

ÚJABB STATISZTIKAI VIZSGÁLATOK AZ ORNSTEIN–UHLENBECK-FOLYAMATRÓL I. ELMÉLETI HÁTTER

FEGYVERNEKI SÁNDOR

Miskolc

Ebben a dolgozatban azzal a klasszikus problémával foglalkozom, hogy hogyan becsülhetők együtt a stacionárius Gauss–Markov- (Ornstein–Uhlenbeck-) folyamat paraméterei. Ezen folyamat esetén számos probléma adódik a maximum-likelihood becslések eloszlásának vizsgálatával és a paraméterekre adandó konfidenciaintervallumok meghatározásával, ha a csillapítási tényező tart nullához. A cikk célja előkészíteni a szimulációs vizsgálatokhoz szükséges elméleti eredményeket. Bebizonyítom a maximum-likelihood becslés egyértelmű létezését (stacionárius esetben) és megadom a becslés meghatározására szolgáló numerikus módszert. A dolgozat további részében az aszimptotikus esetek vizsgálatához szükséges eloszlásokat, becsléseket és sorfejtéseket adom meg különös tekintettel a végpontokhoz kapcsolódó becslésekre.

1. Bevezetés

A fizikai folyamatok egy jelentős részében a folyamat lefolyását nem a

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x(t) \quad (\lambda > 0)$$

differenciálegyenlet írja le (melynek megoldása $x = x_0 e^{-\lambda t}$, $x_0 \in \mathbf{R}$), hanem egy ún. sztochasztikus differenciálegyenlet

$$(1) \quad d\xi(t) = -\lambda \xi(t) dt + \sigma_w dw(t) \quad (E(\xi(t)) = E(w(t)) = 0),$$

vagy integrálalakban

$$\xi(t) - \xi(t_0) = -\lambda \int_{t_0}^t \xi(s) ds + \sigma_w (w(t) - w(t_0)),$$

ahol $\lambda > 0$ és $\sigma_w > 0$. Továbbá a $\xi(t_0)$ normális eloszlású és független a $w(t)$ standard Wiener-folyamattól, ha $t > t_0$. Ekkor igaz a következő tétel.

1.1. TÉTEL (Arató [1]). A $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor stacionárius Gauss–Markov-folyamat, ha az (1) sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása a következő értelemben:

(i) Ha $\xi(t)$ folytonos stacionárius Gauss–Markov-folyamat, akkor létezik $\lambda > 0$ és egy Wiener-folyamat, melyre $E(w(t)) = 0$, $E(w^2(t)) = t$ úgy, hogy (1) teljesül és

$$(2) \quad R(t) = E(\xi(s+t)\xi(s)) = \sigma_\xi^2 e^{-\lambda t} \quad (t > 0),$$

ahol

$$(3) \quad E(\xi^2(s)) = \sigma_\xi^2 = \frac{\sigma_w^2}{2\lambda}.$$

(ii) Ha $\lambda > 0$ és $\sigma_w > 0$, akkor csak az (1) $\xi(t)$ folytonos stacionárius megoldása stacionárius Gauss–Markov-folyamat, amelynek kovarianciafüggvényére teljesül (2) és (3). Amikor $\xi(t)$ $t > t_0$ esetén definiált, akkor $\xi(t_0)$ olyan normális eloszlású, amelyre

$$E(\xi(t_0)) = 0, \quad E(\xi^2(t_0)) = \sigma_\xi^2 = \frac{\sigma_w^2}{2\lambda},$$

és független a $w(t)$ Wiener-folyamattól, ha $t > t_0$. □

Legyen $m \in \mathbf{R}$ és $\eta(t) = \xi(t) + m$, azaz

$$(4) \quad d(\eta(t) - m) = -\lambda(\eta(t) - m) dt + \sigma_w dw(t).$$

Ekkor az $\eta(t)$ -folyamat három paraméter, az m , λ és a σ_w^2 által meghatározott. Feladatunk ezek meghatározása (becslése). A feladat két paraméterre egyszerűsödik a következő állítás alapján.

1.2. TÉTEL (Arató [1]). Legyen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ egy felosztása a $[0, T]$ intervallumnak, ekkor

$$(5) \quad \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sum [\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})]^2 = \sigma_w^2 T \quad (1 \text{ valószínűséggel}). \quad \square$$

(5) alapján a σ_w^2 „diffúziós együttható” egyetlen realizáció alapján 1 valószínűséggel meghatározott.

Két feltétel kell ahhoz, hogy a paraméterek jól becsülhetők legyenek egyetlen trajektória alapján. Az egyik az általánosított Markov-tulajdonság, a másik a metrikus tranzitivitás.

A stacionárius Gauss–Markov-folyamat teljesíti a Markov-tulajdonságot. A metrikus tranzitivitás pedig abból adódik, hogy

$$R(t) = \frac{\sigma_w^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iut}}{|\lambda + iu|^2} du,$$

így a folyamat spektrál sűrűségfüggvénye

$$\frac{\sigma_w^2}{2\pi} \frac{1}{|\lambda + iu|^2}.$$

A független megfigyeléssorozatok esetén a maximum-likelihood módszer alkalmazásához szükség van a mintaelemek együttes sűrűségfüggvényének az ismeretlen paraméterektől függő seregének meghatározására. A folyamatok statisztikájában ennek felel meg a trajektóriák függvényterén a folyamat által generált, paraméterektől függő mértékseregnek valamilyen standard mértékre vonatkozó Radon-Nikodym-deriváltja.

Gauss-folyamatok esetén érvényes a Feldman-Hájek-féle dichotómia elv: *ugyanazon a téren értelmezett két Gauss-mérték vagy szinguláris, vagy ekvivalens*. Ez a tény azt sugallja, hogy standard mértékül valamilyen analitikusan jól leírható és a vizsgálandó folyamattal egyszerű összefüggésben álló Gauss-mértéket válasszunk.

