

Ezt az egyenlőtlenségláncot a következőképpen értékelhetjük. Egyrészt $F(\pi) + F(0)$ pozitív egészszám. Másrészt a legutolsó jobboldali kifejezés 0-hoz konvergál ha $n \rightarrow \infty$; ugyanis $n!$ „sokkal” gyorsabban tart a ∞ -be, mint bármely adott szám n -edik hatványa. (Erre a korábbi cikkünkben már adtunk egy szemléletes bizonyítást.) Tehát az n egészszám választható olyan nagyra, hogy

$$\frac{p^n \pi^{n+1}}{2^{2n} n!} < 1$$

legyen. Az n ilyen megválasztása esetén az a furcsa helyzet áll elő, hogy az $F(\pi) + F(0)$ olyan egészszám, amely a 0 és 1 közé esik, ami nyilvánvaló ellentmondás. Az is világos, hogy erre az ellentmondásra az (1)-beli feltételezés következtében jutottunk. Így az (1)-beli feltételezés, amely szerint π racionális szám, hamisnak bizonyult. Tehát π irracionális szám. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Köszönetnyilvánítás. Ezúttal is szeretném Dr. Pintér Lajos és Dr. Krámlí András kollégáimnak köszönetemet kifejezni, hogy figyelmemet I. Niven dolgozatára felhívták.

Irodalom

- [1] G.H. Hardy–E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers, 3rd edition, Clarendon Press, Oxford, 1954.
- [2] Móricz Ferenc, Az $\sqrt[n]{N}$ (amikor nem egész), e és π számok irracionálisok, Polygon, 15(2006), 25–41.
- [3] I. Niven, A simple proof that π is irrational, Bull. Amer. Math. Soc., 53(1947), 509.

Móricz Ferenc, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
 moricz@math.u-szeged.hu

A háromszög Fermat féle pontjától a Kiepert hiperbola rendkívüli bizonyításáig

CSIBA PÉTER

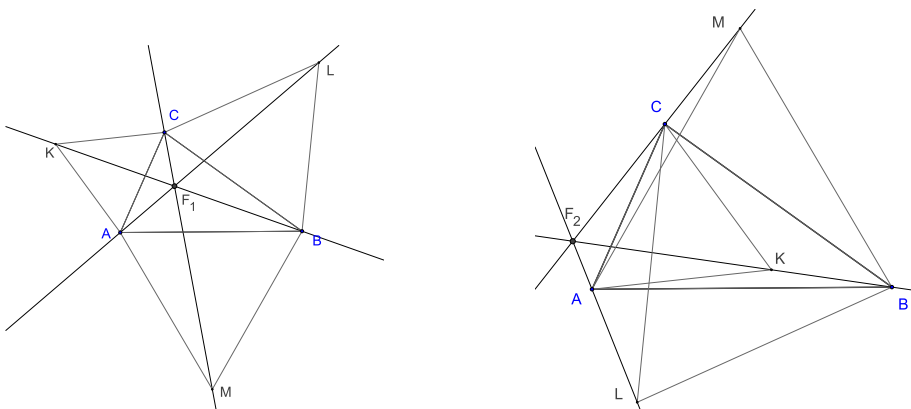
A Polygon egy korábbi számában megjelent *A háromszögek Fermat- és Napóleon-féle pontjainak általánosítása* [3] cikkem továbbgondolásával bukkantam az ott talált pontok mértani helyét megadó hiperbolára, mely Kiepert¹ nevét viseli. A hiperbola létezésének és tulajdonságainak bizonyításhoz vezető út talán van annyira tanulságos, hogy másoknak is szolgál pár olyan ötlettel, amelyeket be tudnak építeni oktatói vagy kutatói munkájukba.

¹ Friedrich Wilhelm August Ludwig Kiepert (1846-1934).

