

SS-TÍPUSÚ IGAZMONDÓ–HAZUG FEJTÖRŐK GRÁFELMÉLETI MEGKÖZELÍTÉSBN

NAGY BENEDEK

Debrecen

Olyan igazmondó–hazug fejtörők gráfjait vizsgáljuk részletesen, amikben minden szereplő csak egyszerű mondatokat mondhat valamely szereplő típusáról. A gráf-reprezentációban a tiszta rejtvényekről – amelyekben az elhangzó mondatokon kívül nincs plusz információnk – minden információ benne van. A lehetséges gráfok több érdekes tulajdonságát is bemutatjuk. Megmutatjuk, hogy nincs olyan tiszta egyszerűmondatos igazmondó–hazug fejtörő, aminek egyetlen megoldása van. A gráfban az élek kétféle súlyúak lehetnek, irányításuk viszont nem játszik szerepet. Bevezetjük a maximális és a minimális fejtörők fogalmát, amelyek a teljes gráfokhoz, illetve a feszítőerdőkhöz köthetők. Mutatunk egy algoritmust, amellyel bármely tiszta rejtvénynek meghatározhatjuk a lehetséges megoldásait a gráf összefüggő komponenseinek vizsgálatával.

1. Bevezetés

A logikai fejtörők mindig érdekelték az embereket, köztük minden korosztály talál a tudásszintjének megfelelőt. R. Smullyan az egyike volt az elsőeknek, aki tudományos, logikai szempontból is vizsgálta őket, nagyszerű könyveket írva a témakörben, amikből többet magyar nyelvre is lefordítottak ([4], [5], [6], [7]). Aszalós László [1]-ben, illetve PhD dolgozatában egy, a mesterséges intelligenciában használatos, az ún. tabló-módszerrel, illetve Prolog nyelvű programokkal oldott meg különböző típusú fejtörőket. Ebben a cikkben csak olyan igazmondó–hazug fejtörőkkel fogunk foglalkozni, amelyekben az igazmondók minden atomi állítása igaz, a hazugoknak pedig minden atomi állításuk hamis. Az alapdefiníciók után elkészítjük a rejtvények gráf-reprezentációját, megvizsgáljuk szerkezetüket. A fejtörőket a lehetséges megoldásaikat megtartva bővíthetjük ún. élhozzáadó lépések segítségével, amíg el nem érünk az ezekkel a megoldásokkal rendelkező maximális feladványig. A feladványokat a gráfjaik segítségével, új módszerrel oldjuk meg, amiben az ún. kiértékelő nyilak játszanak jelentős szerepet.

2. Alapdefiníciók

Azért, hogy matematikai szempontból pontosan el tudjuk érni a célunkat, szükségünk van néhány fogalom meghatározására. Néhány definíció egyelőre általánosabb, mint amire most szükségünk lesz, ezekről később még szólunk.

2.1. Definíció. Atomi állításnak (vagy egyszerű mondatnak) nevezünk egy részállításokra nem bontható állítást.

2.2. Definíció. Egy embert (erősen) igazmondónak (az angol Strong szóból röviden: S-truthteller) nevezünk, ha minden atomi állítása igaz, gyengén igazmondónak, ha legalább egy atomi állítása igaz (feltéve, hogy megszólal). Hasonlóan egy ember erősen hazug, ha minden atomi állítása hamis, illetve (gyengén) hazug, amennyiben legalább egy atomi állítása hamis (ha mond egyáltalán valamit).

Könnyen beláthatjuk, hogy aki nem mond semmit, az bármilyen típusú lehet a fentiek közül.

Evidens, hogy az (erősen) igazmondó állításai logikai és művelettel összekötve igazat adnak, a gyengén igazmondó állításait összekapcsolva logikai vagy művelettel szintén igaz az eredmény. Ennek megfelelően az erősen hazug ember állításainak diszjunkciója is hamis, míg egy gyengén hazug állításainak konjunkciója is hamis lesz.

Ebben a cikkben mi csak olyan típusú atomi állításokkal foglalkozunk, ami egy a feladványban szereplő személy igazmondó, illetve hazug voltát állítja, szereplőink pedig erősen igazmondók, illetve erősen hazugok. (Az „erősen” jelzőt innen kezdve nem mindig fogjuk kitenni.) Formálisan tehát:

2.3. Definíció. Egy fejtörőt SS-típusúnak nevezünk, ha benne minden szereplő csak „a j . szereplő hazug”, illetve „a j . szereplő igazmondó” alakú kijelentéseket tesz.

Egy fejtörőt tisztának nevezünk, ha a benne szereplők által mondott mondatokon kívül nincs egyéb információ a megoldáshoz.

Ebben a cikkben tiszta fejtörőkkel fogunk foglalkozni, szemben pl. [8]-cal, ahol olyan programot prezentáltunk, amely nem tiszta fejtörőket is képes generálni.

2.4. Definíció. Egy fejtörő megoldásának hívjuk azt a függvényt, amely a benne szereplő emberek mindegyikéhez hozzárendeli az {igazmondó, hazug} halmaz egyik elemét, és így minden ember által mondott állítás az adott ember típusának megfelelően alakul.