Az (5) összefüggés alapján tudjuk, hogy az azonos diffúziós együtthatójú stacionárius Gauss-Markov-folyamatok ekvivalens mértékeket generálnak. Továbbá ezek a mértékek ekvivalensek az ugyanilyen szórásnégyzetű Wiener-mértékkel. A $\xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$), realizációk $\mathbf{R}_\xi$ tere felfogható, mint a $\xi(0)$ valós számegyenes és a $\xi(t) - \xi(0)$ realizációk terének szorzata. Jelölje $\mathbf{W}$ a Wiener-féle mértéket $(x(0), \sigma_w^2)$ paraméterekkel a $0 < t \leq T$ intervallumon értelmezett folytonos függvények terén, $\mathbf{L}$ pedig a Lebesgue-mértéket a számegyenesen. Legyen $\mathbf{V} = \mathbf{L} \times \mathbf{W}$. Ha $\mathbf{P}_\xi$ jelöli a $\xi(t)$ stacionárius Gauss-Markov-folyamathoz tartozó mértéket, akkor a $\mathbf{P}_\xi$ mérték abszolút folytonos a $\mathbf{V}$ mértékre nézve, és a $\mathbf{V}$ mérték szerinti Radon-Nikodym-deriváltja:

$$(6) \quad \frac{d\mathbf{P}_\xi}{d\mathbf{V}}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{\sigma_w} \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2\sigma_w^2} \int_0^T x^2(t) dt + \frac{\lambda T}{2} - \frac{\lambda}{2\sigma_w^2} [x^2(T) + x^2(0)] \right\}.$$

Legyen $\xi(t)$ az (1) egyenlet megoldása, míg $\eta(t)$ a (4) egyenleté. Továbbá legyen $\mathbf{P}_0$ és $\mathbf{P}_m$ a $\xi(t)$ - és $\eta(t)$ -folyamatok által generált mértékek a $[0, T]$ intervallumon folytonos függvények terén, akkor

$$(7) \quad \frac{d\mathbf{P}_m}{d\mathbf{P}_0}(x) = \exp \left\{ -\frac{\lambda m}{2\sigma_w^2} \left[x(0) + x(T) + \lambda \int_0^T x(t) dt + m \left(1 + \frac{\lambda T}{2} \right) \right] \right\}.$$

A (6) és (7) formulákat úgy kell értelmezni, hogy majdnem minden Wiener-trajektóriára megadják a Radon-Nikodym-derivált értékét.

Ha az m és a λ paraméter ismeretlen, akkor a Radon-Nikodym-derivált a következőképpen adható meg:

$$(8) \quad \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{\sigma_w} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\sigma_w^2} \left[s_1^2 + \frac{1}{2} \lambda T s_2^2 + (m - m_1)^2 + \frac{\lambda T}{2} (m - m_2)^2 - \frac{1}{2} \sigma_w^2 T \right] \right\},$$

ahol

$$m_1 = \frac{\eta(0) + \eta(T)}{2},$$

$$m_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt,$$

$$s_1^2 = \frac{[\eta(0) - m_1]^2 + [\eta(T) - m_1]^2}{2} = \frac{[\eta(T) - \eta(0)]^2}{4},$$

$$s_2^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [\eta(t) - m_2]^2 dt.$$

A (8) formula alapján következik, hogy m_1 , m_2 , s_1^2 és s_2^2 rendszer egy elégséges statisztika. A maximum-likelihood egyenletek pedig a következők:

$$(9) \quad \frac{\sigma_w^2}{2\lambda} (1 + \lambda T) - s_1^2 - \lambda T s_2^2 - (m - m_1)^2 - \lambda T (m - m_2)^2 = 0,$$

$$(10) \quad 2(m - m_1) + \lambda T (m - m_2) = 0.$$

A becslések eloszlásának vizsgálatához meg kell adnunk a karakterisztikus függvényt. A helyzetet bonyolítja, hogy ez csak abban az esetben adott, amikor $m = 0$. Tehát az elégséges statisztikák karakterisztikus függvényéről a következőt tudhatjuk:

$$\psi(u, v, w, z) = E(\exp[i(um_1 + vs_1^2 + wm_2 + zs_2^2)]) = \frac{\sqrt{2\lambda e^\kappa \Lambda}}{\sqrt{T}\psi(v, z)} \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ -\frac{uw + w^2}{\Lambda} - \sigma_w^2 T + \left(\frac{i u}{2} - T \sigma_w^2 \frac{2vw + \frac{i w \lambda}{\sigma_w^2}}{\Lambda} \right) (\Psi_1 + \Psi_2) \right\} \right],$$

ahol

$$\Psi_1 = \left[\frac{i u \sigma_w^2}{2} (1 + e^{-\Lambda}) - i w \sigma_w^2 \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} \right] \frac{(\kappa - T \sigma_w^2 i v + \Lambda) e^\Lambda - (\kappa - T \sigma_w^2 i v - \Lambda)}{T \psi(v, z)},$$

$$\Psi_2 = \left[\frac{i u \sigma_w^2}{2} (1 + e^\Lambda) - i w \sigma_w^2 \frac{1 - e^\Lambda}{\Lambda} \right] \frac{(\kappa - T \sigma_w^2 i v + \Lambda) - (\kappa - T \sigma_w^2 i v - \Lambda) e^{-\Lambda}}{T \psi(v, z)},$$

$$\Lambda = \sqrt{\kappa^2 - 2T^2 \sigma_w^2 i z}$$

$$\psi(v, z) = \frac{1}{T^2} [(\kappa - T \sigma_w^2 i v + \Lambda)^2 e^\Lambda - (\kappa - T \sigma_w^2 i v - \Lambda)^2 e^{-\Lambda}],$$

$$s_{01}^2 = \frac{[\eta(0) - m]^2 + [\eta(T) - m]^2}{2} \quad \text{és} \quad s_{02}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [\eta(t) - m]^2 dt.$$

A dolgozat hátralévő része a következőképpen szerveződik. A 2. szakaszban belátom, hogy mindig létezik egyértelmű, pozitív maximum-likelihood becslés a csillapítási tényezőre. Megadok két numerikus eljárást ennek meghatározására. A 3. szakaszban az s_1^2 statisztika eloszlását adom meg. Ez fontos, mert a szakirodalom alapján a reciproka felmerült a κ becsléseként, ha $\kappa \rightarrow 0$. Ezenkívül a segítségével könnyen bemutatható, hogy a 0 közelében nincs nullától különböző alsó határa a κ paraméterre készített konfidenciaintervallumnak. A 4. szakaszban néhány, az elégséges statisztika rendszerhez kötődő eloszlás paraméterének a becslését adom meg. Az 5. szakasz pedig az aszimptotikus ($\lambda \rightarrow 0$ és $\lambda \rightarrow +\infty$) esetek könnyebb megértését és vizsgálatát elősegítő általánosított sorfejtéseket tartalmazza. A szimuláció és az eredmények leírását, kiértékelését a cikk II. része tartalmazza. (Ez utóbbi a folyóirat következő számában jelenik meg – a szerk.)