Bevezetés. Lássuk azt a két alapvető állítást – a háromszög Fermat- és Napóleon-féle pontjaira vonatkozóakat – amelyek az egész gondolatmenetet elindították (lásd [1]-ben):

1. Tétel. *Ha a síkban egy tetszőleges háromszög (jelöljük ABC -vel) oldalaihoz egyenlő oldalú háromszögeket illesztünk (úgy, hogy vagy mindhárom nyitott háromszögtartomány diszjunkt az ABC háromszögtartománnyal, vagy egyik sem), akkor a szabályos háromszögeknek az alapháromszög csúcsaival nem egyező csúcsait az alapháromszög átellenes csúcsaival összekötő egyenesek egy közös ponton haladnak keresztül, amit az alapháromszög Fermat-féle pontjának nevezünk (1. Fermat-féle pont, illetve 2. Fermat-féle pont).*

Ezt szemlélteti az 1. ábra.

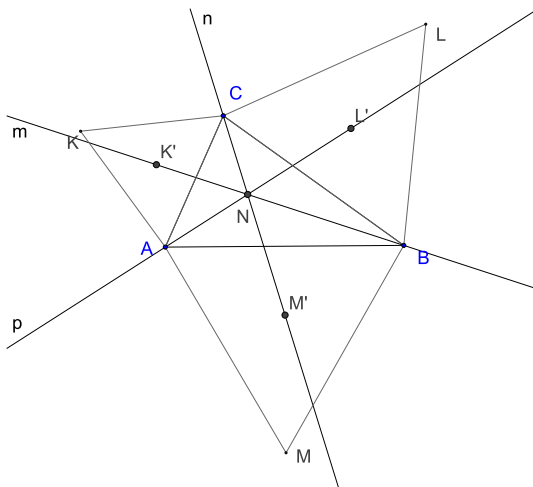


1. ábra Az 1. Fermat-féle pont, és a 2. Fermat-féle pont

2. Tétel. *Ha az előző tétel alapháromszögének oldalaihoz illesztett szabályos háromszögek középpontjait (súlypont $\equiv$ magasságpont $\equiv \dots$) az alapháromszög átellenes csúcsaival kötjük össze, akkor ezek az egyenesek egy közös ponton haladnak keresztül, amit az alapháromszög Napóleon-féle pontjának (pontjainak) nevezünk.*

Mivel mindkét esetben az alapháromszög oldalai fölé egymással hasonló egyenlőszárú háromszögeket emeltünk, magától érthetődőnek tűnik ezt a tulajdonságot megtartva általánosítani a fenti állításokat:

3. Tétel. *Ha a síkban egy tetszőleges ABC háromszög oldalai fölé AB , BC , CA alapokkal egyenlő szárú, egymással hasonló ABC' , BCA' , CAB' háromszögeket emelünk (úgy, hogy vagy mindhárom nyitott háromszögtartomány diszjunkt az ABC háromszögtartománnyal, vagy egyik sem), akkor az AA' , BB' , CC' egyenesek egy K ponton haladnak keresztül.*



2. ábra. Az 1. Napóleon-féle pont

A fenti tétel megfelelő koordinátarendszer választásával könnyedén bizonyítható (a bizonyítás megtalálható [3]-ban).

Sőt egyszerűen belátható az is, hogy megfelelő alakú egyenlőszárú háromszögeket illesztve az alapháromszög oldalaihoz, az alapháromszögnek a Fermat- és Napóleon-féle pontjain kívül több nevezetes pontja is adódik. Csak a legnevezetesebbeket említve:

- a súlypont (S), ha a hozzáillesztett háromszögek magassága 0,
- mindhárom csúcs (A, B, C), ha a hozzáillesztett háromszögek alapon fekvő szögei megegyeznek az alapháromszög valamelyik szögével és a hozzáillesztett háromszögek nem diszjunktak az alapháromszöggel,
- a magasságpont (M), ha a hozzáillesztett háromszögek alapon fekvő szögei elérnék a derékszöget.

Eddig jutott hát az előző írás.