Két megoldást különbözőnek nevezünk, ha legalább egy szereplőhöz nem ugyanazt az értéket rendelik.

2.5. Definíció. Egy feladvány megoldható, ha van megoldása, továbbá egy fejtörőt akkor nevezünk jónak, ha pontosan egy megoldása van.

A jó fejtörőkben minden ember típusa egyértelműen kiderül a megoldás során. Valójában az ilyeneket szeretjük, használjuk feladványokként pl. rejtvenyűságok-

ban. Amelyik fejtörőnek nincs megoldása, azokat valójában nem is szoktuk annak tekinteni.

A fejtörőket szemléletessé tehetjük a gráf-reprezentáció segítségével.

2.6. Definíció. Egy fejtörő gráf-reprezentációján a következő irányított gráfot értjük: A gráf csúcsai legyenek a fejtörőben szereplő emberek. Az éleket pedig kétféle nyíllal jelöljük: folytonos nyíllal, ha valaki azt állítja valakiről, hogy igazmondó; és szaggatott vonallal, ha azt állítja, hogy hazug. (A nyíl az állítást tevőtől mutat arra, akiről az állítás szól.)

2.1. Megjegyzés. Tulajdonképpen a kétféle éltípus egy olyan súlyozott gráfot jelenít meg, amelyben minden él kétféle súlyú lehet, célszerű pl. a szaggatott nyílnak 1-es, míg a folytonos nyílnak 2-es súlyt megfeleltetni.

2.2. Megjegyzés. Általános esetben az állításoknak megfelelő logikai formulát diszjunktív normál formájúvá alakítjuk, és a gráf-reprezentációban az egy csúcsból induló „és-éleket” összekötjük. Így a feladvány „és-vagy gráfjában” minden információ benne lesz.

2.7. Definíció. Egy feladvány gráfjában kiértékelő nyílnak hívunk egy élt akkor, ha valamelyik végpontjában levő ember típusa már ismert, és ez alapján meg tudjuk mondani a másik végpontban levő ember típusát.

2.8. Definíció. Két feladványt ekvivalensnek nevezünk, ha gráfjaik izomorfak.

2.9. Definíció. Az P és a Q feladványokat (gyengén) ekvivalensnek nevezünk, ha P megoldása(i) pontosan ugyanaz(ok), mint a Q megoldása(i).

Most nézzünk meg részletesebben a címbe is szereplő feladványtípust.

3. Erősen igazmondó – erősen hazug (vagyis SS-típusú) fejtörők

Ebben a cikkben olyan feladványokkal foglalkozunk, amelyben minden igazmondó erősen igazmondó, illetve minden hazug erősen hazug (innen, az erősen szavakból az SS-típus). Tehát a feladvány a következő alakot ölti:

Adott n számú ember, akik mindegyike vagy igazmondó, vagy hazug. Az igazmondók csak igaz egyszerű mondatokat tudnak mondani, a hazugok pedig csak hamisakat. Minden ember a következő kétféle atomi mondatokat mondhatja: az n ember közül valamelyikről azt állítja, hogy igazmondó; vagy pedig azt állítja, hogy hazug. Egy ember több állítást is tehet. (Ekkor minden állítása külön-külön a típusának megfelelő.)

Formálisan:

Jelöljük az i . embert B_i -vel, ekkor B_i tetszőleges B_j emberről a következő állításokat teheti:

(1) B_i azt mondja, hogy B_j igazmondó;

- (2) B_i azt mondja, hogy B_j hazug;
 (3) $\neg (B_i \text{ a } B_j\text{-ről nem mond semmit})$;
 ahol $1 \leq i, j \leq n$.

3.1. *Megjegyzés.* Mivel ebben a fejtörőtípusban minden állítás atomi, ezért helytálló az „egyszerűmondatos” fejtörők elnevezés is.

Ahhoz, hogy behatóbban megvizsgálhassuk e fejtörőtípus lehetséges gráfjait, vezessük be a következő rövidítést. Jelöljük az erősen igazmondó típust az I , az erősen hazug típust a H betűvel.

3.1. LEMMA. Az SS -típusú fejtörők grájában (a hurokélektől eltekintve) minden él kiértékelő nyíl.

Bizonyítás. Mivel minden ezekben a fejtörőkben szereplő ember típusa erős, ezért minden egyes állítása (vagyis minden egyes él) pontosan meghatározza a típusát. Esetekre bontva ez a következőképpen néz ki:

a kiértékelő nyíl	a kiértékelés során megtudjuk a másik ember típusát is	
$I \longrightarrow$	$I \longrightarrow I$	(igaznak kell lennie az állításnak)
$I \dashrightarrow$	$I \dashrightarrow H$	(igaznak kell lennie az állításnak)
$H \longrightarrow$	$H \longrightarrow H$	(hamisnak kell lennie az állításnak)
$H \dashrightarrow$	$H \dashrightarrow I$	(hamisnak kell lennie az állításnak)
$\longrightarrow I$	$I \longrightarrow I$	(igaz az állítás: igazmondó mondta)
$\dashrightarrow I$	$H \dashrightarrow I$	(hamis az állítás: hazug mondta)
$\longrightarrow H$	$H \longrightarrow H$	(hamis az állítás: hazug mondta)
$\dashrightarrow H$	$I \dashrightarrow H$	(igaz az állítás: igazmondó mondta)

Az előbbi lemma akkor nyújthat segítséget, ha a megoldás már részben ismert (pl. ez gyakran előfordul nem tiszta fejtörők esetén).

