

FEJÉR LIPÓT 100 ÉVE HABILITÁLT KOLOZSVÁRON STABILITÁSELMÉLETBŐL

GARAY BARNABÁS, HATVANI LÁSZLÓ, KOLUMBÁN JÓZSEF

Budapest, Szeged, Kolozsvár

Fejér Lipót száz esztendeje, 1905. június 23-án habilitált a kolozsvári egyetemen. Habilitációs előadásának témája a közönséges differenciálegyenletek stabilitáselmélete volt, címe pedig *„Stabilitási és labilitási vizsgálatok a tömegpontrendszer mechanikájában”* [8].

Ebben a dolgozatunkban Fejér Lipóton kívül szeretnénk emléket állítani a kolozsvári iskolának is, amely a magyar matematika első, valóban nemzetközi rangú szakmai közössége volt. Fejér habilitációs előadásának ismertetését a stabilitáselmélet 1900 körüli általános helyzetét bemutató alfejezet, valamint a Ljapunov munkásságát röviden leíró Függelék foglalják keretbe. A hangsúlyt a habilitációs előadásban szereplő mechanikai példára helyezzük, amelyet Fejér – a topológia fogalmi és technikai apparátusának akkori viszonylagos fejletlensége miatt – csak részben tudott kielemezni [7], [9]; megmutatjuk, hogy Fejér gondolatmenetét az ötven évvel később felfedezett LaSalle-elv teszi teljessé.

1. A helyszín és a főszereplő

Gergely Jenő, a kolozsvári Bolyai Tudományegyetem egykori tanára, az első világháború idején Riesz Frigyes tanítványa volt. A társszerzők egyike tőle hallotta az alábbi történetet.

A Keleti Pályaudvaron a magyar tudományos élet számos kiválósága izgatottan várta a párizsi gyors érkezését. Henri Poincaré, a kor egyik legnagyobb tudósa jött Budapestre, hogy átvegye a Bolyai-díjat.¹ Az állomáson az üdvözlő szavak el-

¹ A Magyar Tudományos Akadémia Elnöksége 1902-ben Kolozsváron tartott ünnepi megemlékezést Bolyai János születésének századik évfordulója alkalmából. Ekkor jelentették be a Bolyai-díj létrehozását, amelyet – a Nobel-díjhoz hasonló feltételek mellett – ötévenként szándékoztak odaítélni a világ legjobb matematikusai egyikének. Elsőként ezt a díjat Henri Poincaré nyerte el 1905-ben. A második díjat David Hilbert kapta. Az 1915-ös díjkiosztás a háború miatt elmaradt. A Bolyai-díj történetének első szakasza a háborút követő inflációval (pontosabban az alapítványi

hangzása után megszólalt Poincaré is: – Hol van Fözsé? – kérdezte. A magyarok zavartan néztek össze. Ki lehet az a Fözsé? Hamarosan rájöttek, hogy Fejér Lipótról, a kolozsvári egyetem tanáráról van szó, aki 25 éves kora ellenére az akkori idők egyik legismertebb magyar matematikusa volt. Érthető tehát Poincaré óhaja, hogy magyarországi rövid látogatása alkalmával találkozhasson a fiatal tudóssal. Mit lehetett tenni? Hathatós közbenjárás után, néhány óra múlva egyetlen személykocsiból és mozdonyból álló különvonat robogott Fejérrel Kolozsvárról Budapest felé ...

Akár hiteles, akár nem, a történet azért is figyelemreméltó, mert Fejér Lipót nem az egyedüli matematikus, akinek tevékenysége lényegesen befolyásolta a XX. század tudományának fejlődését, és aki akkortájt hosszabb-rövidebb ideig a kolozsvári egyetemen dolgozott. Érdekes, hogy a XIX. század második felében a magyarországi tudományegyetemek közül nem a budapesti, hanem a kolozsvári vált fontos matematikai centrummá. A háborút megelőző másfél évtizedben a kolozsvári matematikai iskola a világ legjobbjai közé tartozott. Véleményünk szerint a XXI. században sem múlik el olyan munkanap, amelyen valahol a nagyvilágban Farkas Gyula, Fejér Lipót, Haar Alfréd vagy Riesz Frigyes nevét ne emlegetnék.

Hogyan jutott a XX. század elején a kolozsvári matematika ezekre a magaslatokra? Milyen személyi feltételek, társadalmi és gazdasági jelenségek, tudományművelési és oktatásfejlesztési stratégiák segítették a fejlődésben?²

1.1. A kolozsvári matematika a 19. század végén

1872-ben, a kolozsvári egyetem megnyitásakor a matematika szempontjából Erdélyben a helyzet nem volt kecsegtető. A két Bolyai tevékenységétől eltekintve a kor itteni matematikai irodalma egészen szegényes. A leginkább említésre méltó esemény Brassai Sámuel nevéhez fűződik, aki magyarra fordította Eukleidész *Elemek* című könyvét. Amikor a kolozsvári egyetemen a matematikai tanszékek megszervezésére sor került, az erdélyiek közül csak Brassai jöhetett szóba, aki akkor az Erdélyi Múzeum-Egylet igazgatója és a Természettár őre volt. Tudományos hírneve, tekintélye Kolozsváron olyan nagy volt, hogy az egyetem ügyével foglalkozó újságcikkek állandóan emlegették őt a jelöltek között. Már 1870-ben egyetemi tanárságra pályázott Pesten, és várta, hogy hívják meg a szanszkrit nyelv tanárának. Úgy tudjuk, Brassait báró Eötvös József tanügyminiszter megkérdezte, hajlandó volna-e az alapítandó kolozsvári egyetemen valamilyen tanszéket vállalni. A választást őrá bízták, de Brassai több tárgyat jelölt meg, ami utóbb a kinevezéseket eszközölő új tanügyminiszternek, Trefort Ágostonnak nem kis fejtörést okozott, „nem könnyen állapodhatván meg abban, melyik tanszékre nevezzék ki”. Brassai azt ajánlotta, hogy válasszanak a filozófia, növénytan, pedagógia, művelődéstörténet, nyelvtudo-

pénzek általános elértéktelenedésével) együtt ért véget. A díjat a Magyar Tudományos Akadémia 1994-ben újraélesztette.

²Bizonyára az erdélyi magarság mai gondjainak kezelése szempontjából is tanulságos lehet az ezekre a kérdésekre adott válasz.

mányok és a matematika között. Végül kinevezték nyilvános rendes tanárnak az elemi mennyiségtani tanszékre, amire maga Brassai is a legkevésbé számított.

A másik kinevezett matematikus nyilvános rendes tanár Martin Lajos volt a felsőbb mennyiségtan tanszékén, aki mérnökként lett 1859-ben az Akadémia levelező tagja, 1871-től pedig a kolozsvári távirda igazgatója. A kinevezés pillanatában, a szó szoros értelmében sem Brassai, sem Martin nem volt matematikus. Egyikük sem végzett matematikai kutatásokat, nem ez állt érdeklődésük középpontjában. Viszont mindketten érdeklődtek alkalmazott matematikai kérdések iránt: az előbbi csillagásztani, az utóbbi pedig repüléstechnikai tárgyú dolgozataival igazolta ezt.

A harmadik matematikai tanszékre, melynek neve mennyiségtani fizika volt, csak 1874-ben találtak megfelelő embert a fiatal Réthy Mór személyében.

Az egyetemnek nagyon keményen kellett küzdenie a kezdet nehézségeivel. Számos, többnyire célszerűtlen épületben folyt az oktatás. Az intézetek s az egyetemi könyvtár helyzete szinte kétségbeejtő volt. Igaz ugyan, hogy az Erdélyi Múzeum-Egylet összes gyűjteményét, mintegy 30 000 kötetből álló könyvtárával együtt, évi ötezer forintért 50 évre az egyetemnek bérbe adta, de az oktatás és a tudományos kutatás céljaira szolgáló szakkönyvtár alapját még ezután kellett lerakni. Az állam, a szükségletekhez képest, kezdetben csak csekély összeggel tudta segíteni az egyetemet. A kolozsvári társadalom maga is „kevésbé buzdult fel, s az első évben mindössze csupán négy alapítványt tett az ifjúság számára”. A tanárok csak hosszas keresgélés után találtak maguknak megfelelő lakást, s a kisvárosban a diákság sem talált elég szórakozást, ezért „zajos multságokban keresett kárpótlást”.