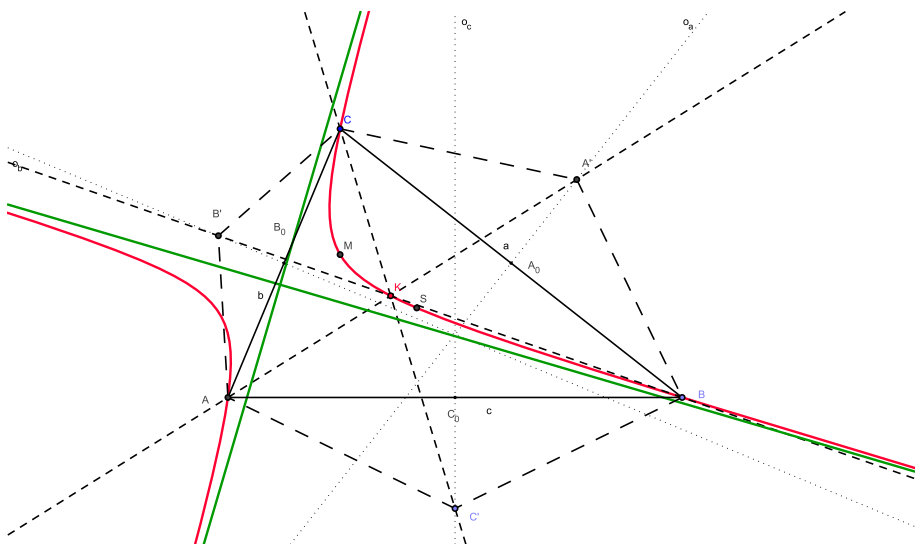
Mértani hely keresése. Az előző tétel K pontjáról látjuk, hogy az felveheti az ABC alapháromszög néhány nevezetes pontját. Vajon milyen pontokat vehet fel ezeken kívül? Szinte adja magát az ötlet:

Vizsgáljuk meg az összes ilyen K pontok halmazát!

4. Tétel. A 3. tétel K pontjának a mértani helye derékszögű hiperbola², mely általános esetben áthalad az ABC alapháromszög csúcsain, súlypontján, magasságpontján, Fermat- és Napóleon-féle pontjain.

² A mértani hely általános ABC háromszög esetén reguláris hiperbola, ám egyenlőszárú vagy egyenlőoldalú alapháromszög esetén a hiperbola egyenessé illetve ponttá fajul el.

A tételünkben szereplő derékszögű hiperbolát az alapháromszög *Kiepert-féle hiperbolájának* nevezzük, amit a 3. ábra szemléltet.



3. ábra. A Kiepert féle hiperbola

Bizonyítás. A 2. lábjegyzet alapján a bizonyítás majd három esetre bomlik, előbb azonban lássuk azt, ami mindhárom esetben azonos.

A tétel igazolásához analitikusan fogunk hozzá. Helyezzük el az alapháromszöget egy arra alkalmas derékszögű (Descartes-féle) koordinátarendszerben (az alapháromszöghöz illesztendő háromszögek metrikus tulajdonsága miatt)!

Az egyszerűbb számolás érdekében válasszuk a koordinátarendszer kezdőpontjául az A pontot, illetve az x koordinátatengely egységpontjának a B pontot. A koordinátarendszer másik tengelyét válasszuk meg úgy, hogy a C csúcs az első síknegyedbe kerüljön és így az $[e, f]$ rendezett valós számpárral reprezentálható. Ekkor $f > 0$, lévén a C pont az első síknegyed pontja. Az e paraméterről továbbá feltehető, hogy $0 < e < 1$, hiszen ha nem így lenne, akkor a háromszög csúcsainak átnevezésével előállítható ilyen helyzet (tompaszögű háromszögek esetében feltesszük, hogy AB a leghosszabb oldal).