3.2. *Megjegyzés.* A kiértékelő nyilakat megfigyelve láthatjuk, hogy a folytonos nyíllal összekötött csúcsok típusa megegyezik, míg a szaggatott nyíllal összekötöttek ellentétes. A nyíl irányítása pedig nem játszik szerepet ezekben a rejtvényekben. Ezért a továbbiakban az ilyen típusú fejtörők grájainak éleit nem tekintjük irányítottaknak. A nyíl helyett a vonal szót is használjuk.

Ha pl. két különböző kiértékelő nyíl egy csúcsban az I és a H típust is megjeleníti, akkor ellentmondást kapunk, így nem lehet megoldás.

3.2. LEMMA. Egy megoldható fejtörő grájában nem lehet két csúcs mindkét típusú éllel összekötve.

Bizonyítás. Legyen két csúcs közt mindkétféle él. Ekkor tegyük fel, hogy az egyik ember típusát ismerjük. A másik típusának meg kell egyeznie ezzel, hiszen folytonos él van köztük, másrészt ellentézőnek kell lennie, hiszen szaggatott él is vezet köztük. Ez ellentmond annak, hogy a feladvány megoldható.

Ennek a lemmának közvetlen következményei a fejtörők nyelvére átfogalmazva a következők.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha egy SS-típusú fejtörőnek van megoldása, akkor benne senki nem állíthatja senkiről azt is, hogy igazmondó és azt is, hogy hazug.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy C azt állítja a D -ről, hogy igazmondó, és azt is állítja a D -ről, hogy hazug. Ekkor e két állításból pontosan az egyik igaz. C nem lehet igazmondó, hiszen akkor minden állításának igaznak kellene lennie, másrészt a C hazug sem lehet, mert akkor minden állításának hazugságnak kell lennie. Márpedig a fejtörőben csak igazmondók, illetve hazugok szerepelhetnek. Ez ellentmondás.

3.2. KÖVETKEZMÉNY. *Megoldható SS-típusú fejtörőben senki sem állíthatja olyanról, hogy igazmondó, aki róla azt állítja, hogy hazug.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy C azt állítja a D -ről, hogy igazmondó, és D azt állítja C -ről, hogy hazug. Ekkor C nem lehet igazmondó, hiszen akkor D is az lenne, aki most éppen hazugságot állít. C hazug sem lehet, mert akkor a D is hazug lenne, miközben éppen igaza van. Ez ellentmondás.

3.3. LEMMA. *Egy megoldható SS-típusú fejtörő nem tartalmazhat szaggatott hurokét, vagyis senki sem állíthatja önmagáról, hogy hazug.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy C önmagáról azt állítja, hogy hazug. Világos, hogy C igazmondó nem lehet, mert ekkor hazug is lenne, ami ellentmondás. Ha viszont C hazug lenne, akkor ez az állítása igaz lenne, ami szintén ellentmondás (ez a jelenség egyébként Hazug-paradoxonként ismert).

A gráf nyelvén bizonyítva: ha van szaggatott hurokél a gráfban, akkor mivel ez az él is kiértékelő nyíl a végpontjainak különböző típusúnak kell lennie, ez ellentmond annak, hogy a hurokélnek csak egyetlen végpontja van, ami nem lehet egyszerre H és I típusú is. Tehát ennek a fejtörőnek nincs megoldása.

3.4. LEMMA. *Egy egyszerűmondatos igazmondó-hazug rejtvényben minden szereplő állíthatja magáról, hogy igazmondó.*

Bizonyítás. Bármely típusú csúcsot összeköthetünk saját magával folytonosan, hiszen a típusa megegyezik a sajátjával, ez nem befolyásolja a feladvány megoldása(i)t.

3.5. LEMMA. *Egy n szereplős erősen igazmondó-erősen hazug rejtvényben minden ember maximum $2n$ különböző állítást tehet, vagyis összesen maximum $2n^2$ állítás hangozhat el.*

Egy n szereplős, megoldható erősen igazmondó-erősen hazug rejtvényben minden ember maximum n különböző állítást tehet. Ez összesen maximum n^2 állítást jelent.

Bizonyítás. A lemma első része triviális, hiszen bármely szereplő legfeljebb két különböző atomi állítást mondhat ugyanarról a személyről. Most bizonyítsuk a második részt. A 3.2. Lemmával (illetve annak 1. Következményével) beláttuk, hogy bármely ember bármely másíkról pontosan egy állítást tehet. A 3.4., illetve 3.5. Lemmából következik, hogy saját magáról is pontosan egy állítást tehet. Tehát bármely szereplő összesen annyi állítást tehet, ahány szereplős a rejtvény.