Ilyen előzmények után nem csoda, hogy az egyetem létesítése után néhány évig a kolozsvári matematika a felzárkózás kényszere alatt állt. A nehézségeket tetőzte, hogy azokban az években valójában az egész magyar matematika hasonló gondokkal küszködött. Az érdekeltek többsége tudta, hogy az egyetem csak úgy töltheti be igazi szerepét, ha ott az oktatás mellett magas szintű tudományos kutatás folyik. Ennek ellenére, úgy tűnik, az első években a tanárok között nem volt egyetértés az egyetemi tevékenység céljait és formáit illetően. A Ferenc József Tudományegyetem 1896-ban kiadott története és statisztikája szerint 1878. szeptember 8-án Imre Sándor rektor a tudományos szellem hiányát kifogásolta, hangsúlyozva, hogy az egyetem nem iskola, hanem tudományos intézet, s a kettőt nem szabad összekeverni. Ugyanakkor, „első és fődolognak a tudományok meggyökereztetését s terjesztését tartván, erőlesen sürgette a középiskolák reformját, hogy az ifjak igazán megfelelő előkészültséggel jöjjenek az egyetemre”. A következő évi rektorváltás idején a régi rektor büszkeséggel utalt az utóbbi tanévben kétszer tartott pályázati ünnepségre s az egyetemi ifjúság tudományos szorgalmának, önállóságának jeleire, valamint a tanári karnak a nemzeti és egyetemes tudományosság előbbre vitelében tanúsított és külföldön is elismeréssel fogadott munkásságára. Ezzel szemben Brassai Sámuel, az új rektor „kikelt az ellen, hogy a tanár ne csak maga törekedjék új dologra a tudományban, hanem tanítványait is ez irányban vezesse. Az egyetemi tanárnak nem az az első és fő kötelessége, hogy újat találjon, s az efféle research iránt való követelőzés felesleges, jogtalan és képtelen. Annál feleslegesebb, jogtalanabb és képtelenebb magukkal a hallgatókkal szemben.” Ezért kifogásolta a pályadíjakat,

„mint a melyek megtestesítései ama, már sokszor elutasított követelménynek, hogy a tanítványt újak fölfedezésére, a tudomány tovább-vitelére kell vezetni”. Szerencsére az elkövetkező években a kolozsvári egyetemen nem ez a felfogás vált uralkodóvá. Az egyetem egyre nagyobb figyelmet fordított a legtehetségesebb hallgatók alapos felkészítésére és a kutatásba való bevezetésére. A hallgatók számára kiírt kutatási pályázatok évről évre népszerűbbekké váltak, a tananyag pedig fokozatosan közeledett a tudomány aktuális problémáihoz. A legjobbak továbbképzését ösztöndíjakkal segítették. A tanárképzés munkájától függetlenül folyt az egyetemen az alkotómunkára alkalmassá tevő tudósképzés. Ugyanakkor az egyetem vezetősége nagy gondot fordított olyan tanárok kinevezésére, akik híres külföldi egyetemeken doktorátust szereztek, és ott elismert tudományos eredményeket értek el. Ezek sok olyan speciális kollégiummal segítették a tehetséges fiatalok fejlődését, amelyek egy-egy divatos diszciplína legmélyére nyúltak, magukba foglalva előadójuk sokszor egészen alapvető eredményeit is. Kolozsváron matematikából a számelmélet, a differenciálegyenletek elmélete, a komplex függvénytan, a vektoralgebra és analízis, a kvaterniók és az elliptikus függvények tana, valamint a Bolyai-geometria volt előtérben. Az eredményességet és színvonalat nemcsak a megjelent néhány monográfia, a sok litografált jegyzet, de a bel- és külföldi folyóiratokban közzétett értekezések egyre növekvő száma is bizonyítja.

Az állam évről évre többet költött az egyetemre: az első 15 évben 160 000 forintról 279 000 forintra nőtt a költségvetési támogatás. A tanárok tudományos működéséről és az egész egyetemről elismerő szavak hangzottak el a sajtóban s az országgyűlésen is. Mindezen erőfeszítések ellenére 1876 és 1886 között a matematikus hallgatók száma 67-ről 23-ra csökkent. Az egyetem vezetősége abban látta az okot, hogy éveken át még a jelesebb tanárjelöltek is csak nehezen találtak maguknak megfelelő állást. Annak fő okát pedig, hogy az egyetemi hallgatók száma általánosságban véve is alacsony maradt, a város rendkívüli drágaságában kereste.

A XIX. század utolsó évtizedének elején az egyetem életében fontos változások történtek. A tanszékek száma 51-re, a tantestület tagjaié 68-ra, a tanársegédekkel és gyakornokokkal együtt pedig a tudományos alkalmazottak száma 119-re emelkedett. A hallgatóké az első negyedszázadban 233-ról 702-re ugrott. Hasonlóképpen növekedett a matematikusok száma is. Különösen nagy nyeresége volt a tudománynak Farkas Gyula és a valamivel később Kolozsvárra került Schlesinger Lajos, akiknek munkássága döntő módon kihatott az itteni matematikai életre. Nagy szaktekintélyüket és rátermettségüket arra használták, hogy a matematikai oktatás és kutatás feltételeit minél magasabb szinten biztosítsák, és a kolozsvári iskola eredményeit mindenhol elismertessék.

Az épületgondok megoldása végett, Meixner Károly tervei szerint, Reményik Károly kolozsvári építész 1893-ban megkezdte a központi épület felépítését. Így 1895-ben Martin Lajos rektor, aki székfoglalójában a repülőgépről értekezett, immár az egyetem új épületében üdvözölhette az ifjúságot. Ugyanabban az évben Kolozsvár városa az államnak ajándékozta a Bel- és a Külső-Torda utca sarkán levő telket, hogy rajta az egyetemnek egészen modern könyvtári palotát emeljen.

A századfordulóra az egyetem Erdély szellemi központja, a tudományoknak valóban olyan szentélye lett, ahol gróf Mikó Imre szavai szerint „az ismeret, a felvilágosodás és ezáltal a szabadság ígét hirdetik”. Mindez, természetesen, elválaszthatatlan attól a társadalmi, technikai és gazdasági fejlődéstől, amely abban az időben Magyarországra – és benne Erdélyre – jellemző volt. Az ekkor kialakuló polgári társadalom igényelte az oktatás és a tudomány fejlesztését. A polgári családokból származó fiatalok egyre nagyobb hányada vonzódott a tudományokhoz. Nem egy fiatalember mondott le biztos megélhetést ígérő karrierjéről a tudományos pálya kedvéért.

Külön ki kell emelnünk a magyar középiskolai reformok jótékony hatását. A '90-es évek elejére sikerült kiépíteni egy modern iskolahálózatot, amelyben igényes, hatékony oktatás folyt. Kitűnő középiskolai tanárok jelentek meg, mint a matematikus Arany Dániel és Rátz László, akik fáradságot nem ismerő munkájukkal a fiatalok hosszú seregét nyerték meg a tudománynak. A matematikus-képzés szempontjából fontos szerepet játszott az 1893-ban elindított „magyar csoda”, a *Középiskolai Matematikai Lapok*, amely a maga nemében a legelső volt az egész világon (s a két háború által okozott kényszerszüneteket leszámítva) azóta is folyamatosan jelenik meg. Mindenkori szerkesztői pontosan tudták, milyen hasznos, ha tehetséges fiatalok, megfelelő irányítás mellett, éveken át példák tucatjain törik a fejüket és írják le gondolataikat. A ma hivatalosan KöMaL-nak nevezett lapon nevelkedettek egy része tudós lett, mások „csak” nagyon jó szakemberek, tanárok. Megoldói közül kerültek ki a XX. század legjobb magyar matematikusai, így azok is, akik az első világháborút megelőző időben világszintre emelték a kolozsvári matematikát.