Összefoglalva tehát az alapháromszög csúcsainak koordinátái:

$$(1) \quad A = [0, 0], \quad B = [1, 0], \quad C = [e, f].$$

Az A', B', C' pontok koordinátáinak meghatározásához abból indulunk ki, hogy azok az A_0, B_0, C_0 oldalfelezési pontokból az oldalvektorok kifelé mutató, az oldalhosszokkal arányos hosszú normálvektorainak végpontjai. Az arányossági tényező

legyen t . Így az A', B', C' pontok koordinátái:

$$\begin{aligned} A' &= \left[\frac{e+1}{2} + ft, \frac{f}{2} + t(1-e) \right], \\ B' &= \left[\frac{e}{2} - ft, \frac{f}{2} + te \right], \\ C' &= \left[\frac{1}{2}, -t \right]. \end{aligned}$$

Az AA', BB', CC' egyenesek a K pontban metszik egymást, amelynek koordinátáit egy kis számolás után a következő alakban kapjuk:

$$(2) \quad K = \left[\frac{ef + 2f^2t + f + 2et + 2e^2t + 4eft^2}{3f - 4et + 4f^2t + 4e^2t + 4t + 4ft^2}, \frac{(f + 2et)(2et - f - 2t)}{3f - 4et + 4e^2t + 4f^2t + 4t + 4ft^2} \right].$$

Az ABC háromszög súlypontjának (S) és magasságpontjának (M) koordinátái

$$(3) \quad S = \left[\frac{1+e}{3}, \frac{f}{3} \right],$$

illetve

$$(4) \quad M = \left[e, \frac{e(1-e)}{f} \right].$$

Lássuk akkor most a bizonyítás speciális eseteit.

i.) Az ABC háromszög egyenlőoldalú háromszög

Amennyiben az ABC háromszög egyenlőoldalú, akkor $e = 1/2$, és $f = \sqrt{3}/2$. Ezeket a (2) és (3) formulákba behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$K = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right], \quad \text{illetve} \quad S = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right].$$

A keresett mértani hely tehát a súlypont, ami tulajdonképpen egy szinguláris hiperbola.

ii.) Az ABC háromszög egyenlőszárú háromszög

Amennyiben az ABC háromszög egyenlőszárú, akkor $e = 1/2$, f pedig tetszőleges pozitív érték.

Ezeket a (2) képletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(5) \quad K = \left[\frac{1}{2}, -\frac{(f+t)(f+t)}{(3+4ft)(f+t)} \right].$$

Tehát a keresett mértani hely minden pontjának x koordinátája $1/2$. Az $\frac{f+t}{3+4ft}$ racionális törtkifejezésről pedig látjuk, hogy a $t = -3/(4f)$ körül minden valós értéket felvesz, ezért a mértani hely az $x = 1/2$ egyenletű egyenes.

iii.) Az ABC háromszög általános háromszög

A 3. tétel alapján a keresett mértani hely tartalmazza az ABC háromszög csúcsait, az S súlypontját és az M magasságpontját. Ezek nem esnek egy egyenesre (azokat az előző esetekben tárgyaltuk)³, ezért ez az öt pont egyértelműen meghatároz egy reguláris κ kúpszeletet. Bizonyítandó ezek után, hogy

- a K pont rajta van a κ kúpszeleten, és
- a κ kúpszelet hiperbola.

Az egyszerűbb alak kedvéért jelöljük az A, B, C, M, S, K pontok x koordinátáit sorra $x_A, x_B, x_C, x_M, x_S, x_K$ -val, és $y_A, y_B, y_C, y_M, y_S, y_K$ -val az y koordinátáit. Ekkor az, hogy a K pont a κ kúpszeletre esik ekvivalens azzal az állítással, hogy az

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_A^2 & x_A y_A & y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 & x_B y_B & y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 & x_C y_C & y_C^2 & x_C & y_C & 1 \\ x_F^2 & x_F y_F & y_F^2 & x_F & y_F & 1 \\ x_S^2 & x_S y_S & y_S^2 & x_S & y_S & 1 \\ x_K^2 & x_K y_K & y_K^2 & x_K & y_K & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 0 (lásd [2]-ben a 48.§-t).