2. A maximum-likelihood becslés meghatározása

Ha mind a két paraméter ismeretlen, akkor láttuk, hogy a (9)–(10) egyenletrendszer adja meg a maximum-likelihood becsléseket. Vezessük be a $\kappa = \lambda T$ jelölést és átalakítva az egyenletrendszert kapjuk, hogy

$$(11) \quad 2(m - m_1) + \kappa(m - m_2) = 0,$$

$$(12) \quad [2s_2^2 + 2(m - m_2)^2]\kappa^2 + [2s_1^2 + 2(m - m_1)^2 - \sigma_w^2 T]\kappa - \sigma_w^2 T = 0.$$

Az első egyenletből az m könnyen kifejezhető:

$$(13) \quad m = \frac{2m_1 + \kappa m_2}{2 + \kappa}.$$

Ennek segítségével κ -ra egy negyedfokú egyenlet adódik:

$$(14) \quad 2s_2^2\kappa^4 + [8s_2^2 + 2s_1^2 + 2(m_1 - m_2)^2 - \sigma_w^2 T]\kappa^3 + \\ + [8s_2^2 + 8s_1^2 + 8(m_1 - m_2)^2 - 5\sigma_w^2 T]\kappa^2 + [8s_1^2 - 8\sigma_w^2 T]\kappa - 4\sigma_w^2 T = 0.$$

Számunkra csak a $\kappa > 0$ (stacionárius) eset fogadható el, így meg kell vizsgálnunk a gyökök elhelyezkedését. A következőkben belátjuk, hogy csak egy pozitív gyök van, s megadunk két módszert is, amelyek alkalmasak ennek a gyöknek a meghatározására.

Jelöljük a (13) negyedfokú egyenlet együtthatóit a következőképpen:

$$A = 2s_2^2,$$

$$\begin{aligned}
B &= 8s_2^2 + 2s_1^2 + 2(m_1 - m_2)^2 - \sigma_w^2 T, \\
rC &= 8s_2^2 + 8s_1^2 + 8(m_1 - m_2)^2 - 5\sigma_w^2 T, \\
rD &= 8s_1^2 - 8\sigma_w^2 T, \\
rE &= -4\sigma_w^2 T.
\end{aligned}$$

Ekkor a következő összefüggéseket tudjuk felírni:

$$\begin{aligned}
A &> 0, \\
4B &= 32s_2^2 + 8s_1^2 + 8(m_1 - m_2)^2 - 4\sigma_w^2 T, \\
C &= 4B - 24s_2^2 - \sigma_w^2 T, \\
D &= C - 8s_2^2 - 3\sigma_w^2 T - 8(m_1 - m_2)^2, \\
E &< 0.
\end{aligned}$$

Továbbá ha $B < 0$, akkor $C < 0$, és ha $C < 0$, akkor $D < 0$, azaz rögtön látszik, hogy a (14) egyenletben szereplő polinomnak pontosan egy előjelváltása van. A Descartes-féle előjelszabály alapján az algebraiban jól ismert a következő – a gyökök számára vonatkozó – állítás, amely felírható a Pólya–Szegő [11] II. kötet, V. rész, 36–37. feladat alapján.

2.1. TÉTEL (Pólya–Szegő [11]). *Ha z a polinom pozitív zérushelyeinek a száma, w pedig az együtthatókból álló sorozat előjelváltásainak a száma, akkor $w - z$ egy nemnegatív páros szám.* $\square$

Ezzel beláttuk a következő állítást:

2.2. ÁLLÍTÁS. *A (14) negyedfokú egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van, azaz a stacionárius megoldás egyértelmű.* $\square$

A negyedfokú polinom gyökei meghatározhatók a jól ismert algebrai módszerrel, ha az együtthatók pontosan adottak. Mivel nekünk nincs szükségünk az összes gyökre, így egyszerűbb a numerikus közelítés.

Szidarovszky [12] dolgozata alapján gyökkereső eljárásként azonnal alkalmazható a Newton-módszer. Mivel számunkra csak a (14) egyenlet legnagyobb gyöke érdekes, így az eljárás a következő:

Legyen α_n az

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

polinom legnagyobb gyöke és $x_0 > \alpha_n$. Az x_0 kezdeti közelítésből elkészítjük az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton sorozatot. Legyen $\alpha_n^{(k)} = x_k - \alpha_n$. A [12] dolgozat állításaiból következik, hogy

$$\alpha_n^{(k)} > 0 \quad (\text{minden } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}),$$

$$\alpha_n^{(k)} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^k (x_0 - \alpha_n), \quad \text{azaz } x_k \rightarrow \alpha_n,$$

$$\alpha_n^{(k)} \leq (n-1)(x_{k-1} - x_k),$$

mely utóbbi becslés nem élesíthető általános esetben.

Az x_0 érték, mint a polinom gyökeinek felső korlátja sokféleképpen meghatározható. Lagrange-tételként ismert a következő állítás a polinom pozitív gyökeinek egy felső korlátjának a meghatározására.