1.2. Fejér Lipót kolozsvári elődei és kortársai

BRASSAI SÁMUEL (1800–1897) Torockószentgyörgyön született. Huszonegy éves korában a kolozsvári unitárius kollégiumban végezte a filozófiai tanfolyamot. Néhány évig nevelő, majd 1837-ben a kolozsvári unitárius kollégiumban a földrajz és a történelem tanára, később a matematikát és a természettant tanította. 1841-ben németországi tanulmányúton vett részt, azután visszatért tanári állásába mint igazgató. A szabadságharc után Pesten, majd ismét Kolozsváron tanárkodott. Akit a magyar matematikai szaknyelv fejlődése érdekel, sokat tanulhat Brassai írásaiból. Sok tankönyve közül már csak az 1883-ban Budapesten kiadott *Algebrai gyakorlatok*, valamint az általa magyarra fordított *Elemek* találhatók meg a kolozsvári matematikai könyvtárban. Őt tartják az utolsó magyar polihisztornak (aki sajnálatos módon nem ismerte fel Bolyai János új korszakot nyitó felfedezésének jelentőségét).

MARTIN LAJOS (1827–1897) Budán született, felsőbb tanulmányait szülővárosában, a Műegyetem jogelődjén és a Genie-Akadémián végezte. 1859-ig tartó hadmérnöki pályafutása után 1861-ben budai főmérnök, 1863–68 között középiskolai tanár. Ebben a minőségében, a közoktatásügyi miniszter megbízása alapján, mennyiségtan-, mértan- és ábrázoló mértan tankönyvet írt. 1868-ban a pesti távirda gondnoka, 1869-ben pedig a debreceni távirda helyettes igazgatója. Innen 1871-ben a kolozsvári távirdához igazgatónak nevezték ki. 1872-től haláláig a kolozsvári

egyetem felsőbb mennyiségtani tanszékének nyilvános rendes tanára. Tudományos tevékenységének középpontjában a repülés kérdésének megoldása állt. A repülés magyar úttörője. Főbb művei: *A vízszintes szélkerék* (Budapest, 1874), *Az erőműtani csavarfelületek* (Budapest, 1874), *A csillagászat újabbkori haladásáról* (Kolozsvár, 1877), *Variatio Számítás* (Kolozsvár, 1879), *A madárrepülés általános elmélete* (Kolozsvár, 1890). Ezek közül az első két mű, egy kötetbe foglalva, valamint a *Variatio Számítás* a kolozsvári matematikai könyvtárban ma is megtalálható.

A németországi híres egyetemeken doktorátust szerzett, alapos felkészültséggel és rendkívüli tehetséggel rendelkező fiatal matematikusok, akik a kolozsvári egyetemre kerültek, új lendületet adtak az itteni tudományos életnek. Közülük időrendi sorrendben az első RÉTHY MÓR (1848–1925) volt. Nagykőrösön született, a bécsi, a göttingeni és a heidelbergi egyetem hallgatója volt. Ez utóbbi helyen szerzett doktorátust 1874-ben. Már ebben az évben a kolozsvári egyetem rendkívüli tanára, majd két év múlva a mennyiségtani fizika tanszékének nyilvános rendes tanára. 1884–1886 között az elemi mennyiségtani tanszék vezetője. Ezután a budapesti Műegyetemre ment át. Az elméleti fizika egyik első magyarországi professzora. Külföldön is elismert eredményei az inkompresszibilis folyadéksugár alakjára vonatkoznak. Jelentősek a mechanika elveire és a kémiában szereplő Ostwald-elvre vonatkozó kutatásai. A matematika terén különösen értékesek azon eredményei, amelyek a Bolyai Farkas által vizsgált végszerűen egyenlő területek kérdésére vonatkoznak. Réthy Mór rendezte sajtó alá König Gyulával együtt a *Tentamen* második kiadásának első kötetét. Elévülhetetlen érdemeket szerzett a Bolyai-geometria kutatása és elismertetése területén is.

Réthy leghíresebb tanítványa a Marosvásárhelyen született VÁLYI GYULA (1855–1913) volt, aki később a kolozsvári egyetem első erdélyi származású, markáns matematikusa lett. Egyetemi tanulmányait 1877-ben Kolozsváron végezte, majd az egyetem támogatásával négy féléven át Berlinben Weierstrass, Kirchhoff, Kronecker, Borchardt és Kummer előadásait hallgatta. *A másodrendű parciális differenciális egyenletek elméletéhez* című doktori értekezését 1880-ban Kolozsváron védte meg. 1881-ben kezdte meg magántanári működését a kolozsvári egyetemen. 1884-ben a mennyiségtani természettan, majd 1886-ban az elemi mathésis tanárául választották meg. Több fontos publikációja a *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*-ben jelent meg. Amint Réthy is megjegyzi, „értekezéseinek nem a száma és nagysága, hanem azok minősége imponál”. Testi törekénysége, egyre jobban elhatalmasodó szembetegsége gátolta a munkában, ennek ellenére „lelke maradandók alkotására vitte”.

A kolozsvári egyetemen a matematikusok és fizikusok közül senki sem játszott fontosabb szerepet, mint FARKAS GYULA (1847–1930). Pusztasárosdon született, egyetemi tanulmányait a pesti egyetemen végezte, ahol főleg Jedlik Ányos volt rá nagy hatással. Később Batthyány Géza gróf jóvoltából franciaországi tanulmányúton vett részt. Farkas Gyula fiatalkori matematikai eredményei közül itt csak Bolyai Farkas trinomegyenletekre vonatkozó, a *Tentamen*-ben röviden tárgyalt, gyökközelítő algoritmusával kapcsolatos vizsgálatait említjük meg. Ezáltal a Bolyai-

algoritmus igen ismertté vált; általánosításaival, alkalmazásaival, a vele kapcsolatos konvergenciaproblémák vizsgálatával – a legújabb időkben is – több magyar és külföldi matematikus foglalkozott. Farkas Gyula 1887-ig Pesten magántanár, amikor kinevezik a kolozsvári egyetem tanárának. 1888-ban az egyetem rendes tanára lett, és e minőségében 1915-ig működött. Ortway Rudolf, egykori tanársegéde írta róla, hogy „mélyreható kritika, a hajthatatlan, mellékes szempontok által el nem téríthető keresése az igazságnak jellemezte úgy tudományos működését, mint egyetemi közügyekben kifejtett tevékenységét ... és épp mivel nem kereste a népszerűséget, igen nagy tekintélyt tudott magának szerezni, és áldásdús befolyást gyakorolni az egyetemi ügyek vezetésére”.

Egyetemi tanárként főleg az elméleti fizikai kérdéseivel foglalkozott, de a vizsgált problémák matematikai hátterét olyan mélységben dolgozta ki, hogy azok között klasszikus matematikai eredmények is vannak. Különösképpen a Fourier-féle mechanikai elv foglalkoztatta a '90-es évektől. Dolgozataiban egyenlőtlenségekkel adott kötések esetén az egyensúly szükséges feltételét adja meg. Ehhez bebizonyítja a homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó tételét, mely *Farkas-lemma* néven az egyik legismertebb magyar matematikai eredmény, sőt egyike a világ matematikai irodalmában a legtöbbet idézett tételeknek. Ezeknek a munkáknak az alapján ma világosan látjuk, hogy Farkas Gyula egyike a modern optimalizálás-elmélet megalkotóinak. Az utóbbi évtizedekben oly alaposan tanulmányozott és sokfelé alkalmazott variációs egyenlőtlenségek elméletének szintén egyik előfutára. Egyetemi előadásait gondos kidolgozásban litografálva közreadta. A kolozsvári matematikai könyvtárban még ma is megtalálható egyetemi jegyzetei: *Analytikus mechanika* (1907–08), *Analitikus mechanika* (1913–14), *Erőtan* (1913–1914), *A mechanika aseptanai* (1913–14). Ugyancsak megtalálható a Kolozsváron megjelent *Vector-tan és az egyszerű inaequatiók tana* című könyve. Utóbbi egy nagyon jól megírt vektoranalízis tankönyv, mely tartalmazza saját kutatásainak legfontosabb eredményeit is.

