

A MEG NEM ÚJULÓ ERŐFORRÁSOK EGY DINAMIKUS LEONTIEF-MODELLJE

FLORISKA ADÉL ÉS DOBOS IMRE

Gödöllő – Budapest

A dolgozatban a sokszektoros dinamikus termelési Leontief-modell egy általánosítását mutatjuk be. A standard nyílt dinamikus Leontief-modellt kibővítjük a meg nem újuló erőforrások mérlegegyenletével. Megvizsgáljuk az így kapott diszkrét lineáris rendszer irányíthatóságát, a végső felhasználást, a fogyasztást tekintve irányítási paraméternek. Nyilvánvalóan a meg nem újuló erőforrások készleteit (pl. vasérc, szén, kőolaj) az elsődleges erőforrások felhasználása csökkenti. Egyenletesen növekvő fogyasztást és termelést feltételezve megvizsgáljuk, hogy a kezdeti erőforrás-készletek mennyi ideig fedezik a termeléshez szükséges ráfordításokat, valamint a rendszer élettartama, működőképessége hogyan függ az egyenletes növekedés ütemétől és a fogyasztástól. Vizsgálatainkhoz felhasználtuk a klasszikus irányításelméleti tételeket valamint a lineáris algebra sajátérték-feladataira vonatkozó eredményeket.

1. Bevezetés

A véges, kimerülő erőforrás-készletek problémájának megoldása nemcsak környezetvédelmi, hanem gazdasági szempontból is igen fontos feladat. A dolgozatban egy környezeti hatásvizsgálatot mutatunk be, a gazdasági tevékenységek és ezen tevékenységekhez szükséges meg nem újuló nyersanyagok közötti kapcsolatot tekintve tanulmányunk alapjának (Turner, Pearce, Bateman [3], Tietenberg [7]).

A közismert egyszerűsítő feltevések ellenére az input-output elemzés igen hasznos eszköz a gazdasági fejlődés stratégiai irányainak vizsgálatára, valamint az egymással összefüggő gazdasági tevékenységek és a természet mennyiségi kölcsönhatásainak tapasztalati tanulmányozására. Mindezeket figyelembe véve, a szakirodalomban jól ismert sokszektoros dinamikus Leontief-modellt kibővítjük a meg nem újuló erőforrások mérlegegyenletével (Leontief [4]). A kapott modellel kapcsolatosan a dolgozatban a következő kérdésekre keressük a választ.

Az így konstruált dinamikus termelési-ökológiai modell irányítható-e, ha a fogyasztást tekintjük irányítási paraméternek? Azaz tudjuk-e befolyásolni a gazdasági folyamatok nyersanyag-felhasználását azáltal, hogy irányítjuk a végső felhasználást a gazdaságban? Ismert, hogy növekvő fogyasztási igényeket csak növekvő termeléssel lehet kielégíteni, aminek következtében viszont a meg nem újuló erőforrás-készletek csökkenni fognak. Továbbá megvizsgáljuk, hogy a kezdeti erőforrás-készletek mennyi ideig fedezik a termeléshez szükséges ráfordításokat, amennyiben mind a termelés, mind a fogyasztás egyenletes ütemben növekszik, valamint a rendszer élettartama, működőképessége hogyan függ az egyenletes növekedés ütemétől.

A dolgozat a következő részekre tagolódik. A bevezetést követő első részben ismertetjük modellünket, majd a további részekben vizsgáljuk a rendszer irányíthatóságát, az egyensúlyi növekedési pálya létezésének feltételeit, a meg nem újuló erőforrás-készletek időbeni alakulását, valamint a készletek kimerülésének időpontját egyenletesen növekvő termelést és fogyasztást feltételezve. Végül modellünk működését egy egyszerű numerikus példán mutatjuk be. Az utolsó részben pedig a dolgozat eredményeit foglaljuk össze.

2. A kibővített dinamikus Leontief-model

A modell leírásakor a hagyományos sokszektoros dinamikus Leontief-modell egyenletéből indulunk ki. Ezt a modellt kibővítjük a meg nem újuló erőforrások mérlegegyenletével. Az így kapott modell eszköz arra, hogy vizsgáljuk a gazdasági folyamatok és a környezet kölcsönhatását. A Leontief-modell alapvető feltevése, hogy az egyes gazdasági szektorok teljes termelésének fedeznie kell a végső fogyasztást, a termelőfogyasztást, azaz a termeléshez szükséges folyó ráfordításokat és a növekedéshez szükséges beruházásokat.

