálmodellel kísérletet tettünk arra, hogy ezek felhasználása nélkül megvilágítsuk a fraktáldimenziók lényegét és használható ismereteket adjunk ezen a területen. Befejezésül megadjuk a boxdimenzió *eredeti* definícióját és azt, hogy ez hogyan függ össze mindazzal, amit a fraktáldimenziókról a jelen cikkben írtunk.

Definíció. Legyen $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$ az euklideszi sík korlátos részhalmaza. Legyen N_d^* a $\mathcal{H}$ halmazt lefedő, minimális számú d átmérőjű halmazok száma. Ekkor a $\mathcal{H}$ halmaz boxdimenziója (*capacity dimension*)

$$(BD) \quad s = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\log N_d^*}{-\log d}.$$

Közvetlenül ezzel a definícióval lehetetlen az s kiszámítása, hiszen ha csupán d átmérőjű *körlapokra* korlátozódunk, a számtalan ilyen lefedésekből is reménytelennek látszik kiválasztani a minimális számút. Meglepőnek látszik, hogy minden d -hez *elegendő egyetlen d -élű négyzetrácsal lefedni a $\mathcal{H}$ halmazt és megszámolni mindazon négyzetek N_d számát, amelyek belemetszenek a halmazba.*

Ezt helyettesítve az N_d^* helyébe, a (BD) ugyanazt az s értéket adja ([1],[6]). A legtöbb forrás ezt a négyzethálós meghatározást tekinti boxdimenzióknak, pedig ez a már végrehajtható számítás, csak akkor tekinthető matematikai definíciónak, ha azonosítható a (BD) formulával meghatározott értékkel. Ugyanis

a $\mathcal{H}$ halmazt lefedő d -élű négyzetrács négyzeteinek a N_d száma amelyek belemetszenek a halmazba

NEM egyértelmű matematikai megállapítás.

Ha $\mathcal{H}$ a négyzethálós fraktálmodellel szerkesztett halmaz, akkor az egyre hosszabb kódokkal rendelkező négyzetek törlése után megmaradó halmazok N_r értékét helyettesítve az N_d^* helyébe, az így kapott

$$(BD^\circ) \quad \frac{\log N_r}{-\log r} \quad r = \frac{1}{2^n} \quad n = 1, 2, \dots$$

sorozat határértéke lesz az s boxdimenzió. A $(-\log r, \log N_r)$ pontok, jó közelítéssel, egy s meredekségű egyenesen vannak.

Tétel.[4] *Ha $\mathcal{H}$ a négyzethálós fraktálmodellel szerkesztett halmaz, akkor a boxdimenziója a (BD°) alsó határa (minimuma).*

Nem minden halmaznak van boxdimenziója. Vannak olyan halmazok, amelyekre a $(-\log r, \log N_r)$ pontok sorozata még nullához közeli r -ekre sem követ egy egyenest.

Természetes módon adódnak a következő kérdések:

1. Feladat. Van-e olyan szó, amelynek az a tulajdonsága, hogy törölve *minden* olyan négyzetet, amelynek kódja ezt a szót tartalmazza, pozitív területű halmaz marad az egységnégyzetből? Ha igen, akkor adjunk meg ilyen szavakat.

2. Feladat. Mivel egy egyenest, vagy sima görbét egydimenziósnak tekintünk, elvárható, hogy ha egy görbének van ívhossza, vagyis a görbe beírt poligonjai $\{L(d); d > 0\}$ hosszúságainak van (véges) felső határa, akkor a kompasz dimenzió 1. Igaz-e ez az elvárás?

3. Feladat. A 20 jelet tartalmazó négyzetek törlésével kapott halmaz mintájára, a többi tárgyalt mintázatra is adjunk meg rekurzív formulát az $\{N_r; r = 2^{-n}\}$ értékekre.

Irodalom

- [1] K. H. Falconer, Fractal Geometry, Wiley, 1990. sec.4.1, p.103-104. (*second edition* 2004).
- [2] M. Frame, B. B. Mandelbrot, Fractals, Graphics and Mathematical Education, 2002.
- [3] H. J. Jeffrey, *Chaos Game Representation of Genetic Sequences*, Nuclear Acids. Res., **18**, 1990. p. 2163-70.
- [4] D. Lind, B. Marcus, An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding, Cambridge Univ. Press, 1995. sec.4.1., p. 103-104.
- [5] www.math.bme.hu/~mate
- [6] www.math.bme.hu/~mate/jegyzet/boxdim, sec.10
- [7] [www.math.bme.hu/~mate/Links/Fractal Geometry](http://www.math.bme.hu/~mate/Links/Fractal%20Geometry)

Máté László, 1113 Budapest, Tornavár u. 18., mate@math.bme.hu