KLUG LIPÓT (1854–1944) Gyöngyösön született. Budapesten ábrázoló geometriából és matematikából szerzett tanári oklevelet. Pozsonyban, majd Pesten tanított, 1897-től 1917-ig a kolozsvári egyetemen az ábrázoló geometria tanszék tanára. Eközben, nagyszámú értekezés mellett, öt népszerű tankönyve jelent meg: *A projektív geometria elemei* (Budapest, 1892), *Projektív geometria* (Budapest, 1903), *Az általános és négy különös Pascal-hatszög konfigurációja* (Budapest, 1898), *Ábrázoló geometria* (Budapest, 1900) és *A harmadrendű térgörbék synthetikai tárgyalása*. Ezek közül az első négy Kolozsváron ma is megtalálható. Sajnos, egyetemi jegyzetei közül csak egy van meg: *Az egyszerű görbe felületek ábrázolása* (1909–10).

A századfordulón a kolozsvári egyetem matematikai intézetének külföldön legismertebb tanára SCHLESINGER LAJOS (1864–1933) volt. Nagyszombatban született, középiskolai tanulmányait Magyarországon, egyetemi tanulmányait pedig Heidelbergben és Berlinben végezte. Mint a berlini egyetem magántanára, 1890-ben egy félévet Kolozsváron tanított.

1897-ben, amikor nyilvános rendes tanárként az egyetemre került, már ismert tudós volt. *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* című híres könyvének első két kötetét mint a berlini egyetem magántanára, a lipcsei Teubner Kiadónál jelentette meg. A befejező, harmadik kötetet 1898-ban már kolozsvári professzorként jegyezte. A matematikus társadalom úgy ismerte őt, mint a differenciálegyenletek komplex függvénytanra épített elméletének egyik meghatározó szakteknintélyét. Kevés olyan része van ennek a jelentős elméletnek, amelyet Schlesinger ne gazdagított volna lényegbevágóan új eredményekkel.

Kolozsvárra érkezve, a kutatói munka folytatása mellett, nagy lelkesedéssel végezte az egyetemi oktatást. A kolozsvári matematikai könyvtárban ma is megtalálható 15 egyetemi jegyzete: *Elliptikus függvények elmélete és alkalmazásai* (1898–99), *Égi testek mechanikája* (1898–99), *A differenciál-számítás* (1900), *Riemann-féle felületek* (1900), *Elliptikus függvények* (1901), *Bevezetés a variatio számításba* (1902), *A tér abszolúte igaz tudománya* (jubiláris előadássorozat Bolyai János születésének 100. évfordulójára), *Differenciálszámítás* (190?), *Az abszolút sík eltolásaiból alkotott discontinuus csoportokról* (1905), *Fuchs-féle függvények* (1906–07), *Égitesetek mechanikája* (190?), *Görbevonalak és felületek elmélete* (1907–08), *Válogatott fejezetek az infinitesimális geometriából* (1908), *Égi testek forgásáról* (1908–09), *Differenciál-egyenletek elmélete* (1909–10). Előadásai lenyűgöznek áttekinthető, világos stílusukkal és a tárgykörök akkori legújabb eredményeinek szabatos tárgyalásával. Kétségtelen, hogy a mindenkori kolozsvári matematikai oktatás csúcsteljesítményei közé tartoznak.

Schlesinger Lajos kolozsvári tudományos munkásságának fontos eredménye a Teubner Kiadónál 1908-ban megjelent *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*. Ez nem a fent említett *Handbuch*-ban kifejtett elmélet átdolgozása, hanem a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek teljesen új módszerekkel való tárgyalása. Ez az első monográfia, amelyben a Vito Volterra olasz matematikus által értelmezett szorzatintegrál segítségével kezelik a lineáris differenciálegyenlet-rendszereket. Schlesinger szakteknintélyének elismerését jelenti a Német Matematikai Társaság gondozásában – a Teubner Kiadónál 1909-ben – megjelent *Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865* című könyve is. *Automorphe Funktionen* című ismert könyvét már mint a giesseni egyetem professzora írta.

Kolozsváron töltött évei alatt igen sokat tett az itteni matematikai élet felendítéséért. Farkas Gyulával és Vályi Gyulával együtt döntő szerepe volt abban, hogy az egyetemen kitűnő matematikai könyvtár jött létre. Schlesinger volt az, aki Kolozsváron Bolyai János szülőházát felkutatta. A Bolyai-geometria, amint egyetemi jegyzeteiből is kitűnik, szívügye volt. Bolyai János születésének centenáriumi ünnepségén tartott emlékbeszédében fontos érveket sorakoztatott fel a Bolyai-Lobachevskij-geometria prioritási vitájában, nagymértékben hozzájárulva Bolyai János lángelméjének elismertetéséhez.

Végül megemlítünk két nagy matematikust, akik ugyan Fejér távozása után, de az ő közreműködésével jöttek Kolozsvárra, és akikkel mindig szoros kapcsolatot tartott fenn.³

RIESZ FRIGYES (1880–1956) 1912 és 1919 között vezette a felsőbb mennyiség-tan tanszéket. Győrött született, és igen gondos nevelésben részesült. A középiskolát a bencésrend győri gimnáziumában végezte, egyetemi tanulmányait pedig a zürichi műegyetemen kezdte. A tudományos hivatás utáni vágya azonban győzedelmeskedett a biztosabb megélhetést nyújtó mérnöki pálya vonzóerején, és tanulmányait 1899-től a budapesti tudományegyetemen folytatta, majd egy évet töltött Göttingenben. Budapesten König Gyula és Kürschák József, Göttingenben Hilbert és Minkowski előadásai voltak rá a legnagyobb hatással. 1902-ben Budapesten avatták doktorrá, majd Lőcsén lett gimnáziumi tanár. Fiatalkori felfedezései hamar világhírűvé tették, még mielőtt Kolozsvárra került volna.

Egyetemi jegyzetei közül Kolozsváron ma csak három található meg: *Függvénytan* (1911–12), *Fourier-féle sorok* (1913–14) és *Függvénytan* (1914–15). Ugyancsak megtalálható a Riesz kolozsvári éve alatt Párizsban megjelent *Les systemes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues* című könyve, amely jelentős szerepet játszott a funkcionálanalízis fejlődésében.

A mai Magyarország területéről Kolozsvárra került kiváló fiatal matematikusok sorát Haar Alfréd (1885–1933) zárta. Budapesten született, és az ottani evangélikus gimnáziumban érettségizett, ahol Rátz László, a *Középiskolai Matematikai Lapok* neves szerkesztője volt a matematika tanára. Ennek a lapnak Haar is szorgalmas munkatársa volt középiskolás korában. Az előző évben érettségizettek számára évenként tartott országos „Eötvös Loránd matematikai verseny”-en 1903 őszén Haar Alfréd nyerte az elő díjat. Egyetemi tanulmányait Budapesten és Göttingenben végezte. Budapesten Beke, Eötvös, Frölich, Kürschák, Rados, Scholtz, Göttingenben pedig Carathéodory, Hilbert, Klein, Minkowski, Prandtl, Runge, Schwarzschild, Voigt és Zermelo előadásain, illetve szemináriumain vett részt. Hilbertnél doktorált 1909-ben. Ezt követően magántanár a zürichi műegyetemen. 1912-ben a kolozsvári egyetem egyik matematika-fizika tanszékére nevezték ki, először nyilvános rendkívüli tanárrá, majd 1917-ben nyilvános rendes tanárrá.

Haar Alfrédnél könyv nem jelent meg, azonban több igen gondosan megírt jegyzetet készített, amelyek sok eredeti részletet tartalmaznak, s mint egyetemi tankönyvek ma is beválnának. Sajnos, ma ezek közül Kolozsváron csak négy található meg: *Differential-Gleichungen* (Göttingen, 1911), *Algebra* (1912–13), *Determinánsok és quadratikuss formák* (1912–13), *Számelmélet* (1915–16).