3.6. LEMMA. *A többszörös éleket elég egyszeresen figyelembe vennünk, az eredetivel megegyező lesz a megoldás.*

Bizonyítás. Az előző lemmák alapján bármely két csúcs között legfeljebb egyféle él vezethet, amelynek az irányítása nem lényeges. A kiértékelő nyilakat figyelembe véve bármely két csúcsot összekötő él ugyanannyi információt hordoz, mintha két vagy akár több ugyanilyen típusú él lenne köztük.

A továbbiakban bármely két csúcs között legfeljebb egy azonos típusú élt veszünk figyelembe.

4. A fejtörők gráfjának manipulálása

A gráf manipulálásán most elsősorban élek hozzáadását értjük. A fejezet végén azonban élek elhagyásával kapcsolatos eredményeket is közlünk.

Ahhoz, hogy többet tudjunk mondani e gráfokról ebben a részben olyan módszert mutatunk, amelynek segítségével úgy vehetünk éleket a gráfhoz, hogy a megoldás(ok) ne változzon(anak) meg. Ezeket a lépéseket mutatja a következő táblázat.

4.1. Definíció. A következő lépéseket élhozzáadó lépéseknek nevezzük, amennyiben a kiegészítő él még nem szerepelt a gráfban. Legyen A , B és C tetszőleges három csúcs, ekkor

ha az eredeti fejtörőben benne vannak a következő élek, akkor a kiegészítő él

- | | |
|--|------------------------|
| 1. $A \text{ ——— } B \text{ ——— } C$ | $A \text{ ——— } C$ |
| 2. $A \text{ ——— } B \text{ - - - - } C$ | $A \text{ - - - - } C$ |
| 3. $A \text{ - - - - } B \text{ - - - - } C$ | $A \text{ ——— } C$ |

4.1. LEMMA. *Ha adott a P rejtvénynek egy megoldása, akkor ez megoldása annak az R rejtvénynek is, amit a P -ből valamely az – előbb felsorolt – élhozzáadó lépéssel kapunk.*

Bizonyítás. Ha az első lépést alkalmaztuk, akkor az eredeti megoldásban a B és az A valamint a B és a C típusának meg kell egyeznie, tehát az A és C közé a folytonos él behúzható.

Ha a második lépést alkalmaztuk, akkor az A és a B azonos típusú, míg a B és a C különböző, így az A és a C is különböző, jogos köztük a szaggatott nyíl. A harmadik lépés alkalmazásakor a B az A -val és a C -vel is ellentétes típusú, így mivel csak kétféle típus van, az A és C típusa egyforma, köztük folytonos vonal lehet.

4.1. KÖVETKEZMÉNY. *Az élhozzáadó lépésekkel az eredetivel gyengén ekvivalens fejtörőket kapunk.*

4.2. LEMMA. *Ha valamelyik élhozzáadó lépéssel olyan rejtvényt kapunk, amelyben szaggatott hurokél jelenik meg, vagy két csúcs mindkétféle éllel össze lesz kötve, akkor az eredeti rejtvénynek nincs megoldása.*

Bizonyítás. A 3.2., illetve a 3.3. Lemma szerint ilyen fejtörő nem lehetséges megoldással, mivel a 4.1. Lemma alapján ami az eredetinek megoldása az ennek is, így az eredeti rejtvénynek sem lehet megoldása.

4.2. Definíció. Egy SS-típusú feladványt maximálisnak mondunk, ha éhozzáadó lépéssel nem adható gráfjához újabb él.

4.1. TÉTEL. Minden megoldható feladványhoz pontosan egy olyan maximális fejtörő tartozik, amit az eredetiből éhozzáadó lépésekkel megkaphatunk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a Q és az R is olyan maximális fejtörő gráfja, amit a P -ből nyertünk éhozzáadó lépések segítségével. Ekkor mivel Q és R maximálisak, egyikbe sem lehet új élt felvenni ily módon. Tegyük fel, hogy a Q -ban az A és a B csúcs össze van kötve. Ekkor belátjuk, hogy ezek a csúcsok az R -ben is össze vannak kötve ugyanilyen módon. Ha az A és B folytonos vonallal van összekötve, akkor típusuk megegyezik a megoldásban. De ugyanez a megoldása a P -nek is a 4.1. Lemma alapján, sőt ez a megoldás megoldása az R -nek is. Tehát mivel az R maximális, és benne az A és B csúcsok típusa megegyezik, e két csúcsnak az R -ben is össze kell kötve lennie folytonos éllel. Hasonló gondolatmenettel belátható az az eset is, amikor a két csúcs szaggatott vonallal van összekötve. Megfordítva a Q és az R szerepét láthatjuk, hogy ha egy él az R -ben benne van, akkor a Q -ban is benne kell, hogy legyen. Ezzel beláttuk, hogy a Q és az R gráf megegyezik.

4.2. TÉTEL. Egy fejtörőből kapott maximális gráfban az eredetileg összefüggő részekben minden csúcs mindegyikkel össze lesz kötve, az eredetileg nem összefüggő részek között pedig továbbra sem lesz él.