A modellünkkel kapcsolatosan a következő feltevésekkel élünk. A gazdasági ágazatok száma n , és minden egyes ágazat egyetlen terméket állít elő. A termeléshez minden egyes ágazat legfeljebb m -féle elsődleges erőforrást használhat fel (feltesszük, hogy $m < n$).

Ez a gazdasági-ökológiai modell, a gazdaság működését leíró, a termékekre vonatkozó input-output mérlegegyenlettel, valamint az erőforrás-készletek alakulását leíró mérlegegyenlettel jellemezhető. A *termékek mérlegegyenlete* azt fejezi ki, hogy a gazdasági ágazatok teljes kibocsátásának fedeznie kell a termeléshez szükséges ráfordításokat, beruházásokat és a fogyasztást.

$$(1) \quad x_t = Ax_t + B(x_{t+1} - x_t) + c_t.$$

Az *erőforrások mérlegegyenlete* azt fejezi ki, hogy egy adott évben a kitermeléssel csökkentett meg nem újuló erőforrás-készletek jelentik a következő évben rendelkezésre álló készletmennyiséget.

$$(2) \quad R_{t+1} = R_t - Dx_t,$$

ahol

- x_t a termelő ágazatok bruttó kibocsátásának n -dimenziós vektora,
- c_t a végső fogyasztás n -dimenziós vektora,
- A a folyó ráfordítások együtthatóinak $n \times n$ -es mátrixa,
- B a tőkeráfordítási együtthatók $n \times n$ -es mátrixa,
- D az erőforrás-ráfordítások együtthatóinak $n \times n$ -es mátrixa, amely megmutatja, hogy egységnyi termék előállításához mennyi meg nem újuló erőforrás szükséges az egyes fajtákból,
- R_t a meg nem újuló erőforrás-készletek n -dimenziós vektora.

Feltevések. A dolgozatban feltesszük, hogy A , B és D nemnegatív mátrixok, B nonsinguláris mátrix és c_t nemnegatív vektor. A fenti két egyenlet explicit vektoriális alakja

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ R_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + B^{-1}(I - A) & 0 \\ -D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ R_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} c_t$$

ahol I az $n \times n$ -es egységmátrixot jelöli.

A további vizsgálatok céljából célszerű átírni a fenti diszkrét idejű lineáris rendszert a jólismert mátrix-vektor alakban (Kalman [2])

$$(3) \quad q_{t+1} = A_q q_t + B_q u_t,$$

ahol $A_q = \begin{bmatrix} I + B^{-1}(I - A) & 0 \\ -D & I \end{bmatrix}$ a rendszer $(m+n) \times (m+n)$ -es mátrixa, $B_q = -\begin{bmatrix} B^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ az irányítás $(m+n) \times n$ -es hatásmátrixa, $q_t = \begin{bmatrix} x_t \\ R_t \end{bmatrix}$ a rendszer $m+n$ -dimenziós állapotvektora, $u_t = c_t$ az irányítás n -dimenziós vektora. A következő részben megvizsgáljuk a (3)-as rendszer irányíthatóságát.

3. A modell irányíthatósága

Egy rendszer *irányíthatóságán* (Elaydi [1]) azt a tulajdonságát értjük, hogy egy megadott időintervallumon belül, a rendszer egy tetszőleges kezdeti állapotból átvihető egy tetszőleges végső állapotba.

A Kalman-féle rangfeltételt alkalmazva (Kalman [2], Elaydi [1]) kapjuk, hogy a (3)-as rendszer akkor és csakis akkor irányítható, ha

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B_q & A_q B_q & \dots & A_q^{m+n-1} B_q \end{bmatrix} = m+n.$$

1. LEMMA. A (3)-as rendszer akkor és csakis akkor irányítható, ha $\text{rang } D = m$.

Bizonyítás. A mátrixok rangjára vonatkozó tulajdonságokat felhasználva egyszerűen belátható, hogy a (3)-as rendszer irányíthatósága ekvivalens az alábbi rendszer irányíthatóságával:

$$q_{t+1} = (A_q - I)q_t + B_q u_t.$$

Jelölje az $n \times nm$ -es irányítási mátrixot W , ahol

$$(4) \quad W := \begin{bmatrix} B_q & (A_q - I)B_q & \dots & (A_q - I)^{m+n-1}B_q \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B^{-1}(I - A)B^{-1} \\ -DB^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (B^{-1}(I - A))^2 B^{-1} \\ -DB^{-1}(I - A)B^{-1} \end{bmatrix}, \dots, \\ \dots, \begin{bmatrix} (B^{-1}(I - A))^{m+n-1} B^{-1} \\ -D(B^{-1}(I - A))^{m+n-2} B^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Az irányíthatóság feltételének teljesülése, azaz a W mátrix rangja $m + n$, azt jelenti, hogy a W mátrix lineárisan független sorainak a száma pontosan $m + n$ -nel egyenlő. Megmutatjuk, hogy a W mátrixnak pontosan akkor van $m + n$ számú lineárisan független sora, ha $\text{rang } D = m$.