1.3. Fejér Lipót Kolozsváron

Farkas Gyula – máig ható tudományos tevékenysége mellett – meghatározó szerepet játszott abban, hogy a kolozsvári matematikai intézet, szinte a semmiből

³Jelen írásunknak nem lehet célja Riesz Frigyes és Haar Alfréd matematikai munkásságának ismertetése. Életútjukat is csak kolozsvári tartózkodásuk végéig követjük. Ugyanez vonatkozik magára Fejér Lipóra is.

indulva, az egyetemalapítás után alig negyedszázaddal a Monarchia legkiválóbb tudományos műhelyei közé emelkedett. A tudomány iránti elhivatottsága, nagyszerű emberi kvalitásai következtében tanártársai és tanítványai körében egyaránt nagy tekintélynek örvendett, melyet az egyetemi ügyek intézésében érvényre is juttatott. Többször volt dékán és egyízben az egyetem rektora is. Szava mindenben döntő volt. Befolyását rendszerint arra használta, hogy az egyetemi tevékenység anyagi és személyi feltételei minél jobbakk legyenek. Igényes volt, sokat kívánt magától és másoktól is. Az emberi értékeket igen nagyra becsülte, és sokat tett azokért, akiket arra érdemesnek tartott. Fejér Lipót esete is bizonyítja, hogy mennyire szívén viselte a honi matematika és fizika ügyét, ugyanis 1905 márciusában Fejér Lipót kifejezetten Farkas Gyula közbenjárására került a kolozsvári egyetemre. (Valószínűleg ő kezdeményezte Schlesinger Lajos (1897), Riesz Frigyes (1911) és Haar Alfréd (1912) kinevezését is.)

Miért éppen Fejér Lipót? Mit tudhattak róla kinevezésekor a kolozsvári egyetemen? Tudták, hogy Pécsen született 1880. február 9-én. Gimnazistaként egyik leg-sikeresebb megoldója volt a *Középiskolai Matematikai Lapok* feladatainak. 1897-ben a Matematikai és Fizikai Társulat versenyén második helyezést ért el. Ugyan-ebben az évben beiratkozott a budapesti műegyetem gépészmérnöki szakosztályába, egy szemeszter után azonban átlépett az ún. egyetemes szakosztályba mint a matematika- és fizikatanári szak hallgatója. Itt főleg König Gyula, Kürschák József és Rados Gusztáv előadásait hallgatta, majd átkerült a budapesti tudományegyetemre. Az 1899/1900-as tanévet a berlini egyetemen töltötte, ahol Frobenius, L. I. Fuchs (aki egyébként Schlesinger apósa volt) és H. A. Schwarz előadásait látogatta. Hazatérve, az 1900/1901-es tanévet ismét a budapesti egyetemen töltötte. Ezalatt publikálta a párizsi *Comptes Rendus*-ben a Fourier-sorokkal kapcsolatos tételét, ami nevét világszerte egy csapásra ismertté tette. Tanári szakdolgozatát matematikából a Fourier-sorokról, fizikából pedig a fényelhajlásról írta. 1901. szeptember 1-től repetitor volt a budapesti egyetemen, majd ugyanott 1902 tavaszán megszerezte a bölcsészdoktorátust. Az 1902/1903-as tanév első felét Göttingenben, második szemeszterét pedig Párizsban töltötte. Göttingenben főleg Hilbert és Minkowski, Párizsban Picard és Hadamard előadásait hallgatta. 1905-ig kilenc közleménye jelent meg, melyből három a már említett *Comptes Rendus*-ben, egy pedig a *Mathematische Annalen*-ben. Ilyen előzmények után – Farkas Gyula szavait használva – senki sem szeretne volna „elveszíteni őt a külföldnek”. A kolozsvári egyetem lehetőséget biztosított számára az előlépésre. A mennyiségtani természettan tanszéken (melynek egyedüli tagja Farkas Gyula volt) repetitorként alkalmazták. Ebben ragyogó matematikai tehetségének tanúbizonysága mellett annak is szerepe lehetett, hogy korábban fizikát is tanult, és érdeklődéssel fordult az elméleti mechanika felé. Fejér Kolozsvárra kerülése után három hónappal, 1905 nyarán habilitált. Az 1905/1906-os tanév első felében Schlesinger Lajos tanársegédneként heti két órában gyakorlatokat vezetett a felsőbb és elemi mennyiségtan, valamint a mennyiségtani természettan tanszékei mellett. A második szemeszterben már az analízis s az analitikai mechanika magántanára. Ekkor a variációszámítás II. részét tanítja heti két órában, valamint az infinitezimális calculus alkalmazásait a görbevonalak és

felületek elméletére, heti három órában. 1906 szeptemberében adjunktus lett, 1911-ben pedig nyilvános rendkívüli tanár. A kolozsvári egyetemen tevékenységét ez év nyarán befejezte, mert szeptembertől a budapesti egyetem nyilvános rendes tanára lett. Vele párhuzamosan Schlesinger Lajos is távozott Kolozsvárról.

Az 1911-es év őszén Farkas Gyula több olyan levelet írt Fejér Lipótnak, amelyek ma is megtalálhatók Fejér hagyatékában. A Fejér által írott levelek hollétéről nincs tudomásunk. Farkas Gyula Fejérhez intézett levelei közül néhányat Prékopa András közölt egyik tanulmányában [16]. Ezekből a levelekből arra következtethetünk, hogy Fejér feladott állásának betöltésére Riesz Frigyeset javasolta.⁴

Kolozsvári éveit Fejér Lipót egyik fontos feladata volt a Matematikai Szeminárium ügyvezető igazgatása. Ezt a (mai szóhasználatnál elve: összintézeti) szemináriumot, amelynek vezetői (akkori szóhasználatnál: igazgatói) Farkas Gyula, Schlesinger Lajos és Vályi Gyula voltak, 1901-ben létesítették. A konkrét szervezői, „ügyvezető igazgatói” teendőket 1905-ig Schlesinger látta el, utána Fejért bízta meg vele.

Végül szóljunk arról is, milyen város volt Kolozsvár száz évvel ezelőtt és hogyan élt benne Fejér Lipót. Passuth László *Kutatóórok* című önéletrajzi regényében felvillant néhány emlékképet a város akkori hangulatából. „... úgy idézem vissza a várost, mint amelyet egyik oldalon a Monostor, a másikon a Hóstát zöld övezete határol. A Hóstát két végtelenbe nyúló főutcája mellett a néhány ezer főnyi parasztság „corpus separtum”-ként élt. Elég sok vasutas tömörült telepekbe, kevés kisebb gyárüzem volt. Viszonylag sok volt a bank, az egyházi intézmény, de mindent felülmúlta az iskolák. A nem városi eredetű diákok özönlése szeptembertől júniusig tartott, s rengeteg kosztot adónak, szabónak, kvártélyosnak juttatott kenyeret. Szemináriumokon töltötték a bölcsességet mezei jogászok fejébe, s viszonylag színes volt a város „éjszakai” élete is. ... Ipari munkásság csekély számban élt, s nem emlékszem arra, hogy bérkövetelések, sztrájkok vagy munkanélküliség formájában éreztünk volna társadalmi feszültséget. A szociális eszmék elsősorban elméleti forrásokból közelítettek: egyetemi professzorok „radikalizálódtak”, ... erős volt a Munkásbiztosító Pénztár hatása (... Kun Béla is itt dolgozott) ... A sokféle vallás együttélése feltételezett