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy az összefüggő részben minden csúcs össze lesz kötve. Legyen az eredeti gráfunk P , a belőle kapott maximális gráf pedig R . Egy gráfban azt a részt nevezzük összefüggőnek, amelyen bármely csúcsból bármelyikbe eljuthatunk. Tegyük fel tehát, hogy az A és B csúcsok közt vezet út P -ben. Ha a csúcsok közvetlenül (is) össze voltak kötve, akkor készen vagyunk, ha nem, tekintsünk egy utat köztük: $A = B_0, B_1, \dots, B_j = B$. Alkalmazva a megfelelő éhozzáadó lépést az A, B_1, B_2 -re nyerünk egy olyan utat, amely a B_1 -et kihagyva egy éllel rövidebb az eredetinél. Ezt folytatva végül elérjük, hogy közvetlen él legyen A és B közt, aminek a maximális gráf egyértelműsége miatt R -ben szerepelnie kell. Ha az A és a B közt nem vezetett út a P -ben, akkor R -ben sem vezethet, hiszen az éhozzáadó lépésekkel az összefüggőség nem változik.

Tekintsük most azt a gráf-reprezentációt, amelyben a szaggatott éleknek 1, a folytonosaknak 2 súlyú éleket feleltetünk meg.

4.3. TÉTEL. Egy SS-típusú fejtörőnek pontosan akkor van megoldása, ha teljesül a következő: ha két csúcs közt vezet út, akkor köztük vagy minden út páros hosszúságú, vagy minden út páratlan hosszúságú.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy az A és a B csúcsok közt vezet páros és páratlan hosszúságú út is. Ekkor először vegyük a páros hosszúságú $A = B_0, B_1, \dots, B_j = B$ utat. Készítsük el az A és B közti közvetlen élt ezen út alapján a 4.2. Tétel bizonyításában szereplő módon. Ez egy 2 súlyú (azaz folytonos) élt fog eredményezni. (Az első és a második élhozzáadó lépés használatával 2-vel kevesebb lesz az új út költsége, mint az egy lépéssel hosszabb úté, míg a harmadik lépés használatakor az új, egy éllel rövidebb út költsége megegyezik az előzőével.) Hasonlóan a páratlan hosszú útból kiindulva azt kapjuk, hogy a maximális gráfban a két csúcs közt 1 súlyú (azaz szaggatott) él is vezet. Ez viszont a 3.2. Lemma alapján azt jelenti, hogy a maximális fejtörő nem oldható meg, ekkor viszont a 4.1. Lemma alapján az eredeti feladványnak sincs megoldása. A másik irány bizonyításához készítsük el a maximális fejtörő-gráfot. Ha két csúcs közt páros hosszú az út, legyenek összekötve 2 súlyú éllel, páratlan hosszúságú út esetén pedig 1-súlyú éllel. Most megkonstruálunk egy megoldást. Válasszunk ki egy-egy csúcsot minden komponensből, legyen ezek típusa I . Legyen továbbá minden ezekkel 2 súlyú éllel összekötött csúcs értéke I , valamint az 1 súlyú élekkel kapcsolódó csúcsok értéke 1. Könnyen belátható, hogy ez megoldása az eredeti fejtörőnek is.

4.2. KÖVETKEZMÉNY. Ebben a reprezentációban két egymásból elérhető csúcsról azt mondhatjuk, hogy pontosan akkor azonos típusúak, ha az út költsége kettejük közt páros, illetve pontosan akkor ellenkező típusúak, ha köztük az út költsége páratlan.

Bizonyítás. Az előző tételben beláttuk, hogy ha két csúcs közt vezet út, akkor a köztük vezető minden út költségének paritása ugyanaz. A fejtörőből készített maximális gráfban páros útköltség esetén 2 súlyú (folytonos) él, páratlan útköltség esetén 1 súlyú (szaggatott) él vezet a két csúcs közt. Ez a kiértékelő nyilakat használva éppen az állításunkat jelenti.

Térjünk most vissza az eredeti gráfjainkhoz, használjunk újra szaggatott, illetve folytonos nyilakat.

4.4. TÉTEL. Adott egy fejtörő, tekintsük a gráfjának azt a részgráfját, amely csak a szaggatott nyilakat tartalmazza. Ha a fejtörőnek van megoldása, akkor ez a részgráf páros.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott a feladvány egy megoldása, tekintsük ekkor az igazmondók és a hazugok halmazait. A kiértékelő nyilak tulajdonsága miatt szaggatott él csak a két halmaz között vezethet, halmazon belül nem, tehát a szaggatott élek páros gráfot alkotnak. (1.8.1. Definíció [3]-ban.)

4.3. KÖVETKEZMÉNY. Egy feladványhoz rendelt maximális fejtörő gráfjában a szaggatott élek bizonyos értelemben maximális páros gráfokat jelentenek. Ha a fejtörő gráfja összefüggő, akkor teljes páros gráfot kapunk. Ha nem összefüggő az eredeti gráf, akkor összefüggő részenként kapunk egy-egy teljes páros gráfot a szaggatott élekkel.