Legyen y_1 egy n - és y_2 pedig egy m -dimenziós konstans vektor. A W mátrixnak pontosan akkor van $m + n$ lineárisan független sora, ha minden $[y_1, y_2]W = 0$ teljesülése esetén fennáll az $y_1 = 0$ és $y_2 = 0$ egyenlőség.

A (4) jelöléseit alkalmazva az $[y_1, y_2]W = 0$ egyenletre kapjuk, hogy

$$(5) \quad [y_1, y_2] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B^{-1}(I - A)B^{-1} \\ -DB^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (B^{-1}(I - A))^2 B^{-1} \\ -DB^{-1}(I - A)B^{-1} \end{bmatrix}, \dots, \\ \dots, \begin{bmatrix} (B^{-1}(I - A))^{m+n-1} B^{-1} \\ -D(B^{-1}(I - A))^{m+n-2} B^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0.$$

Mivel $\text{rang } B^{-1} = n$, az $[y_1, y_2]W = 0$ egyenlet csak $y_1 = 0$ esetén oldható meg. Behelyettesítve az (5) egyenletbe az $y_1 = 0$ kifejezést, azt kapjuk, hogy

$$[0, y_2] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B^{-1}(I - A)B^{-1} \\ -DB^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (B^{-1}(I - A))^2 B^{-1} \\ -DB^{-1}(I - A)B^{-1} \end{bmatrix}, \dots, \\ \begin{bmatrix} (B^{-1}(I - A))^{m+n-1} B^{-1} \\ -D(B^{-1}(I - A))^{m+n-2} B^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0.$$

A szorzásokat elvégezve

$$[0, -y_2 DB^{-1}, -y_2 DB^{-1}(I - A)B^{-1}, \dots, -y_2 D(B^{-1}(I - A))^{m+n-2} B^{-1}] = 0.$$

Az egyenlet bal oldalán lévő kifejezésből kiemelve az $y_2 D$ -t kapjuk, hogy

$$(6) \quad y_2 D [0, -B^{-1}, -B^{-1}(I - A)B^{-1}, \dots, -(B^{-1}(I - A))^{m+n-2}B^{-1}] = 0.$$

Amennyiben feltesszük, hogy $\text{rang } D = m$, a fenti egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $y_2 = 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\text{rang } W = m + n$.

Most feltételezzük, hogy $\text{rang } W = m + n$, majd belátjuk, hogy $\text{rang } D = m$. Ha $\text{rang } D < m$, akkor létezik olyan $y_2 \neq 0$, m -dimenziós konstans vektor, amelyre fennáll az $y_2 D = 0$ egyenlőség. Ez azt jelenti, hogy az $y_2 \neq 0$ -ra (6) egyenlőség is teljesül, tehát $\text{rang } W < m + n$, ami viszont ellentmond feltevésünknek.

Megjegyzés. A (3) lineáris rendszer matematikai értelemben vett irányíthatóságát tanulmányoztuk, de valós gazdasági rendszer esetén vizsgálni kell az állapotváltozók nemnegativitását is. A nemnegativitási feltételek teljesülését a következő részben egy speciális esetben vizsgáljuk, feltételezve a termelés és a fogyasztás azonos ütemű egyenletes növekedését.

Megvizsgáljuk, hogy adott irányítás, azaz adott fogyasztás mellett hogyan alakulnak az (1) rendszer pályái, valamint az egyenletes növekedésű pálya hatását a meg nem újuló erőforrások készletére.

4. Az egyensúlyi arányos pálya vizsgálata

A továbbiakban keressük az (1) rendszer adott α ($\alpha \geq 0$) növekedési üteméhez tartozó egyensúlyi megoldását, feltételezve, hogy a termelés is és a fogyasztás is azonos α ütemben növekszik. Ekkor a rendszer megoldása $x_t = (1 + \alpha)^t x_0$ és $c_t = (1 + \alpha)^t c_0$ alakú, ahol $\alpha \geq 0$ és x_0, c_0 a kezdeti termelési, illetve fogyasztási szerkezetet jelöli. Az előbbi kifejezéseket x_t -re és c_t -re behelyettesítve az (1)-es egyenletbe azt kapjuk, hogy a kezdeti termelési és fogyasztási szerkezetek között az alábbi kapcsolatnak kell fennállnia:

$$(7) \quad (I - A - \alpha B)x_0 = c_0.$$

A (7) egyenletből következik, hogy az egyenletes növekedésű pályához tartozó kezdeti termelési szerkezet függ mind a növekedés ütemétől, mind pedig a kezdeti fogyasztástól. A továbbiakban feltételeket keresünk a nemnegatív x_0 kezdeti kibocsátás létezésére vonatkozóan.