2.3. TÉTEL (Kuros [10]). Legyen az

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

valós együtthatós polinom, ahol $a_n > 0$. Legyen továbbá a_k ($k \leq n-1$) az első negatív együttható. Legyen végül B a negatív együtthatók abszolút értékei közül a legnagyobb. Ekkor az

$$1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}}$$

szám az $f(x)$ polinom pozitív gyökeinek felső korlátja. □

Megjegyzés. Ha nincs negatív együttható, akkor nincs pozitív gyök. Ez, mint láttuk, a mi esetünkben nem fordulhat elő.

Habár ezek alapján a maximum-likelihood becslés már meghatározható, mégis vizsgáljuk meg a (14) egyenlet negyedfokú polinomját, mint függvényt, mert látni fogjuk, hogy közvetlenül is belátható, hogy csak egy pozitív gyöke van az egyenletnek. Egyszerű átalakítások után értékes összefüggések derülnek ki, amelyek fontosak a szimulációs eredmények feldolgozásánál. Továbbá megadunk egy másik módszert a stacionárius gyök meghatározására.

Legyen

$$\begin{aligned} f(x) = & 2s_2^2 x^4 + [8s_2^2 + 2s_1^2 + 2(m_1 - m_2)^2 - \sigma_w^2 T] x^3 + \\ & + [8s_2^2 + 8s_1^2 + 8(m_1 - m_2)^2 - 5\sigma_w^2 T] x^2 + [8s_1^2 - 8\sigma_w^2 T] x - 4\sigma_w^2 T. \end{aligned}$$

Abból, hogy $f(0) = -4\sigma_w^2 T$, tudjuk, hogy létezik pozitív gyök (a főegyüttható pozitív). Továbbá vegyük észre a (11)–(12) egyenletrendszerben, ha $m_1 = m_2$, akkor egyrészt $m = m_1 = m_2$, másrészt ekkor κ -ra az egyenlet másodfokúra redukálható. Ebben az esetben a $\kappa = -2$ kétszeres gyöke a negyedfokú egyenletnek. Ezenkívül

$$f(-2) = 16(m_1 - m_2)^2.$$

Ezek adták azt az ötletet, hogy rendezzük át függvényünket a következő alakba:

$$f(x) = \{2s_2^2x^2 + [2s_1^2 + 2(m_1 - m_2)^2 - \sigma_w^2T]x - \sigma_w^2T\}(x+2)^2 - 8(m_1 - m_2)^2x.$$

Ebből is jól látszik, hogy

(1) ha $m_1 = m_2$, akkor a -2 kétszeres gyök, és ezenkívül létezik egy pozitív és egy negatív gyök is;

(2) ha $m_1 \neq m_2$, akkor az $f(x) = 0$ egyenlet átrendezhető a következőképpen:

$$(15) \quad \frac{x}{(x+2)^2} = \frac{1}{8(m_1 - m_2)^2} \{2s_2^2x^2 + [2s_1^2 + 2(m_1 - m_2)^2 - \sigma_w^2T]x - \sigma_w^2T\}.$$

A (15) egyenlet bal oldala könnyen ábrázolható, hiszen a következő jellemzők állapíthatók meg:

Racionális törtfüggvény, amelynek kétszeres pólus helye van -2 -nél, zérushelye 0 -nál, maximuma van 2 -nél és a maximum $\frac{1}{8}$, inflexió helye van 4 -nél, a $(-\infty, 4]$ intervallumon alulról konkáv, míg a $[4, +\infty)$ intervallumon konvex. A határértéke $\pm\infty$ esetén 0 (1. ábra). A függvényvizsgálat alapján jól látható, hogy a függvény egy viszonylag szűk intervallumban változik, ha $x > 0$.

A (15) egyenlet jobb oldalának az alakja is könnyen meghatározható, hiszen egy parabola, amelynek főegyütthatója pozitív, míg a konstans negatív, így pozitív és negatív x -tengelymetszete is van.

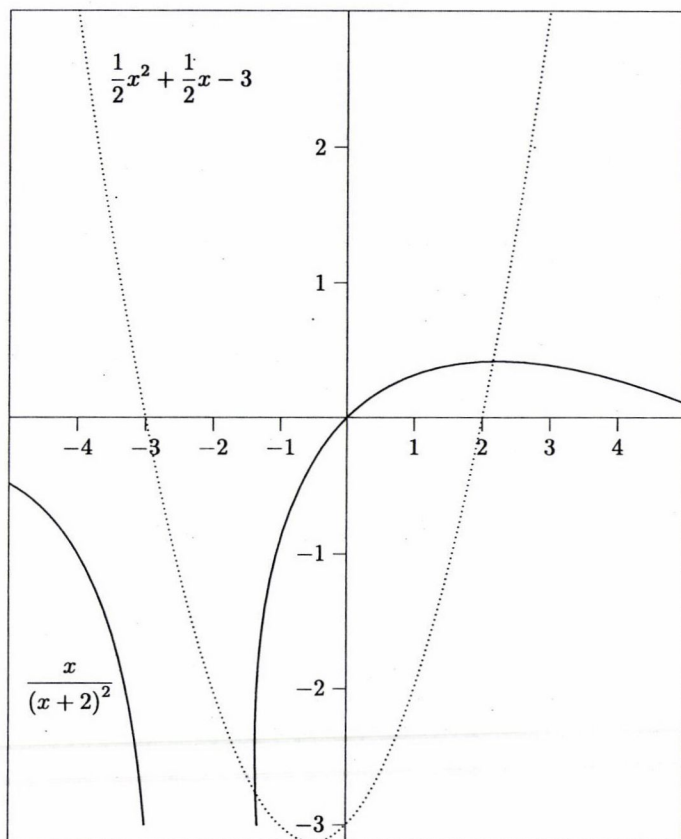
Ez viszont azt jelenti, hogy az $x > 0$ félsíkon pontosan egy metszéspontja van a két függvénynek.