A koordináták (1), (3), (4) és (2)-ből való behelyettesítése után a kiszámítandó hatodrendű mátrix első sora szerinti kifejtéssel ötödrendű mátrixszá válik. Ezt megintcsak az első sor szerint kifejtve s további (hosszas) algebrai átalakítások után megkapjuk, hogy bármilyen e, f, t valós paraméterek esetén $|\mathbf{M}| = 0$, azaz a K pontok mértani helye azonos a κ kúpszelettel.⁴

Azt, hogy κ hiperbola, szintén belátható volna algebrai módszerekkel: az $|\mathbf{M}| = 0$ egyenletbe a K pont koordinátái helyett az általános $[x, y]$ koordinátákat helyettesítve és kifejtve a mátrixot az utolsó sora szerint, megkaphatjuk a kúpszelet általános egyenletét. Az együtthatók kiszámításával (két paramétert tartalmazó ötödrendű determinánsok) további algebrai eszközök használatával eldönthetővé válna annak hiperbola volta.

³ További kivételt képezhetnek a derékszögű háromszögek – az M magasságpont egybeesik valamelyik csúccsal – ennek elkerülése céljából az M magasságpont helyett használhatnánk az ABC háromszög F Fermat-féle pontját, lévén azzal nem áll elő ilyen probléma. A megoldás menetét azonban ez a csere nem változtatná meg, csak a számítást tenné igényesebbé.

⁴ Megjegyezzük, hogy az $\mathbf{M}$ mátrix determinánsának értéke szimbolikusan számoló computer-algebrai (*Maple*, *Mathematica*, ...) rendszerekkel könnyedén kiszámítható.

Az algebrai módszer helyett azonban mi más megoldást választunk: Az euklideszi síkot kibővítjük annak ideális (végtelenbeli) egyenesével és igazoljuk, hogy a κ kúpszeletnek két különböző ideális pontja van.

A κ kúpszeletnek, mint a K pontok mértani helyének csakis akkor lehet végtelenbeli pontja, ha az AA' , BB' , CC' egyenesek párhuzamosak, lévén hogy a K pont ezek metszéspontja. Az egyenesek párhuzamossága pedig ekvivalens azzal, hogy a $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ vektorok csak skalár szorzótényezőben térhetnek el egymástól. Az $\overrightarrow{AA'}$ és $\overrightarrow{CC'}$ koordinátáihoz, tehát az e , f , és t paraméterekhez léteznie kell olyan μ valós számnak, amelyre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\frac{e+1}{2} + ft &= \mu \left(e - \frac{1}{2} \right) \\ \frac{f}{2} + (1-e)t &= \mu(f+t).\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert μ kiküszöbölésével t -re megoldva egy másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldásai:

$$(6) \quad t_{1,2} = \frac{e-1-f^2-e^2 \pm \sqrt{D}}{2f},$$

ahol az egyenlet diszkriminánsa

$$D = 3e^2 - 2e - 2ef^2 - 2e^3 + 1 - f^2 + f^4 + 2e^2f^2 + e^4.$$

Ez esetben bizonyítandó, hogy a diszkrimináns értéke minden esetben pozitív, ugyanis ekkor két különböző gyököt kapunk, ami két ideális pontnak felel meg – vagyis jelen esetben κ hiperbola kell legyen. A $D = 0$ egyenlet megoldásával megtalálhatók lesznek mindazon tartományok, ahol D pozitív.

Kezeljük a D diszkrimináns e függvényeként. Oldjuk meg tehát az

$$(7) \quad 3e^2 - 2e - 2ef^2 - 2e^3 + 1 - f^2 + f^4 + 2e^2f^2 + e^4 = 0$$

egyenletet az e ismeretlenre! Ekkor a gyököket az

$$e_{1,2,3,4} = \frac{1 \pm i(\sqrt{3} \pm 2f)}{2}$$

alakban kapva jól látjuk, hogy azok csak akkor valósak, ha $\sqrt{3} \pm 2f = 0$, azaz ha $f = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, s így $e = \frac{1}{2}$. A C pont ezen koordinátákat csak akkor veheti fel ha az ABC egyenlőoldalú háromszög volna, ám azt már megtárgyaltuk az i.) esetben.

Ha azonban az ABC háromszög nem egyenlőoldalú, akkor $f \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, és ekkor (7)-nek nem lehetnek valós gyökei e -re nézve. Ebből következik, hogy D minden e -re nézve vagy mindig pozitív, vagy mindig negatív.