A további érveléseinkben a következő jelöléseket használjuk: Legyen M egy tetszőleges nemnegatív $n \times n$ -es mátrix. $\lambda_1(M)$ jelölje az M mátrix Frobenius-gyökét, amely a mátrix legnagyobb abszolút értékű nemnegatív valós sajátértékét jelenti.

2. LEMMA. A (7) egyenletnek megfelelő x_0 kezdeti kibocsátási szerkezet létezik és nemnegatív, ha $\alpha \in [0, \alpha_0)$, ahol α_0 az ún. határnövekedési ráta, amelyre $\lambda_1(A + \alpha_0 B) = 1$.

Bizonyítás. Mivel az $A + \alpha B$ mátrix nemnegatív, a Perron–Frobenius-tételből (Morishima [5]) következik, hogy az $A + \alpha B$ mátrixnak van Frobenius-gyöke. Amennyiben ez utóbbi kisebb mint egy, akkor az $I - A - \alpha B$ mátrixnak létezik nemnegatív inverze.

Produktív termelési rendszereknél, $\alpha = 0$ esetben a $\lambda_1(A + \alpha B) < 1$ egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. $\alpha > 0$ -ra a Perron–Frobenius-tételek alkalmazásával könnyen belátható, hogy $\lambda_1(A + \alpha B)$ monoton növekedő, folytonos függvénye α -nak, és létezik $\alpha^* \left(\alpha^* = \frac{1}{\lambda_1(B)} \right)$ úgy, hogy $\lambda_1(A + \alpha^* B) \geq 1$. Ezért α értékét növelve $\lambda_1(A + \alpha B)$ is nő, a folytonosság miatt viszont léteznie kell egy pozitív α_0 -nak, amelyre $\lambda_1(A + \alpha_0 B) = 1$. Ezzel beláttuk, hogy minden α -ra, $\alpha \in [0, \alpha_0]$ teljesül a $\lambda_1(A + \alpha B) < 1$ egyenlőtlenség, ami viszont azt jelenti, hogy $(I - A - \alpha B)^{-1}$ létezik és nemnegatív. Azaz minden adott α növekedési ütemhez $\alpha \in [0, \alpha_0]$, és adott c_0 fogyasztáshoz létezik egy nemnegatív $x_0(\alpha)$ kibocsátási szerkezet, amelyre fennáll

$$(8) \quad x_0(\alpha) = (I - A - \alpha B)^{-1} c_0.$$

1. ÁLLÍTÁS. Az α_0 határnövekedési ráta az alábbi sajátérték-feladat megoldása:

$$B^{-1}(I - A)v = \alpha_0 v$$

valamely nemnulla n -dimenziós v vektorra.

Bizonyítás. A 2. Lemma alapján az α_0 határnövekedési rátára fennáll a

$$\lambda_1(A + \alpha_0 B) = 1$$

egyenlőség. Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan nemnulla v vektor, amelyre $(A + \alpha_0 B)v = v$. Ekvivalens átalakításokkal ez utóbbi egyenlőséget az

$$(I - A)^{-1} Bv = \frac{1}{\alpha_0} v$$

alakra hozzuk, ami viszont ekvivalens a bizonyítandó sajátérték-feladattal.

2. ÁLLÍTÁS. Legyen C és D nemnegatív $n \times n$ -es mátrix úgy, hogy $C \leq D$. Ekkor $C^2 \leq D^2$.

Bizonyítás. A feltétel azt jelenti, hogy $0 \leq c_{ij} \leq d_{ij}$ minden $i, j \in \overline{1, n}$ esetén. Ez utóbbi feltételt, valamint a mátrixok szorzásának szabályát felhasználva kapjuk,

$$\text{hogy } C^2 = \left[\sum_{k=1}^n c_{ik} c_{kj} \right] \leq \left[\sum_{k=1}^n d_{ik} d_{kj} \right] = D^2.$$

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy az 1. Állítás a C és D mátrixok tetszőleges hatványára is teljesül.

3. LEMMA. *Feltételezzük, hogy létezik az $x_0(\alpha)$ nemnegatív kibocsátási szerkezet. Ekkor*

- (i) $x_0(\alpha)$ α -nak monoton növekedő függvénye, ahol $\alpha \in [0, \alpha_0)$,
- (ii) $x_0(\alpha)$ nem feltétlenül korlátos függvény a $[0, \alpha_0)$ intervallumon.