A pozitív gyök meghatározására a következő iterációt is használhatjuk:

$$\begin{aligned} m^{(0)} &= m_2, \\ \kappa^{(k)} &= \frac{\sigma_w^2T - 2s_1^2 - 2(m^{(k)} - m_1)^2 +}{2[2s_2^2 + 2(m^{(k)} - m_2)^2]} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{[2s_1^2 + 2(m^{(k)} - m_1)^2 - \sigma_w^2T]^2 + 8\sigma_w^2T[s_2^2 + (m^{(k)} - m_2)^2]}}{2[2s_2^2 + 2(m^{(k)} - m_2)^2]}, \\ m^{(k+1)} &= \frac{m_1 + \kappa^{(k)}m_2}{2 + \kappa^{(k)}}. \end{aligned}$$

Ez a módszer egyszerűen az első egyenletből kifejezett m értéket behelyettesítve megoldja a másodfokú egyenletet κ -ra, s ezt folytatja, amíg valamilyen megállítási szabály alapján eléri a megfelelő pontosságot. A továbbiakban „gyökös” iterációként hivatkozunk rá.

A szimuláció során összehasonlítjuk a két módszer esetén az iterációk számát és a gyorsaságot. Itt az összehasonlításból csak annyit emelünk ki, hogy a szimuláció



1. ábra.

során alkalmazott pontosság mellett a két módszer által meghatározott gyökközelítések eltérése kisebb volt, mint a pontosság. Továbbá a számolási idő – a használt számítógépes körülmények mellett – csak akkor volt összehasonlítható, ha ugyanazt a gyökkeresést 10^5 alkalommal megismételtük.

3. Az elégséges statisztikák eloszlásáról

Legyen a (ξ_1, ξ_2) véletlen vektor sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - m)^2 - 2\rho(x_1 - m)(x_2 - m) + (x_2 - m)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right\}.$$

Tehát a (ξ_1, ξ_2) véletlen vektor normális eloszlású, ahol

$$E(\xi_1) = E(\xi_2) = m, \quad D^2(\xi_1) = D^2(\xi_2) = \sigma^2 \quad \text{és} \quad r(\xi_1, \xi_2) = \rho.$$

Készítsük el a ξ_1, ξ_2 mintaelemekből (nem függetlenek) az átlagot (jelölje η_1) és a tapasztalati szórásnégyzet kétszeresét (jelölje η_2), azaz

$$\eta_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \eta_2 = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{2}.$$

Az (η_1, η_2) véletlen vektor sűrűségfüggvényének meghatározásához a megfelelő transzformációk:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2}.$$

Ez a transzformáció leképezi az $A = \mathbf{R}^2$ halmazt a $B = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in \mathbf{R}, y_2 \geq 0\}$ halmazra. De ez a transzformáció nem egyértelmű, és a B halmaz minden elemének (kivéve, amikor $y_2 = 0$) két elem felel meg az A halmazban. Így az inverzfüggvények két csoportja tartozik a transzformációhoz:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}}, & x_1 &= y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}}, \\ x_2 &= y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}}, & x_2 &= y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}}. \end{aligned}$$

Továbbá az A halmaz nem írható fel két olyan diszjunkt halmaz uniójaként, amelyek mindegyike esetén a transzformációnk a B halmazra képez. A problémát az A halmaznak azok a pontjai okozzák, amelyek az $x_1 = x_2$ egyenletű egyenesen fekszenek. Ekkor ugyanis $y_2 = 0$. Azonban mondhatjuk azt, hogy $f(x_1, x_2) = 0$ minden olyan pontban, ahol $x_1 = x_2$. Ezt megtehetjük anélkül, hogy az eloszlás megváltozna, hiszen ezen pontok valószínűsége 0.

Legyen tehát $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$. Ez a mintatér az

$$A_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < x_1\} \quad \text{és} \quad A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > x_1\}$$

diszjunkt halmazok uniója. Ekkor a transzformációnk kölcsönösen egyértelmű az A_i ($i = 1, 2$) halmazok mindegyikéről az új

$$B = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in \mathbf{R}, y_2 > 0\},$$

halmazra. Az (η_1, η_2) véletlen vektor sűrűségfüggvénye most már meghatározható. A transzformációk Jacobi-determinánsaira teljesül, hogy

$$|J_1| = |J_2| = \frac{1}{\sqrt{2}y_2}.$$

Tehát az (η_1, η_2) véletlen vektor sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{2}{\sqrt{2}y_2} \exp \left\{ -\frac{(2-2\rho)(y_1-m)^2 + (1+\rho)y_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1+\rho}} \exp \left\{ -\frac{(y_1-m)^2}{\sigma^2(1+\rho)} \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1-\rho}} \frac{1}{\sqrt{y_2}} \exp \left\{ -\frac{y_2}{2\sigma^2(1-\rho)} \right\}. \end{aligned}$$

Ebből jól látható, hogy η_1 és η_2 sztochasztikusan függetlenek (ez ismert független valószínűségi változók esetére). Továbbá η_1 eloszlása normális, amelyre

$$E(\eta_1) = m \quad \text{és} \quad D^2(\eta_1) = \frac{\sigma^2(1+\rho)}{2}.$$

Míg

$$\frac{\eta_2}{\sigma^2(1-\rho)},$$

eloszlása 1-szabadságfokú χ^2 .

Legyen $\eta = a\xi$ ($a > 0$), ekkor az eloszlásfüggvényekre, illetve a sűrűségfüggvényekre teljesül, hogy

$$F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x}{a}\right), \quad f_\eta(x) = \frac{1}{a}f_\xi\left(\frac{x}{a}\right),$$

azaz ha

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}},$$

ahol $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, és ha $a = \sigma^2(1-\rho)$, akkor

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\rho)}x} \exp \left\{ -\frac{x}{2\sigma^2(1-\rho)} \right\}.$$

Továbbá ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\eta_2}{2} = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{4},$$

sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sigma\sqrt{1-\rho}\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{y_2}{\sigma^2(1-\rho)}\right\}.$$

A függetlenség és a normális, illetve a χ^2 -eloszlás karakterisztikus függvénye alapján az (η_1, η_2) véletlen vektor karakterisztikus függvénye

$$E(\exp\{it_1\eta_1 + it_2\eta_2\}) = \frac{1}{\sqrt{1-2it_2\sigma^2(1-\rho)}} \exp\left\{it_1m - \frac{t_1^2\sigma^2(1+\rho)}{4}\right\}.$$