⁴Farkas Gyula Fejér Lipótnak (1911. október 1-én) ... Kérem azonban, hogy szíveskedjék vélem közölni Riesz Frigyes lakcímét, hogy a helyettesítés ügyének eldöntése után lehető közvetlenséggel fordulhassak hozzája ... (1911. október 3-án) ... A bizottság tegnap javaslatomat magáévé tette, s a rendes tanszék helyettesítésére meg a szeminárium ügyvezető igazgatására Riesz Frigyes fölkérését javasolja. Kari ülés holnapután ... (1911. október 20-án) ... A mai napon Riesz Frigyes új társunk megérkezett; délből a dékáni hivatalban találkoztunk vele a dékán, Vályi meg én, s immár a matematikai szemináriumok vezetését is kezébe adtuk. Nyomban megírta a fekete táblánkon előadásainak és gyakorlatainak a hirdetését, 23-án megkezdte előadásait. Most már bizonyos jótékony megnyugvás szállotta meg áruvaságunkat. Haar felől írt szíves értesítését vételekor azonnal közöltem a dékáni hivattal ... (1911. november 4-én) ... íme Riesz Frigyes társunk már javában megkezdte itteni működését nagy lelkesedéssel a math. szeminárium körül is ... Tegnap levelet kaptam Haartól. Úgy látszik ebből, hogy meghívójában, mint a tanszéki bizottság kari referense meg lettem nevezve. Következőleg válaszómban jónak láttam kissé körvonalazni a lényegét. Egyébiránt Haar levele oly mély hazafias érzelmeket árul el, hogy most már nem is tartok attól, hogy ha egyszer haza került, elvesztjük a külföldnek ... A megszólítás Kiválóan Tisztelt Kedves Tanártársam, illetve Fölöttébb Tisztelt Kedves Tanártársam, az aláírás pedig minden esetben Igaz barátja, Farkas Gyula.

bizonyos türelmességet, melyben nem volt sok helye a vaskalaposságnak. Mert talán sehol Magyarországon nem volt olyan tarka a lakosság vallási megoszlás szerinti térképe akkor, mint ebben a városban, ahol a főiskolák egy része is felekezeti formákban élt tovább. A többség katolikus volt, de a város törzssőkös lakosságának komoly hányada – kálvinista. A lutheránusok inkább szász ajkúak. Az unitáriusok egyetlen püspöksége is itt volt. Két „görög” templom osztozott a román híveken: a görög-katolikus és a görögkeleti. A háború előtt patrícus zsidóság élt a városban, neológ életformák között. A biedermeier város a maga apró szellemi vulkánjaival alapjában provinciális pletykafészek volt, bár a városlakók távolról sem ismerték úgy egymást, mint más ötven-hatvanezer lakosú városban. Ennek oka az állandó népcserélődés volt, elsősorban a középosztályban: nagyszámú tisztviselő telepedett be, vagy vándorolt el, a hivatali lét mozgástörvényei szerint ...”.

A New York Szálló nagykávéháza volt a társadalmi és szellemi élet központja. A teremben két hosszú különasztal volt, ahol egyetemi tanárok s mágánások jól megfértek egymás mellett. Sűrűn ültek össze, poharaztak, közösen vonultak a „művészasztalokhoz”. Ott a Nemzeti Színház színészei, írók, újságírók vertek hagyományyszerű tanyát. „Van itt Kolozsvárt egy néhány nyakas, javíthatatlan idealista. Kifinomodott izlésű, művészi hajlandóságú emberek. Van közöttük piktor is, szobrász is, építész is, író ember is” – írja az *Ellenzék* 1905. január 3-án. A város sajátos, történelmi légköre, s ugyanakkor szellemi avantgardizmusa érezte hatását ezeken az összejöveteleken. A szájhagyomány szerint Fejér Lipót törzsvendég volt a New York kávéházban. A szépirodalomban és zenében egyaránt tájékozott matematikus a társasági élet népszerű alakja volt. Így találkozott egy tarokkparti sodrában Passuth anyjával is, aki nagyjából egyidős volt vele. Passuth elbeszélése szerint, játék után az ifjú professzor megkérdezte a fiatal hölgyet, miért nem iratkozik be az egyetemre, s felajánlotta, hogy vállalja matematikai előkészítését ...

Fejér szellemi érdeklődése a matematikán messze túlterjedt. Szenvedélyesen szerette a zenét, és maga is jól zongorázott. Muzsikuskok és írók éppúgy nagyra tartották ítéleteit, mint esztéták és jogfilozófusok. A New York kávéházban többször találkozott Ady Endrével is. Barátságukat Ady neki ajándékozott arcképén a dedikáció melegsége illusztrálja.

A Farkas utca volt a tudomány és a műzsák közös szentélye, gyönyörű gesztenyesorral. Egyik végében az egyetem főépülete, mellette a régi kőszínház, velük szemben a piarista gimnázium, a másikban pedig a református kollégium és a torony nélküli református templom. Ezek, a körük társult intézményekkel együtt, mintegy megszabták e nevezetes városrész hangulatát. Ebből az utcából tért be Fejér Lipót nap mint nap munkahelyére, az egyetem főépületébe.

2. Habilitáció, szóban-írásban

Fejér Lipót éppen száz esztendeje, 1905. június 23-án habilitált a kolozsvári Ferencz-József Tudományegyetem Matematikai és Természettudományi Karán. Ha-

bilitációs előadásának témája a közönséges differenciálegyenletek stabilitáselmélete volt, címe pedig „Stabilitási és labilitási vizsgálatok a tömegpontrendszer mechanikájában”. A habilitációs előadás témaválasztását minden bizonnyal Farkas Gyula és Schlesinger Lajos kezdeményezték, összhangban a kolozsvári matematika hagyományával és – amint arra már a korábbiakban utaltunk – az analitikai mechanika leendő magántanárának oktatási feladataival.⁵ Fejér habilitációs előadásának írásos változata a *Mathematikai és Fizikai Lapok* 1906-os évfolyamában jelent meg [8]. Az ezt (logikailag) követő [7], [9] dolgozatok közvetlenül kapcsolódnak a habilitációs előadás témaköréhez.⁶

2.1. Stabilitáselmélet 1900 körül

A stabilitás fogalma a matematikába a mechanikából került, a mechanikába pedig a latin köznyelvből. *Stabilitas* állhatatosságot, szilárdságot, állandóságot, tartósságot, elmozdíthatatlanságot jelent. A görög hasonló értelemben a *hedraios* szót használja, amint az a magyar fül számára is visszacseng a poliéder, a „sokféleképpen letelepedni képes test” nevének hallatán. Jól állni (*sto = állni*) [latin], illetve jól ülni (*hedra = ülőhely*) [görög] – ez a stabilitás.

A stabilitás fogalmának a múlt század elején nem volt általánosan elfogadott matematikai definíciója. Magát az elnevezést akkor már vagy százötven éve egyre gyakrabban használták a legkülönbözőbb mechanikai rendszerek egyensúlyi helyzetének, illetve általános megoldásainak vonatkozásában – magától értetődő természetességgel, de az egymáséitól gyakorta teljesen eltérő értelemben⁷. A stabilitás mint

⁵ Az általában vett differenciálegyenletek elmélete egyébként fontos szerepet játszott Fejér tanulmányaiban, sőt az őt egy csapásra világhírűvé tevő szummációs tételt is az elliptikus differenciálegyenletek elméletének egy kérdése motiválta. A nevezetes eredmény megszületésének történetét (s benne az $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ körlemezre vonatkozó $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = g$ peremfeladat megoldását leíró Poisson-féle integrálformula szerepét) Turán Pál írta meg a *Fejér Lipót Összegyűjtött Munkái – Leopold Fejér Gesammelte Arbeiten I–II, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970* kötetben, pontosabban az eredeti Comptes Rendus dolgozat ottani facsimile változatát követő kommentárban. Fejér egyébként kilenc differenciálegyenletek témájú cikket publikált, amelyek közül az első kettő [3], [4] még kolozsvári működése előtt jelent meg. Az Ostwald-féle mechanikai elvről írott két dolgozatát [5], [6] Réthy Mór [és minden bizonnyal a (leendő) kolozsvári állás], a habilitációs előadás utáni lineáris közönséges differenciálegyenletek dolgozatot [10] pedig Schlesinger Lajos hatása/készítése inspirálta. Kolozsvári évei után Fejér egyetlen alkalommal tért vissza a differenciálegyenletek témaköréhez [11]. Differenciálegyenletek témájú írásainak a hivatkozásjegyzékben történő felsorolása az *Összegyűjtött Munkái*-ban szereplő sorrendet (az egyes dolgozatok ottani sorszáma rendre 3, 7, 10, 11, 13, 14, 16, 18, 57) követi.