Bizonyítás. (i) Legyen $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha_0)$, ahol $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Mivel $\alpha_1 \in [0, \alpha_0)$, ezért a 2. Lemma alapján $\lambda_1(A + \alpha_1 B) < 1$, azaz $(I - A - \alpha_1 B)^{-1}$ létezik és nemnegatív, a Neumann-hatványsora pedig konvergens: $(I - A - \alpha_1 B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (A + \alpha_1 B)^i$. Hasonlóképpen kapjuk, hogy $(I - A - \alpha_2 B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (A + \alpha_2 B)^i$. Az 1. Állítást és a Megjegyzést felhasználva $C = A + \alpha_1 B$ és $D = A + \alpha_2 B$ mátrixokra kapjuk, hogy $\sum_{i=0}^{\infty} (A + \alpha_1 B)^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} (A + \alpha_2 B)^i$, azaz $(I - A - \alpha_1 B)^{-1} \leq (I - A - \alpha_2 B)^{-1}$. Besorozva az egyenlőtlenséget a nemnegatív c_0 vektorral kapjuk, hogy

$$x_0(\alpha_1) \leq x_0(\alpha_2),$$

ami éppen bizonyítandó volt.

(ii) Tegyük fel, hogy $\alpha \rightarrow \alpha_0$. A $\lambda_1(A + \alpha B)$ függvény folytonosságát felhasználva $\lambda_1(A + \alpha B) \rightarrow 1$. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\lambda_1(E - A - \alpha B)^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda_1(A + \alpha B)}.$$

Ezért minden $\alpha \rightarrow \alpha_0$ esetén, amennyiben a $\lambda_1(I - A - \alpha B)^{-1}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor nem merőleges a nemnegatív c_0 fogyasztásvektorra,

$$\lambda_1(I - A - \alpha B)^{-1} \rightarrow \infty.$$

5. Az erőforrások vizsgálata

A gazdaság működéséből következik, hogy a meg nem újuló erőforrások korlátozott jellegükből adódóan korlátozzák a gazdaság növekedését. A továbbiakban ezt a kapcsolatot vizsgáljuk, azaz hogy miként alakulnak az egyenletes növekedésű pályához tartozó erőforrás-készletek.

Először meghatározzuk a (2) differenciaegyenlet megoldását, feltételezve, hogy a termelés is és a fogyasztás is azonos, nemnegatív α ütemben nő. Helyettesítsük be az (1) rendszer egyensúlyi megoldását $x_t = (1 + \alpha)^t x_0$ a (2) egyenletbe, majd az erőforrás-készletekre egyszerű számítással a következő formulát kapjuk:

$$(9) \quad R_t(\alpha, c_0) = R_0 - \frac{(1 + \alpha)^t - 1}{\alpha} D x_0(\alpha).$$

4. LEMMA. Az $R_t(\alpha, c_0)$ -val jelölt erőforrás-készletek

- (i) α -nak monoton csökkenő függvényei minden $\alpha \in [0, \alpha_0)$ növekedési ütem esetén, és
- (ii) c_0 -nak monoton csökkenő függvényei minden nemnegatív c_0 fogyasztásvektor esetén.

E feltételek a (9) egyenlőség analitikus alakjából közvetlenül következnek.

Megjegyzés. A fenti lemmák közgazdaságtani értelemben azt jelentik, hogy amennyiben a növekedés ütemét csökkentjük, vagy csökkentjük a kezdeti fogyasztási szintet, az erőforrás-készletek tovább tartanak.

6. Az erőforrás-készletek kimerülésének becslése

Az alábbi kifejtésben becsüljük, hogy kezdeti erőforrás-készletek mennyi ideig fedezik a termeléshez szükséges ráfordításokat, amennyiben mind a termelés, mind a fogyasztás egyenletes ütemben növekszik. Keressük azt a legnagyobb t időtartamot a (9) egyenletet használva, amelyre az erőforrás-készletek még nemnegatívak ($R_t \geq 0$). Jelöljük T -vel a keresett időtartamot, amely nem feltétlenül egész szám. Ekkor teljesülnie kell az alábbi egyenlőségeknek:

$$\frac{(1 + \alpha)^T - 1}{\alpha} = \min_i \left(\frac{(R_0)_i}{(Dx_0(\alpha))_i} \right),$$

ahol $(\cdot)_i$ jelöli a megfelelő vektor i -edik komponensét. T -t kifejezve kapjuk, hogy

$$(10) \quad T(\alpha) = \frac{\ln \left(\alpha \min_i \frac{(R_0)_i}{(Dx_0(\alpha))_i} + 1 \right)}{\ln(1 + \alpha)}, \quad \alpha \in (0, \alpha_0).$$