A Radon–Nikodym-deriváltakból adódó elégséges statisztikák között előfordul a

$$\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} = \left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{2}\right)^2 = \eta_1^2 + \frac{\eta_2}{2}.$$

Az eddigiek alapján viszonylag gyorsan meghatározható

$$\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}\right)$$

együttes karakterisztikus függvénye. Az egyszerűség kedvéért legyen $m = 0$ (az elégséges statisztikák együttes karakterisztikus függvénye is ebben az esetben adott a differenciálegyenlet módszer alapján). Tehát

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, t_2) &= E\left(\exp\left\{it_1\eta_1 + it_2\left(\eta_1^2 + \frac{\eta_2}{2}\right)\right\}\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{it_1y_1 + it_2(y_1^2 + y_2)} \frac{1}{\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{y_2}} e^{-\frac{y_1^2}{\sigma^2(1+\rho)} - \frac{y_2}{\sigma^2(1-\rho)}} dy_2 dy_1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-it_2\sigma^2(1-\rho)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_1y_1 + it_2y_1^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma\sqrt{1+\rho}} e^{-\frac{y_1^2}{\sigma^2(1+\rho)}} dy_1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-it_2\sigma^2(1-\rho)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma\sqrt{1+\rho}} e^{it_1y_1 + it_2y_1^2 - \frac{y_1^2}{\sigma^2(1+\rho)}} dy_1. \end{aligned}$$

Alakítsuk át az integrandusz kitevőjében lévő kifejezést a következőképpen:

$$it_1y_1 + it_2y_1^2 - \frac{y_1^2}{\sigma^2(1+\rho)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sigma^2(1+\rho)} [y_1^2 - it_2\sigma^2(1+\rho)y_1^2 - it_1\sigma^2(1+\rho)y_1] = \\
 &= -\frac{1}{\sigma^2(1+\rho)} [(1 - it_2\sigma^2(1+\rho))y_1^2 - it_1\sigma^2(1+\rho)y_1] = \\
 &= -\frac{1 - it_2\sigma^2(1+\rho)}{\sigma^2(1+\rho)} \left[y_1^2 - \frac{it_1\sigma^2(1+\rho)}{1 - it_2\sigma^2(1+\rho)} y_1 \right] = \\
 &= -\frac{1 - it_2\sigma^2(1+\rho)}{\sigma^2(1+\rho)} \left[\left(y_1 - \frac{it_1\sigma^2(1+\rho)}{2 - 2it_2\sigma^2(1+\rho)} \right)^2 - \left(\frac{it_1\sigma^2(1+\rho)}{2 - 2it_2\sigma^2(1+\rho)} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Ezen átalakításokat és azt felhasználva, hogy a

$$h(y_1) = \sqrt{\frac{1 - it_2\sigma^2(1+\rho)}{\pi\sigma^2(1+\rho)}} \exp \left\{ -\frac{1 - it_2\sigma^2(1+\rho)}{\sigma^2(1+\rho)} \left[\left(y_1 - \frac{it_1\sigma^2(1+\rho)}{2 - 2it_2\sigma^2(1+\rho)} \right)^2 \right] \right\}$$

függvény formálisan egy olyan normális eloszlás sűrűségfüggvényének tekinthető, amelynek várható értéke

$$\frac{it_1\sigma^2(1+\rho)}{2 - 2it_2\sigma^2(1+\rho)},$$

míg szórásnégyzete

$$\frac{\sigma^2(1+\rho)}{2 - 2it_2\sigma^2(1+\rho)},$$

s így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(y_1) dy_1 = 1.$$

Tehát a karakterisztikus függvény

$$(16) \quad \varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - it_2\sigma^2(1-\rho)}} \frac{1}{\sqrt{1 - it_2\sigma^2(1+\rho)}} \exp \left\{ \frac{-t_1^2\sigma^2(1+\rho)}{4 - 4it_2\sigma^2(1+\rho)} \right\}.$$

A 3. szakasz eredményeit a következőképpen összegezhethetjük.

3.1. ÁLLÍTÁS. Ha adott két korrelált, normális eloszlású valószínűségi változó, akkor a belőlük képzett számtani átlag és tapasztalati szórásnégyzet független. Továbbá a tapasztalati szórásnégyzet eloszlása egy olyan 1-szabadságfokú χ^2 eloszlás, melynek a várható értéke

$$\frac{\sigma^2(1-\rho)}{2}.$$

Ezenkívül a két valószínűségi változó négyzetösszege felbontható két olyan független 1-szabadságfokú χ^2 -eloszlású valószínűségi változó összegére, melyek várható értéke

$$\sigma^2(1-\rho), \quad \text{illetve} \quad \sigma^2(1+\rho). \quad \square$$

Megjegyzés. Ha m tetszőleges, akkor a (16) karakterisztikus függvény a következő:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - it_2\sigma^2(1 - \rho)}} \frac{1}{\sqrt{1 - it_2c}} \exp \left\{ -\frac{1}{c} \left(m^2 - \frac{(2m + it_1c)^2}{4 - 4it_2c} \right) \right\},$$

ahol $c = \sigma^2(1 + \rho)$. A $t_1 = 0$ esetén pedig

$$\frac{1}{\sqrt{1 - it_2\sigma^2(1 - \rho)}} \frac{1}{\sqrt{1 - it_2\sigma^2(1 + \rho)}} \exp \left\{ \frac{it_2m^2}{1 - it_2\sigma^2(1 + \rho)} \right\},$$

azaz a két valószínűségi változó négyzetösszege felbontható olyan centrális és nem-centrális 1-szabadságfokú χ^2 -eloszlású valószínűségi változók összegére, amelyek függetlenek.