4.5. TÉTEL. *Ha egy rejtvénynek van megoldása, akkor a folytonos élek részgráfjai teljes diszjunkt gráfok a fejtörőhöz rendelt maximális gráfban.*

Bizonyítás. Vegyük az összes lehetséges megoldást, nyilvánvaló (a 4.2. és a 4.3. Tételek alapján), hogy két csúcstól pontosan akkor vezet folytonos él, ha típusuk minden lehetséges megoldásban megegyezik. Ekkor viszont a 4.2. Tétel és bizonyítása alapján ezen részek teljes gráfok.

4.3. *Definíció.* Egy megoldás inverzén azt a függvényt értjük, amely minden emberhez pontosan az ellenkező típust rendel, mint az adott megoldás.

4.3. LEMMA. *Minden megoldásfüggvény különbözik az inverzétől.*

Bizonyítás. Triviális, minden szereplőben eltérőek.

4.6. TÉTEL. *Legyen egy feladvány gráfja P . Egy f függvény pontosan akkor a P megoldása, ha azonos típusú csúcsok között csak folytonos, ellentétes típusúak között csak szaggatott él van a hozzárendelés után.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f megoldás. Ha két azonos típusú csúcstól szaggatott él vezet, az ellentmondásra vezet, csakúgy, mint két eltérő típusú között levő folytonos él (kiértékelő nyilak). Tehát ha f megoldás, akkor az állítás igaz.

Most tegyük fel, hogy azonos típusú csúcsok között csak folytonos, ellentétes típusúak között csak szaggatott él van. Ekkor minden igazmondó által mondott mondat igaz, hiszen belőle folytonos él csak igazmondóhoz (azonos típusú), szaggatott pedig csak hazughoz (ellenkező típusú) vezet. Hasonlóan minden hazug minden állítása hamis, ugyanis igazmondóságot csak hazugról (folytonos él azonos típusúhoz); azt hogy hazug, pedig csak igazmondóról (szaggatott él a másik típusúhoz) állít. Tehát az f megoldása a fejtörőnek.

4.7. TÉTEL. *Tiszta erősen igazmondó – erősen hazug jó fejtörő nincs.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van ilyen fejtörő, legyen a gráfja P . Megmutatjuk, hogy a megoldás mellett annak inverze is megoldás. Mivel a feladvány tiszta, a gráf tartalmaz minden információt. Ha nincs megoldás, akkor a fejtörő nem lehet jó. Tehát van megoldása, legyen f egy megoldás. Ekkor a 4.6. Tétel alapján azonos típusú csúcsok között csak folytonos, ellentétes típusúak között csak szaggatott él van. Vizsgáljuk meg most a g függvényt, ami az f inverze. A P gráf csúcsaiba írt típusokat megváltoztatva, a különbség annyi, hogy amely él eddig két I csúcsot kötött össze, az most két H csúcsot köt össze, és fordítva. A 4.6. Tétel feltételei most is teljesülnek. Tehát g is megoldás. Mivel van két különböző megoldása, a P nem lehet jó feladvány.

Az előzőekben a feladvány gráfját újabb élekkel egészítettük ki. Vajon mit tapasztalunk, ha elhagyunk egyes éleket a gráfból? Mennyire függetlenek egymástól a fejtörő élei?

4.4. Definíció. Egy fejtörő minimális fejtörőjének nevezzük azt a fejtörőt, ami az eredetivel gyengén ekvivalens (pontosan ugyanazok a lehetséges megoldásai), és a legkevesebb elhangzó mondatot tartalmazza. Hasonlóan értelmezzük a minimális gráf fogalmát is.

Az előző definíció, valamint a 3.3. Lemma alapján azt mondhatjuk, hogy az ellentmondásos fejtörők minimális gráfja egyetlen – szaggatott hurok- – élt tartalmaz.

4.4. LEMMA. *Egy megoldható feladvány minimális fejtörőjének grájában minden komponensben eggyel kevesebb él van, mint csúcs.*

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy komponensenként egy feszítőfa, bármely él elhagyásával pontosan egy minimális fejtörőt fog reprezentálni.

Összefüggő gráf esetén egy minimális fejtörő éppen egy feszítőfát jelent, nem összefüggő esetben pedig egy feszítőerdőt.

4.8. TÉTEL. *Bármely SS-típusú rejtvény esetén a feszítőerdőhöz tartozó rejtvény mindig megoldható.*

Bizonyítás. A feszítőerdőben bármely két csúcs között legfeljebb egy út vezethet. Ez a 4.3. Tétel értelmében elégséges feltétele a megoldhatóságnak.

Az előző tétel miatt vigyáznunk kell az élek elhagyásaival, mert lehet hogy egy rejtvénynek nem volt megoldása, ekkor a grájának feszítőerdeje nem ekvivalens az eredeti rejtvénnel.