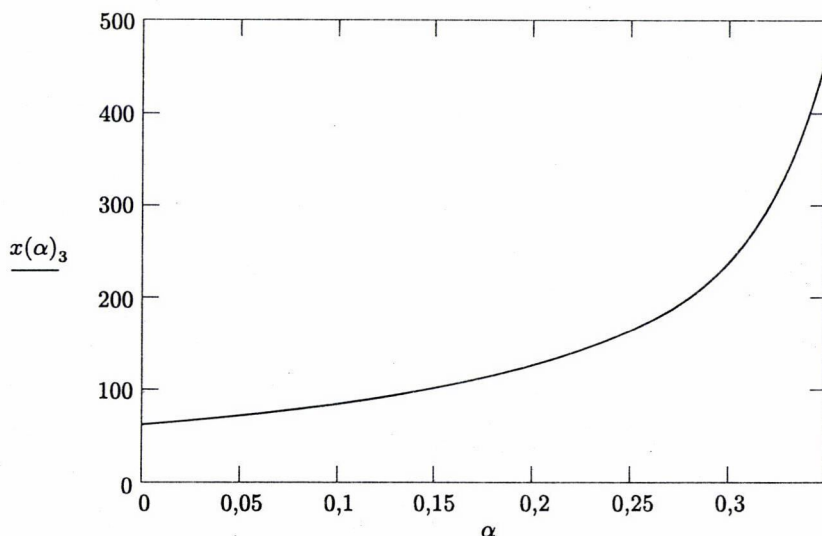
Megjegyzés. Egyszerű matematikai érveléssel belátható, hogy $T(\alpha)$ α -nak monoton csökkenő függvénye, ami pontosan azt jelenti, hogy csökkenő növekedési ütem esetén a készletek tovább tartanak.

7. Egy numerikus példa

A dolgozatban leírt modell működését egy egyszerű számpéldán mutatjuk be. Feltételezzük, hogy három gazdasági ágazatunk van, és minden ágazat működéséhez kétféle erőforrást használ. A folyó ráfordítások, a tőkeráfordítások valamint az erőforrás-ráfordítások együtthatóinak mátrixai legyenek a következők:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.03 & 0.02 \\ 0.05 & 0.02 & 0.04 \\ 0.07 & 0.06 & 0.01 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

A 2. Lemma eredményeit felhasználva, fenti paraméterekkel számolva, a határ-növekedési ráta értéke 0.404 ($\alpha_0 = 0.404$). Ez azt jelenti, hogy a gazdaság növekedési ütemének csak ennél kisebb értéket választhatunk.



1. ábra. A harmadik ágazat kezdeti termelési szerkezetének alakulása a növekedési ütem függvényében

Legyen az egyenletes növekedés üteme 0.03 (azaz 3%). A kezdeti fogyasztás és erőforrás-készletek vektorainak válasszuk a következő paraméterértékeket:

$$c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 10,000 \\ 15,000 \end{bmatrix}.$$

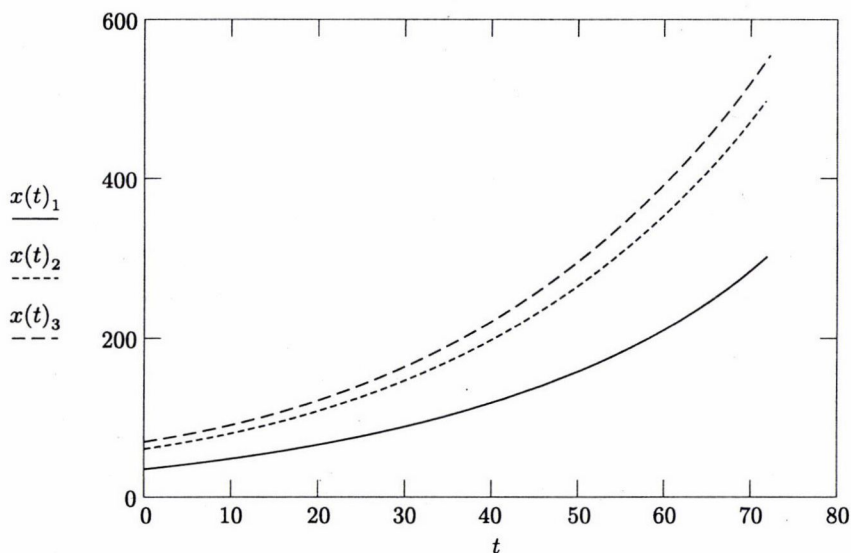
A (8) egyenletet alapján a gazdaság kezdeti termelési szerkezete:

$$x_0(0.03) = \begin{bmatrix} 35.787 \\ 59.479 \\ 66.302 \end{bmatrix}.$$

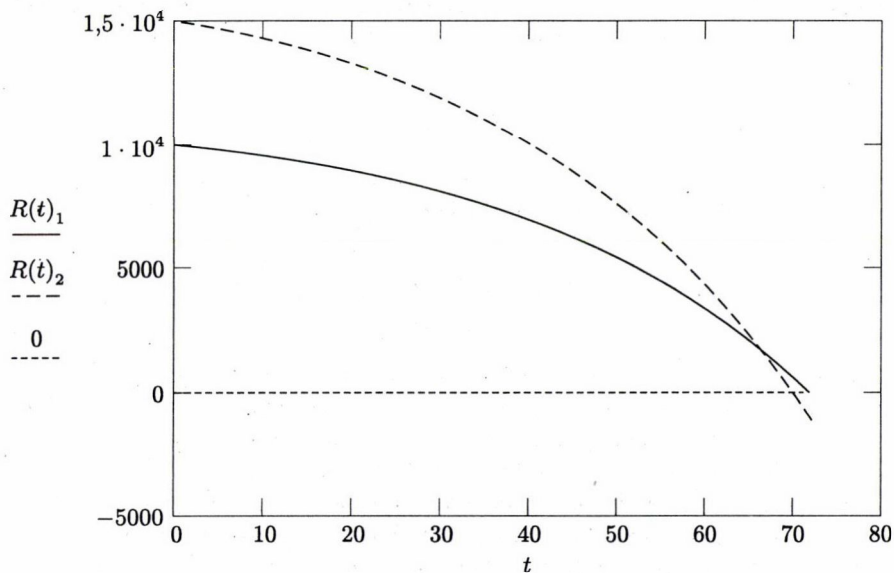
Amennyiben a növekedés ütemét változónak tekintjük, a kezdeti termelési szerkezet ezen növekedési ütem monoton növekvő, nemkorlátos függvénye (lásd 3. Lemma). Ez a tulajdonság a harmadik ágazatra az 1. ábrán látható.

A 2. és 3. ábrákon mutatjuk be a gazdaság egyensúlyi arányos pályájának, valamint az erőforrás-készleteknek időbeni alakulását az egyes ágazatok esetében, feltételezve, hogy a növekedési ütem értéke 0.03. Az ágazatok termelésének időbeni alakulását vizsgálva láthatjuk, hogy a termékkibocsátás monoton növekvő és nemkorlátos, míg az erőforrás-készletek kimerülése az időnek monoton csökkenő függvénye. A felvett adatokkal elvégezve a számolásokat a (9) azonosságban,

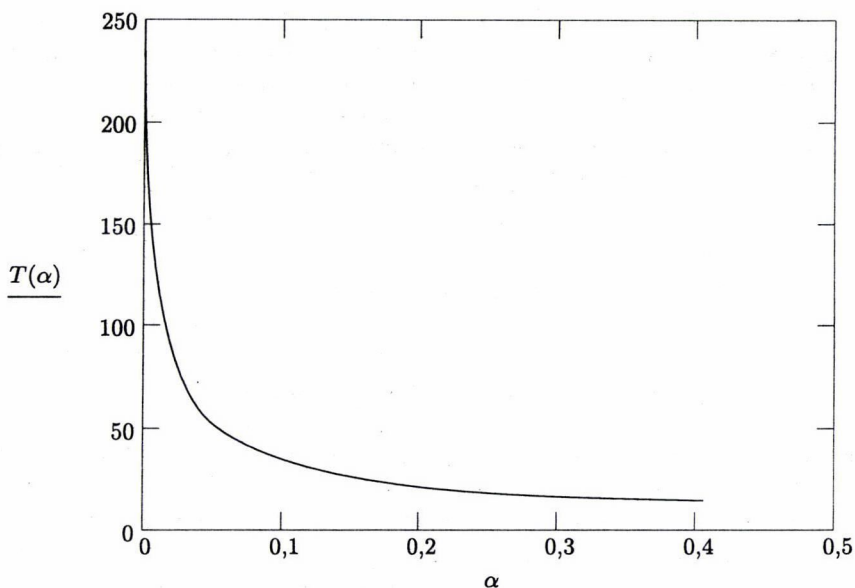
azt kapjuk, hogy az első fajta erőforrás-készletek 72 évig, viszont a második fajta erőforrás-készletek csak 70 évig elegendőek, így a gazdaság 70 évig lesz működőképes.