A kérdés eldöntéséhez elégséges egy tetszőleges megfelelő C pontot választanunk. Legyen hát $e = \frac{1}{3}$ és $f = \frac{1}{3}$. Ekkor $D = \frac{37}{81}$, ami pozitív szám.

Mindezeket összevetve azt kapjuk, hogy a D diszkimináns minden megfelelő esetben pozitív, vagyis két különböző valós t paraméterérték is van, amelyre a κ kúpszeletnek K az ideális pontja lesz, ezért a vizsgált esetben a κ reguláris hiperbola!

Az aszimptoták irányvektorai megegyeznek a CC' egyenes $\overrightarrow{CC'}$ irányvektorával, ha abba a kiszámított t_1 és t_2 értékeket helyettesítjük be. A kapott

$$\left(\frac{1}{2} + e, f + t_1\right), \quad \left(\frac{1}{2} + e, f + t_2\right)$$

irányvektorok skaláris szorzata

$$(8) \quad \left(\frac{1}{2} + e, f + t_1\right) \left(\frac{1}{2} + e, f + t_2\right) = \left(\frac{1}{2} + e\right)^2 + (f + t_1)(f + t_2)$$

amibe (6) megfelelő értékeit helyettesítve (8)-ra azt kapjuk, hogy az a paraméterektől függetlenül mindig 0, tehát a κ hiperbola aszimptotái egymásra merőlegesek. ■

Befejező megjegyzések. A fenti állítás bizonyítása nem haladja meg az egyetemi tanulmányok tudásszintjét, tehát a leírtak prezentálásának nincsenek ismereti korlátai.

A témával kapcsolatban ajánlanám az érdeklődők figyelmébe az alábbi internetes oldalakat: [5], [6], [7], ahol a Kiepert hiperbolán kívül további érdekes háromszög-geometriai állítások, hivatkozások is találhatók. Az [5] hivatkozás math-world.wolfram.com/KiepertHyperbola.html oldalán megtalálható a jelen cikk 4. tételének bizonyítása is trilineáris koordináták felhasználásával.

Végezetül pár szóban két rövid módszertani gondolatot jegyeznék meg:

1. A fentiek kiindulási alapjául egy állítás továbbgondolása szolgált. Ekkor tulajdonképpen egy matematikai gondolkodási műveletet az *általánosítást* alkalmaztuk [4]. A matematika tanítása közben nem árt néha felhívni a figyelmet az ilyen műveletekre, amelyek a matematikai gondolkodás alapjait képezik. Egy-egy feladat, matematikai probléma további vizsgálata nem csupán ismereteink szaporításában játszhat szerepet, hanem a matematikai gondolkodásunk mélyreható elemzésének is hasznos eszköze lehet!

2. A Kiepert hiperbola létének és tulajdonságának bizonyítása során több matematikai diszciplína elemeit is használtuk: analitikus geometria, lineáris algebra, projektív geometria és valós függvénytan. Amint ez látszik, az egyes részterületek kiegészítik egymást, csak így együtt képeznek egységet. A matematikát nem csak mint izolált részterületek összességét kell tanítani, hanem megmutatni azt is, hogy ezek egymással kölcsönösen összefüggnek!

Irodalom

- [1] Kimberling, C.: *Triangel centers and central trangles*. Winnipeg, The ISSN for Congress Numerantium is 0384-9864, Volume 129, 1998.
- [2] Hajós Gy.: *Bevezetés a geometriába*. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, ISBN 963-18-6771-4, 1995.
- [3] Csiba P.: *A háromszögek Fermat- és Napóleon-féle pontjainak általánosítása*. Szeged, Polygon XI. kötet 2. szám, 2002.
- [4] Pólya Gy.: *Agondolkodás iskolája*. Budapest, Gondolat, 1977.
- [5] mathworld.wolfram.com/KiepertHyperbola.html
- [6] www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Kiepert.shtml
- [7] <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>

Csiba Péter, Selye János Egyetem, Matematika Tanszék, ul. Roľníckej školy 1519, Komárno, 945 01, Szlovákia