⁶ Egészen 1918-ig általános szokás volt a hazai matematikában a magyar és a nem magyar nyelven párhuzamosan történő publikálás. A magyar és a német (esetenként francia) változatok megjelenési sorrendje a szerző szabad döntésétől függött, tartalmukat tekintve csaknem mindig a későbbi időpontban közlésre leadott változat a gazdagabb. Fejér esetében a [7] és a [9] dolgozatok egymás szó szerinti fordításai. Habilitációs előadásáról (legjobb tudomásunk szerint) csak 65 évvel később készült (német) fordítás, amely az *Összegyűjtött Munkái*-ban olvasható.

⁷ Az első többé-kevésbé sikeres kísérletet egyensúlyi helyzet stabilitásának, pontosabban vízben úszó test felborulás elleni stabilitásának definiálására Euler tette, 1749-es „Hajózástudomány”-ának *De stabilitate, qua corpora aquae insidentia in situ aequilibrarii persistent* fejezetében. A mérnöki gyakorlat sokkal gyorsabban fejlődött, mint a rá vonatkozó absztrakció. Watt 1784-ben felfedezte a centrifugális regulátort, amellyel szabályozni és stabilizálni tudta a gőzgép által forgatott

olyan, konkrét mechanikai rendszerek tulajdonsága volt, nem pedig az őket leíró közönséges differenciálegyenletrendszereké. Stabil lehetett egy egyensúlyi helyzet, egy mozgás vagy éppen a mozgások összessége. Adott egyensúlyi helyzetek és mozgások stabilitása bizonyos zavaró hatásokra vonatkozott, amelyek a kezdeti állapot, illetve a mechanikai rendszer paramétereinek kismértékű megváltozását – ma úgy mondanánk, az $\dot{x} = f(x)$ egyenlethez tartozó kezdetiérték-feltétel, illetve az egyenlet jobb oldalának perturbációját – eredményezték. Ez a sokszínűség meglehetősen módon tükröződik Felix Klein ([14], 345. oldal) megjegyzésében: „Allgemein verbunden man nämlich mit dem Worte „instabil“ die Auffassung eines ausnahmsweisen und turbulenten Vorganges“. Instabilitás mint turbulencia? Stabilitás mint szokásos viselkedés? Teljesen egyet kell értenünk Lord Kelvin ([19], 282. oldal) Felix Klein által is idézett véleményével: „There is scarcely any question in dynamics more important for Natural Philosophy than the stability or instability of motion”.⁸

A XIX. századi égi mechanika központi kérdése a Naprendszer (Lagrange) stabilitása volt, ami alatt azt értették, hogy a bolygók nem ütköznek össze sem egymással, sem a Nappal, de túlságosan el sem távolodhatnak tőle. A matematikai modell az úgynevezett n -test probléma, amikor is n darab pontszerű m_i tömegű test úgy mozog $\mathbb{R}^3$ -ban, hogy rájuk csak az egymás általi tömegvonzás az egymástól vett mindenkor $|r_i - r_j|$ ($i \neq j$) távolságok négyzetével fordítottan arányos erők hatnak. Vegyük észre, hogy az energiamegmaradás

$$(1) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i^2 - \gamma \left(\sum \left\{ \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|} \mid i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n \right\} \right) = \text{Const.}$$

formulája szerint $\max \{|\dot{r}_i| \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ pontosan akkor nem korlátos, ha $\max \{|r_i - r_j|^{-1} \mid i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n\}$ sem az. Együttal az is látszik, hogy az n -test probléma pozitív időben korlátos megoldásai automatikusan a teljes $t \geq 0$ félegyenesen vannak értelmezve. Így a Nap és a kilenc bolygó (Lagrange) stabilitása – kihasználva a súlypont helybenmaradását is – matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy a 10-test problémában szereplő valamennyi tömegpont mozgása hely és sebesség tekintetében $t \rightarrow \infty$ mellett korlátos marad⁹.

tengely szögsebességét. Igazából csak ezzel lépte túl Alexandriai Heron majd 2000 évvel korábbi munkásságát, aki saját gőzgépét-gőzgépkezdeményét nem tudta jól „kordában tartani” (viszont sikerrel oldotta meg a lámpában égő olaj szintjének valamint a vízőra sebességének szabályozását).

⁸ Az egyes idegen nyelvű idézeteket szándékosan nem fordítottuk le, hogy érzékeltessük a hazai szaknyelv (ki)alakításának a feladatát, amelyet egyébként, mint arra már utaltunk, Fejér és kortársai olyan derekasán felvállaltak.

⁹ Általában is, jöllehet az égi mechanikán kívül ez az azonosítás teljesen önkényesnek tűnik, egy korlátos mozgást Lagrange értelemben stabilnak hívunk és vice versa. A (Lagrange) stabilitás = korlátosság szóhasználat védelmében meg kell jegyeznünk, hogy a közelítő eljárások Neumann János és Lax Péter által kiépített általános elméletének híres *konzisztencia & stabilitás* $\Leftrightarrow$ *konvergencia* tételében a stabilitás szintén korlátosságot jelent, lineáris feladatokra bizonyos lineáris operátorok egyenletes korlátosságát, nemlineáris feladatokra pedig bizonyos becslések egyenletességét. (Itt jegyezzük meg azt is, hogy a numerikus analízis egyes fejezetei a stabilitás kifejezést sok más egyéb értelemben is használják.)

Kihasználva az erőter örvénymentességét, Poincaré igazolta, hogy amennyiben az n -test problémát leíró közönséges differenciálegyenlet $6n$ dimenziós fázisterének (testenként három hely- és három sebességkoordináta) egy korlátos V tartománya teljes trajektóriákból áll, akkor a V -ben mozgó n tömegpont kezdeti mozgásálapotának tetszőlegesen kicsiny környezetébe $t \rightarrow \infty$ mellett egy valószínűséggel végtelen sokszor tér vissza, azaz majdnem minden $x_0 \in V$ rendelkezik az alábbi, rekurrenciának nevezett tulajdonsággal: minden $\varepsilon > 0$ és $T > 0$ esetén létezik olyan $\tau > T$, hogy $|x(\tau; x_0) - x_0| < \varepsilon$, ahol $x(\tau; x_0)$ az $x = x_0$ kezdeti állapotból a $t = 0$ időpontban induló megoldásnak a $t = \tau$ időpontban felvett értékét jelöli. Ennek az eredménynek a fényében Poincaré egy másik stabilitásfogalmat is használ és az n test együttesének pontosan azokat a mozgásait nevezi (Poisson) stabilnak, amelyek a mai szóhasználat szerint rekurrenssek.

Pontrendszerek egyensúlyi helyzetének stabilitását Lord Kelvin és Tait ([19], 202. oldal) így definiálják: „[...] a material system [...] when displaced infinitely little in any direction from a particular position of equilibrium, and left to itself, it commences and continues vibrating, without ever experiencing more than infinitely small deviation in any of its parts, from the position of equilibrium, the equilibrium in this position is said to be stable”. A huszadik században született matematikus azonnal felismeri ebben a stabilitás ma általánosan elfogadott definíciójának csíráját.

2.1. Definíció. Tekintsük az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenletet, ahol $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ folytonos függvény. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden $x_0 \in \mathbf{R}^n$ esetén az $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ kezdetiérték-problémának pontosan egy megoldása létezik és hogy ez az $x(\cdot; x_0)$ -al jelölt megoldás értelmezve van a teljes $t \geq 0$ félegyenesen. Legyen továbbá $f(0) = 0$. Az $\dot{x} = f(x)$ egyenlet $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzete STABIL, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges $|x_0| \leq \delta$ és $t \geq 0$ mellett $|x(t; x_0)| < \varepsilon$.

2.2. Definíció (folytatás). Az $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzet ASZIMPTOTIKUSAN STABIL, ha stabil és ezenkívül még létezik olyan $\eta > 0$ is, hogy tetszőleges $|x_0| \leq \eta$ és $t \rightarrow \infty$ esetén $|x(t; x_0)| \rightarrow 0$.