4.9. TÉTEL. *Ha egy hurokélmentes gráffal rendelkező SS-típusú rejtvénynek nincs megoldása, akkor van legalább két olyan, a grájához tartozó feszítőerdő, amelyekhez tartozó rejtvényeknek nincs azonos megoldása.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a P rejtvény nem megoldható és gráfja hurokélmentes. Ekkor a 4.3. Tétel alapján lennie kell benne 2 csúcsnak melyek közt vezet páros, illetve páratlan hosszú út is. Készítsük el a P gráf R feszítőerdejét úgy, hogy benne a fenti 2 csúcs között páros hosszú út vezessen, míg a Q feszítőerdőben legyen a 2 csúcs közti út páratlan hosszú. Nyilvánvalóan az R gráfot tekintve minden megoldásban azonos értékű lesz a fenti két csúcs. Ezzel szemben a Q megoldásaiban mindig különböző értékű lesz ez a két csúcs.

5. Erősen igazmondó – erősen hazug fejtörők megoldása

Most módszert adunk az ilyen típusú fejtörők megoldására.

Itt jegyezzük meg, hogy a vizsgált fejtörők egyszerűen megoldhatóak az összes lehetséges $I-H$ sorozat ellenőrzésével, azonban n szereplő esetén ez 2^n darab „próbálkozást” jelent. Itt egy próbálkozás ellenőrzéséhez a fejtörő minden állítását meg

kell vizsgálnunk, ami egyáltalán nem hatékony. Ezért most egy jóval hatékonyabb algoritmust adunk, felhasználva az előző eredményeinket.

A következő algoritmus segítségével egy tiszta fejtörő lehetséges megoldásait állíthatjuk elő.

5.1. Algoritmus.

Adott a fejtörő gráfja, P .

1. Nézzük meg hány komponensből áll a gráf (2.1.7. Definíció [3]-ban).
2. Komponensenként jelöljük ki egy-egy csúcsot.
3. A kiválasztott csúcsokhoz külön-külön rendeljük hozzá az $\{I, H\}$ valamelyik elemét.
4. Ciklus komponensenként: amíg az adott komponens minden csúcsához nincs érték rendelve az $\{I, H\}$ halmazból, az élek, mint kiértékelő nyilak segítségével az összefüggő részekben határozzuk meg a csúcsok típusait a már ismertekből kiindulva.
5. Ellenőrzési fázis, csak az első megoldás előállításakor: ciklus komponensenként: minden éltre vizsgáljuk meg, hogy a végpontjaiban szereplő értékek azonosak (folytonos él esetén), illetve különbözőek (szaggatott él esetén).
Ha valamelyik éltre nem stimmel, akkor NINCS MEGOLDÁS és STOP.
6. Amennyiben nincs szükségünk minden megoldás előállítására, akkor már van(nak) megoldás(ok), STOP.
7. Vissza a 3. lépésre és ott rendeljük az I, H értékeket az eddigiektől eltérően a kiválasztott csúcsokhoz, ha ez lehetséges. Ha ez már nem lehetséges, akkor minden megoldást előállítottunk. STOP.

5.1. TÉTEL. *Ha a P nem megoldható, akkor az 5.1. Algoritmus ellentmondásra vezet. Ha a P megoldható, akkor pedig megoldás(oka)t állít elő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a P nem megoldható. Ez azt jelenti a 4.6. Tétel alapján, hogy nincs olyan függvény, hogy azonos típusú csúcsok közt csak folytonos, ellentétes típusúak között csak szaggatott él van a hozzárendelés után. Ez azt jelenti, hogy lennie kell olyan csúcsnak, hogy a kiértékelő nyilak segítségével ez a csúcs I és H típusú is lesz, ami ellentmond annak, hogy mindenki csak egyféle típusú lehet. Ilyen esetben az algoritmus nem állít elő függvényt. Tegyük fel, hogy a P megoldható. Ekkor azt állítjuk, hogy ha az algoritmus előállítja az f függvényt, akkor az f megoldás. Ekkor a kiértékelő nyilakkal nem kapunk ellentmondást egyik komponensben sem. Tehát azonos típusú csúcsok közt csak folytonos, ellentétes típusúak között csak szaggatott él van a hozzárendelés után, így f megoldás.

5.2. TÉTEL. *Legyen k a komponensek száma a fejtörő grájában. Ekkor lehetséges megoldások száma 2^k . Az algoritmus pedig mindet elő tudja állítani.*

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy az algoritmus ennyi különböző megoldást állít elő. Az algoritmus 3. lépésében kiválasztunk minden komponensből egy csúcsot, és mindhez hozzárendelhetjük az $\{I, H\}$ egyik elemét, ezt pontosan

2^k -féleképpen tehetjük meg, és ez mind más megoldást fog eredményezni. Most bebizonyítjuk, hogy ezeken kívül nincs más megoldás. Tegyük fel, hogy f megoldás. Ekkor tekintsünk a P gráfban minden komponensből egy-egy csúcsot, és rendeljük hozzá az f által adott értéket. Ekkor a kiértékelő nyilak segítségével éppen az f megoldást kapjuk meg.

Az előző két tétellel megmutattuk, hogy algoritmusunk helyes és teljes.

5.3. TÉTEL. *A nem tiszta fejtörő megoldása mindig része az ugyanazon P gráfhoz tartozó tiszta rejtvény lehetséges megoldásainak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f nem lehetséges megoldása P -nek. Ekkor a gráfban a hozzárendelés után ellentmondást kapunk, vagyis lesz két különböző típusú csúcs folytonos éllel, vagy két azonos típusú csúcs szaggatott éllel összekötve. Tehát valamely a P gráf által hordozott információ nem teljesül. Ez tehát nem lehet megoldás, akkor sem, ha a gráfon kívül még más információ is van.