4. A paraméterek becslése

Az eddigiek alapján látható, hogy a λ paraméter becsléseinek vizsgálatához szükségünk van az

$$(m_1 - m_2)^2, \quad s_1^2, \quad s_2^2$$

statisztikákhoz kötődő eloszlások paramétereinek a becslésére. A 3. szakasz alapján tudjuk, hogy s_1^2 eloszlása mindig 1-szabadságfokú χ^2 , míg Cox [5] szerint, ha a három paraméter mindegyike ismeretlen, akkor az s_2^2 a Karhunen–Loeve sorfejtés alapján reprezentálható, mint független nemcentrális χ^2 eloszlású valószínűségi változók súlyozott összege, ezért ebben a szakaszban összefoglaljuk szimulációk kiértékeléséhez, az aszimptotikus esetek vizsgálatához szükséges fogalmakat és eredményeket.

A szimuláció statisztikai vizsgálatához szükséges a χ_1^2 -eloszlású valószínűségi változó reciprokának az eloszlása és jellemzése.

Legyen ξ χ_1^2 -eloszlású és $\eta = \frac{1}{\xi}$, ekkor az eloszlásfüggvény, ha $x > 0$,

$$F_\eta(x) = 2 - 2\Phi \left(\sqrt{\frac{1}{x}} \right),$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Ezután meghatározzuk a skálaparaméter maximum-likelihood becslését:

Tehát a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független minta, amelyhez tartozó eloszlásfüggvény

$$F(x) = 2 - 2\Phi \left(\sqrt{\frac{\sigma}{x}} \right), \quad \text{ha } x > 0.$$

A megfelelő sűrűségfüggvény

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sigma}}{x\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{\sigma}{2x}},$$

amelyből a likelihood függvény

$$L(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \sigma) = -\sum_{i=1}^n \ln f(\xi_i) = -\frac{n}{2} \ln \sigma - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \ln \xi_i + \frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i}.$$

Ebből

$$\frac{dL}{d\sigma} = -\frac{n}{2\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\xi_i} = 0,$$

amelyből a skálaparaméter maximum-likelihood becslése

$$\hat{\sigma} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i}}.$$

Cox [5] alapján tudjuk, hogy az s_2^2 statisztika esetében a nemcentrális χ^2 -eloszlás paramétereinek a becslésével kell foglalkoznunk. A nemcentrális χ^2 -eloszlás tulajdonságainak, illetve a paraméterbecsléseknek egy kitűnő összefoglalása található a [9] könyvben. A paraméterek becslése során számos probléma vetődik fel, viszont számunkra az a fontos eset, amikor a szabadsági fok $r = 1$, és

$$E(\xi) = \mu, \quad D^2(\xi) = \sigma^2 \quad \text{és} \quad \eta = \xi^2,$$

ekkor az eloszlásfüggvény, a sűrűségfüggvény, a várható érték és a szórásnégyzet a következő:

$$F_\eta(x) = \Phi\left(\frac{\sqrt{x} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{x} - \mu}{\sigma}\right) \quad (x > 0),$$

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sigma} \left[\varphi\left(\frac{\sqrt{x} - \mu}{\sigma}\right) + \varphi\left(\frac{-\sqrt{x} - \mu}{\sigma}\right) \right] \quad (x > 0),$$

$$E(\eta) = \mu^2 + \sigma^2,$$

$$D^2(\eta) = \sigma^2(4\mu^2 + 2\sigma^2),$$

ahol φ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

A vizsgálatok azt mutatják, hogy már ekkor sem egyszerű numerikusan meghatározni μ és σ maximum-likelihood becslését (l. [9]). Viszont a momentumok

módszerének hatásfoka „kicsi”, ha a $\vartheta = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$ nemcentrálási paraméter közel van az egyhez vagy kisebb egynél. Egyszerűbb meghatározni a paramétereket, ha a

$$(17) \quad \sqrt{\eta} = |\sigma\xi + \mu|$$

eloszlásának paramétereit határozzuk meg. Ekkor a maximum-likelihood becsléseket meghatározó egyenletrendszer felírható a következő alakban:

$$\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \eta_i^2,$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \eta_i \operatorname{th} \left(\frac{\hat{\mu} \eta_i}{\hat{\sigma}^2} \right),$$

ahol $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ független minta eloszlása megegyezik a (17) valószínűségi változó eloszlásával. Az egyenletrendszer megoldására pedig a [6] cikkben leírt „ping-pong” algoritmust használjuk.

A szimulációs vizsgálataink egyik iránya, hogy a λ milyen „kis” értékei mellett használható a χ_1^2 -eloszlás a konfidenciaintervallum készítésére. Hiszen ha λ értéke „nagy”, akkor a határeloszlás-tételek szerint a normális eloszlás, míg a köztes értékekre a [2] cikkben megadott táblázatot használjuk.

Ha egy sztochasztikus modell csak közelítőleg teljesül, azaz ha a mintaelemek eloszlása csak megközelítően ismert, akkor szokás ún. robusztus módszereket alkalmazni. A [6] cikkben egy olyan robusztus paraméterbecslési eljárást adtam meg egy eloszlástípus hely- és skálaparaméterére, amely többek között jól alkalmazható a χ_1^2 típus reciprokának a vizsgálatára is. Továbbá jól használható a nemcentrális χ_1^2 esetén is. Ennek rövid leírása a szimulációs eredmények mellett található (a cikk II. részében).

5. Sorfejtések közel nemstacionárius esetben

A (15) egyenlet bal oldalán lévő függvény nagyban segíti az aszimptotikus kiértékelést, így megadjuk az általánosított sorbafejtését:

$$\frac{x}{(x+2)^2} = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{16}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{64}x^5 + O(x^6), & \text{ha } x \rightarrow 0, \\ \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{12}{x^3} - \frac{32}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right), & \text{ha } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Az elégséges statisztikák várható értékek és szórásnégyzetének általánosított sorbafejtése és az ebből adódó határértékek, ha $\kappa \rightarrow 0$, illetve $\kappa \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
 E(m_1^2) &= \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\kappa - \frac{1}{24}\kappa^2 + O(\kappa^3), & \text{ha } \kappa \rightarrow 0, \\ \frac{1}{4\kappa} + \frac{1}{4\kappa \exp(\kappa)}, & \text{ha } \kappa \rightarrow +\infty. \end{cases} \\
 E(m_2^2) &= \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\kappa - \frac{1}{120}\kappa^2 + O(\kappa^3), & \text{ha } \kappa \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{\kappa^3} + \frac{1}{\kappa^3 \exp(\kappa)}, & \text{ha } \kappa \rightarrow +\infty. \end{cases} \\
 E(m_1 m_2) &= \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\kappa - \frac{1}{48}\kappa^2 + O(\kappa^3), & \text{ha } \kappa \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2\kappa^2} - \frac{1}{2\kappa^2 \exp(\kappa)}, & \text{ha } \kappa \rightarrow +\infty. \end{cases} \\
 E((m_1 - m_2)^2) &= \begin{cases} \frac{1}{12} - \frac{1}{120}\kappa^2 + O(\kappa^3), & \text{ha } \kappa \rightarrow 0, \\ \frac{1}{4\kappa} - \frac{1}{\kappa^3} + \left(\frac{1}{4\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa^3} \right) \frac{1}{\exp(\kappa)}, & \text{ha } \kappa \rightarrow +\infty. \end{cases} \\
 E(s_1^2) &= \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\kappa + \frac{1}{24}\kappa^2 + O(\kappa^3), & \text{ha } \kappa \rightarrow 0, \\ \frac{1}{4\kappa} - \frac{1}{4\kappa \exp(\kappa)}, & \text{ha } \kappa \rightarrow +\infty, \end{cases} \\
 E(s_2^2) &= \begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{1}{24}\kappa + \frac{1}{120}\kappa^2 + O(\kappa^3), & \text{ha } \kappa \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa^3} - \frac{1}{\kappa^3 \exp(\kappa)}, & \text{ha } \kappa \rightarrow +\infty. \end{cases} \\
 D^2(s_2^2) &= \begin{cases} \frac{1}{45} - \frac{1}{60}\kappa + O(\kappa^2), & \text{ha } \kappa \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2\kappa^3} - \frac{9}{4\kappa^4} + \frac{3}{\kappa^5} + O\left(\frac{1}{\kappa^4 \exp(\kappa)}\right), & \text{ha } \kappa \rightarrow +\infty. \end{cases}
 \end{aligned}$$

A 3. szakaszban ismertetett eredmények alapján látható, hogy érdemes megadni a $\sigma^2(1 - \rho)$ és $\sigma^2(1 + \rho)$ értékekhez kötődő sorfejtéseket is, ha

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\lambda}, \quad \text{és} \quad \rho = e^{-\lambda}.$$

$$\frac{1 - e^{-\lambda}}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{12}\lambda^2 + O(\lambda^3), & \text{ha } \lambda \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda \exp(\lambda)}, & \text{ha } \lambda \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

$$\frac{1 + e^{-\lambda}}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{12}\lambda^2 + O(\lambda^3), & \text{ha } \lambda \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda \exp(\lambda)}, & \text{ha } \lambda \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Irodalomjegyzék

- [1] Arató, M., *Linear stochastic systems with constant coefficients* (Springer-Verlag, Berlin, 1982).
- [2] Arató, M., Kuki, A. and Szabó, A., Exact Distribution of Estimators of Parameters in Ornstein-Uhlenbeck Processes, *Computers Math. Applic.* **31** (1996), 45–54.
- [3] Baxter, G., A strong limit theorem for Gaussian process, *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 522–525.
- [4] Chan, N. H. and Wei, C. Z., Asymptotic inference for nearly nonstationary $AR(1)$, *Ann. Statist.* **15** (1987), 1050–1063.
- [5] Cox, D. D., Gaussian likelihood estimation for nearly nonstationary $AR(1)$ processes, *Ann. Stat.* **19** (1991), 1129–1142.
- [6] Fegyverneki, S., A special joint estimation of location and scale with applications, *Publ. Univ. of Miskolc, Series D. Natural Sciences, Mathematics* **39** (1999), 21–27.
- [7] Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J. and Stahel, W. A., *Robust statistics: the approach based on influence functions* (Wiley, New York, 1986).
- [8] Hogg, R. V. and Craig, A. T., *Introduction to mathematical statistics* (MacMillan, New York, 1969).
- [9] Johnson, N. L. and Kotz, S., *Distributions in statistics* (Wiley, New York, 1970).
- [10] Kuros, A. G., *Felsőbb algebra* (Tankönyvkiadó, Budapest 1967).
- [11] Pólya, G. and Szegő, G., *Problems and Theorems in Analysis II* (Springer, New York 1976).
- [12] Szidarovszky, F., Valós gyökökkel rendelkező polinomok gyökeinek meghatározása Newton módszerével, *MTA III. Osztály Közleményei* **21** (1972), 63–69.
- [13] Striebel, C. T., Densities for stochastic processes, *Ann. Math. Stat.* **30** (1959), 559–667.

(Beérkezett: 2001. május 15.)

FEGYVERNEKI SÁNDOR
 MATEMATIKAI INTÉZET
 MISKOLCI EGYETEM
 3515 MISKOLC
 MISKOLC-EGYETEMVÁROS
 matfs@gold.uni-miskolc.hu

NEW STATISTICAL INVESTIGATIONS OF ORNSTEIN–UHLENBECK PROCESS. I.
THEORETICAL BACKGROUND

SÁNDOR FEGYVERNEKI

An asymptotic analysis is presented for estimation in the three-parameter Ornstein–Uhlenbeck process, where the parameters are the local mean, the drift and the variance coefficient. Section 1 is a short overview about properties of stationary Gauss–Markov process, Radon–Nikodym derivatives, sufficient statistics and their distribution. The maximum likelihood estimate of the parameter vector is a solution of a rather complicated system of equations. In Section 2 we describe the methods for solving maximum-likelihood equations. In the rest of the paper we give some basic results which are necessary to statistical investigations and simulations. We determine the distributions of some simple statistics, that is, the distribution of the mean and variance of the sample where the sample size is two and the elements are correlated and normal distributed. In Section 4 we give the maximum likelihood estimator for the parameter of reciprocal chi-square distribution and noncentral chi-square distribution. At the end of the paper generalized series expansions are given for the expectation and variance of some sufficient statistics.