2. ábra. Az egyensúlyi arányos pálya időbeni alakulása az egyes ágazatok esetében



3. ábra. Az erőforrás-készletek kimerülése



4. ábra. Az erőforrás-készletek kimerülése a növekedési ütem függvényében

A 4. ábrán bemutatjuk, hogy a növekedési ütem értékét a megengedett határok között változtatva hogyan változik az erőforrás-készletek kimerülésének időpontja. Látható, hogy a növekedési ütem értékének növelésével ez az időpont egyre kisebb. A (10) azonosságot használva a példa adataira azt kapjuk, hogy az erőforrás-készletek mintegy 70 évig ($T(0.03) = 70.48$) biztosítják a gazdaság működését.

8. Összefoglalás és további kutatás

A dolgozatban egy általánosított Leontief-modellt vizsgáltunk. Az alapmodellt az erőforrások felhasználásával bővítettük ki. Bebizonyítottuk, hogy a bővített modell irányítható, ha az erőforrások felhasználási mátrixának a rangja megegyezik a sorvektorok számával. A dolgozat második részében az egyensúlyi arányos pálya hatását vizsgáltuk az erőforrások felhasználására. Bemutattuk, hogy a meg nem újuló erőforrások készlete tovább tart, ha a növekedési rátát és/vagy a fogyasztási szintet csökkentjük. A kutatás egy következő fázisában azt lehetne megvizsgálni, hogy az arányos egyensúlyi pálya hogyan befolyásolja a megújuló erőforrások (pl. víz, levegő) minőségét. Hogyan alakul az egyensúlyi arányos pálya, ha a kormányzat a gazdaság egészére kibocsátási határértékeket állapít meg? További vizsgálatok tárgya lehet az újrafelhasználás bevonása az alapmodellbe. Ekkor az újrafelhasználással csökkenteni lehet a természeti erőforrások felhasználását, ami a fenntartható fejlődés értelmében erőforrásokat takarít meg a következő generációknak.

Az említett lehetséges vizsgálatok figyelmen kívül hagyják az árak hatását az egyensúlyi arányos pályára. Ezen elemzések olyan árrendszer kialakításához nyújthatnak elemzési keretet, amelyekben a termelést környezettudatosan lehetne irányítani. Végül, a vizsgált modell eltekint a technológiai haladástól, vagyis az együtt-ható márixok időben változatlanok. A technikai haladás hatásának meg nem újuló erőforrásokra gyakorolt hatása lehet egy következő kutatási irány.

Irodalomjegyzék

- [1] Elaydi, S. N., *An Introduction to Difference Equations* (Springer, Berlin et al., 1996).
- [2] Kalman, R. E., Contributions to the Theory of Optimal Control, *Bol. Socied. Mat. Mexicana* (1960).
- [3] Turner, K., Pearce, D. and Bateman, I., *Environmental Economics* (T. J. Press Ltd., Cornwall, 1994).
- [4] Leontief, W., *Input-Output Economics* (Oxford University Press, Oxford, 1986).
- [5] Morishima, M., *Equilibrium Stability and Growth* (Oxford University Press, Oxford, 1964).
- [6] Schoonbeek, L., The Size of the Balanced Growth Rate in the Dynamic Leontief Model, *Economic Systems Research* 2 No. 4 (1990) 345–349.
- [7] Tietenberg, T., *Environmental and Natural Resource Economics* (Addison Wesley Longman, Inc., 2000).

(Beérkezett: 2004. szeptember 16.)

FLORISKA ADÉL
MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI
INTÉZET
SZENT ISTVÁN EGYETEM
2100 GÖDÖLLŐ
PÁTER KÁROLY U. 1.
afloriska@mszi.gau.hu

DOBOS IMRE
VÁLLALATGAZDASÁGTAN INTÉZET
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
1053 BUDAPEST
VERES PÁLNÉ U. 36.
imre.dobos@uni-corvinus.hu

NON-RENEWABLE RESOURCES IN AN OPEN DYNAMIC LEONTIEF MODEL

ADÉL FLORISKA AND IMRE DOBOS

In this paper we study a generalisation of the dynamic Leontief input-output model. We extend the standard dynamic Leontief model with the balance equation of non-renewable resources. Obviously the non-renewable stocks will decrease exploiting primary resources. In this study we examine the controllability of this extended model taking the consumption as control parameter. We suppose a balanced growth path both for consumption and production, and we examine how long these scarce resources will cover the inputs of production and how the lifetime of the system depends on the balanced growth rate and on the consumption, as well. To these investigations we use the classic results of the control theory and the eigenvalue problems of the linear algebra.