Most vizsgáljuk meg az algoritmus hatékonyságát. Az első megoldás előállításához a gráf egy feszítőerdjét kell „végigjárni”. A megoldás ellenőrzéséhez a gráf összes élet meg kell vizsgálnunk. A többi megoldás előállításához már csak a feszítőerdők bejárására van szükség az algoritmus szerint.

Megjegyezzük, hogy a megoldhatóság vizsgálata történhet a 4.3. Tétel alapján, de ez nem feltétlenül gyorsabb, mint ahogy az algoritmus egy lehetségesnek tűnő megoldást leellenőriz.

Az algoritmus a további megoldások előállításában gyorsítható a következőképpen:

Vegyük a gráf k komponensét, ezeken belül (mint kisebb, tiszta SS-típusú rejtvények) a megoldások inverze is megoldás (lásd 4.3. Lemma és 4.7. Tétel). Tehát minden komponensre adott az algoritmus által adott első megoldás és annak az inverze. Az összes megoldás pedig ezek tetszés szerinti kombinációja, vagyis az eredeti rejtvény bármely megoldása előáll a komponensek első, vagy azok inverz megoldásaiból.

6. Összefoglalás

Az egyszerűmondatos fejtörők definíciója után azok gráfjait vizsgáltuk. Több észrevételt tettünk arra, hogy milyen lehet egy megoldható feladat gráfja. Ezen kívül bevezettük a kiértékelő nyilakat, amik segítségével a már ismert típusú csúcsokból indulva a velük összefüggő gráfrészben szereplő csúcsok típusát meghatározhatjuk. Az élehozzáadó lépésekkel pedig olyan gráfokat állíthatunk elő, melynek megoldásai megegyeznek az eredetiével. Ezek a lépések a lokális információkat kihasználva segítenek jellemezni a gráfot és megtalálni a megoldást. Beláttuk, hogy ahhoz, hogy egyértelmű megoldásunk legyen még plusz információra lenne szükségünk. A módszer akkor is kiválóan működik, ha nem szólal meg minden szereplő.

Egy meg nem szólaló szereplőt helyettesíthetünk például más atomi kijelentéssel. Ekkor, ha a fejtörő jó, akkor egyértelműen kiderül e kijelentés típusa, vagyis igazságértéke a megoldás során. Tehát a módszert szinte változatlan formában használhatjuk akkor is, ha a szereplők nem csak egymás típusára, hanem például az „ez az út Budára vezet”, illetve (és/vagy) ennek ellenkezőjét (is) állítják. Ekkor ennek a mondatnak is megfeleltetünk egy csúcst a gráfban.

A gráf tulajdonságait használó módszerhez hasonlólt más típusú fejtörőkre is alkalmazhatunk.

Köszönetnyilvánítás

A szerző ezúton is szeretné megköszönni a lektor és az érdeklődő kollégák táncsait, észrevételeit.

Irodalom

- [1] Aszalós, L., *Smullyan logikai rejtvényei és automatikus megoldásuk*, Technical Report No. 2000/14 (University of Debrecen, Institute of Mathematics and Informatics, 2000).
- [2] Shasha, D., *Dr. Ecco talányos kalandjai* (Typotex, Budapest, 1999).
- [3] Hajnal, P., *Gráfelmélet* (Polygon, Szeged, 1997).
- [4] Smullyan, R., *Forever Undecided (A Puzzle Guide to Gödel)* (Alfred A. Knopf, New York, 1987).
- [5] Smullyan, R., *A hölgy vagy a tigris?* (Typotex, Budapest, 1997).
- [6] Smullyan, R., *Mi a címe ennek a könyvnek?* (Typotex, Budapest, 1996).
- [7] Smullyan, R., *Seherezádé rejtélye* (Typotex, Budapest, 1999).
- [8] Kósa, M. and Nagy, B., Logical puzzles (Truth-tellers and liars), in: *5th International Conference on Applied Informatics (ICAI'01)*, 105–112 (Eger, 2001).

(Beérkezett: 2001. december 3.)

NAGY BENEDEK
DEBRECENI EGYETEM
ÉS
ROVIRA I VIRGILI EGYETEM
TARRAGONA
SPANYOLORSZÁG
nbenedek@inf.unideb.hu

SS-TYPE TRUTHTELLER-LIAR PUZZLES AND THEIR GRAPHS

BENEDEK NAGY

In this paper we define the SS-type puzzles. In these puzzles each person can say only simple statements about a person type. A truth-teller can have only true assertions, and a liar can make only false statements. We present the graph-representations of these puzzles. The graph of a puzzle has all information about the puzzle in case of clear puzzles. We present some interesting properties of the possible graphs of puzzles. We prove that there is no clear SS-type puzzle with unique solution. We present an algorithm which can provide all possible solutions of a clear puzzle. In case of non-clear puzzles, we must choose among the possible solution of the clear puzzle with the same graph.