(Érdemes megjegyeznünk, hogy a stabilitás definíciójában szereplő feltétekből már következik a megoldásoknak a kezdeti feltételektől való folytonos függése. Így az $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzet mindenképpen rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden $\varepsilon > 0$ és $T > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges $|x_0| \leq \delta$ és $t \in [0, T]$ mellett $|x(t; x_0)| < \varepsilon$. Egyensúlyi helyzet stabilitása tehát azt jelenti, hogy a kezdeti feltételektől való folytonos függés ε - δ megfogalmazása a $[0, T]$ helyett a teljes $[0, \infty)$ intervallumon érvényes.) Abban mindenki egyetértett, hogy egy lineáris rendszer egyensúlyi helyzetét pontosan akkor kell stabilnak hívni, amikor valamennyi megoldás korlátos a $t \geq 0$ időintervallumon. Mindez teljes összhangban van az összes eddigi megfontolással.

2.3. TÉTEL. Tekintsük az $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenletet, ahol A valós elemű n -edrendű négyzetes mátrix¹⁰. Az alábbi tulajdonságok egymással páronként ekvivalensek:

- (i)_S az $\dot{x} = Ax$ egyenlet $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzete stabil;
- (ii)_S az $\dot{x} = Ax$ egyenlet megoldásai a $t \geq 0$ időintervallumon (egyenként) korlátosak;
- (iii)_S az A mátrix valamennyi sajátértékének valós része ≤ 0 , a 0 valós részű sajátértékek mindegyikéhez pedig annyi dimenziós sajátaltér tartozik, amennyi az illető sajátérték multiplicitása a karakterisztikus polinomban.

2.4. TÉTEL (folytatás). Egymással páronként ekvivalensek az alábbi tulajdonságok is:

- (i)_{AS} az $\dot{x} = Ax$ egyenlet $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil;
- (ii)_{AS} az $\dot{x} = Ax$ egyenlet minden megoldása $t \rightarrow 0$ mellett az $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzetéhez tart;
- (iii)_{AS} az A mátrix valamennyi sajátértékének valós része < 0 .

Az előző tétel vezet tovább Ljapunov „stabilitás linearizálással” tétele felé.¹¹

2.5. TÉTEL (Ljapunov (1892)). Tekintsük az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenletet, ahol $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sima¹² függvény. Tegyük fel, hogy $f(0) = 0$ és hogy az $A = f'(0)$ deriváltmátrixra teljesül a (iii)_{AS} feltétel. Ekkor az $\dot{x} = f(x)$ egyenlet $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil.

A „stabilitás linearizálással” módszer általánosan ismert volt, azt azonban a Weierstrass-féle analitikus szigorúság talaján felnőtt matematikusok – közöttük Fejér is – nem tartották matematikailag megalapozottnak. Teljesen igazuk volt: nem tudtak és nem is tudhattak Ljapunov 1892-es korszakalkotó felfedezéséről. Az okokat röviden taglaljuk írásunk Függelékében, ahol egyúttal kitérünk Ljapunov munkásságának általános értékelésére is. Biztosak vagyunk abban, hogy ez a Függelék az olvasók többsége részére számos meglepetést tartalmaz.

¹⁰Az A , mint mátrix jelölés még Fejér idejében sem volt szokásos: a meghatározó elemeket kiírták a megfelelő kettős indexekkel, a közbülső sorok és oszlopok elemeit pedig egyszerűen ki-pontozták.

¹¹A Watt-féle centrifugális regulátor differenciálegyenletrendszerét Maxwell írta fel és vizsgálta meg 1868-ban. A magasabbfokú tagok elhagyásával linearizált az ($\omega = \omega_0$ állandó szögsebességnek megfelelő) egyensúlyi helyzet körül és meghatározta, hogy a paraméterek mely értékeire teljesül az aszimptotikus stabilitás (iii)_{AS} feltétele. Érdeemes felidézni, hogy a (iii)_{AS} tulajdonság megfogalmazható az A mátrix karakterisztikus polinomjának együtthatóira vonatkozó feltételrendszerként is. Ezt az úgynevezett Routh kritériumot a 19. század végének mérnökei egyre gyakrabban használták nemlineáris rendszerek egyensúlyi helyzeteinek stabilitásvizsgálatára is.

¹²Az $f \in C^2$ feltevés bőven elegendő. Ljapunov azt tette fel, hogy az f függvény analitikus. A nem-analitikus jobb-oldalú közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó egzisztencia- és unicitás-ételek csak a XIX. század utolsó évtizedében születtek meg. Akárcsak Ljapunov, Fejér is szinte egész életében hűséges maradt az analitikus függvényekhez. Absztrakt tereket is csak nagyritkán használtak.

2.2. A stabilitás fogalma Fejér olvasatában

Az n -test probléma egyszerre Lagrange és Poisson stabil megoldásait Fejér Poincaré nyomán „astronomiailag stabilis”-aknak nevezi. Habilitációs értekezése ezzel a definícióval kezdődik.

Az n -test probléma ma is hihetetlenül nehéz, és a bonyolult dinamikai viselkedések hosszú sorának meglepte bizonyítható benne [1], [2]. Tanulmányozása meghatározó volt a a dinamikai rendszerek XX. századi elmélete legkeményebb módszereinek kialakulása során. Száz évvel ezelőtt még csak sejtették, mennyire összetett lehet annak a testnek/bolygónak a mozgása, amelynek a többiekhez viszonyított helykoordinátái nem maradnak korlátosak. Fejér – az $m_3 = 0$ választás által jellemzett (Nap, Jupiter, ideális kisbolygó) úgynevezett korlátozott 3-test problémában – Jacobi, Hill, Poincaré, Charlier, G. Darwin, Bohlin, Kobb és Levi-Civita gondolatait ismertetve érvel egy ilyen tulajdonságú „kéményszerű” (ma úgy mondanánk, a Hill-féle felület szingularitásán át divergáló) megoldás létezése mellett.

A stabilitás Fejér habilitációs előadásában szereplő második definíciója minimális változtatásokkal az akkorra már alighanem folklórnak számító „minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $|\tilde{x}_0 - x_0| \leq \delta$ és $t \geq 0$ mellett $|x(t; \tilde{x}_0) - x(t; x_0)| < \varepsilon$ ” formulára egyszerűsíthető. Csatlakozva Klein és Sommerfeld [14] véleményéhez¹³, Fejér ezt a definíciót – amennyiben x_0 nem egyensúlyi helyzet – megengedhetetlenül szűknek tartja. Konkrét mechanikai példákon keresztül bemutatja, hogy a definíciót érdemes módosítani a parciális és az orbitális típusú stabilitásfogalmak irányába, de egyik változtatást sem érzi igazán meggyőzőnek. A bőség zavarával szembekerülve így foglal állást: *„A stabilitás fogalmának még a tömegpontrendszerek mechanikájának keretén belül is nagyon különböző tartalmat szokás adni. Azon vitatkozni, hogy ezen különböző definíciók között melyik a legjobb – nem lehet; a stabilitás ugyanis, mint populáris fogalom, néhány – tőle igazán elválaszthatatlan jegyen kívül annyira határozatlan, továbbá annyira relatív, hogy a fennforgó viszonyok különfélesége szerint egymástól lényegesen különböző definíciókat állíthatunk fel, a nélkül, hogy a stabilitás populáris fogalmával ellentmondásba jutnánk”*.

Talán nem erőltetett párhuzamot vonnunk a „kaotikus” melléknév mostani valamint a „stabil” melléknév száz évvel ezelőtti használata között. Jóllehet a kaotikusság Devaney-féle definíciója egyre inkább kiszorítani látszik a többit, be kell vallanunk, hogy a matematikusok mindennapi szóhasználatában a „kaotikus” egy-

¹³A német algebraista Klein (aki egyéb munkáiban a differenciálegyenleteket csak úgy emlegeti, mint bizonyos transzformációcsoportok generátorait), monumentális esettanulmányt [14] készített a pörgettyűről, erről a John Herschel szép szavával élve, „philosophical instrument”-ről [talán bizony a cirkálók ágyukamráit kellett stabilizálni ... igen, azokat] – a konkrétak adva a prioritást az általánossal szemben, az angol empirizmus legjobb hagyományainak megfelelően. Fejér – habilitációs előadásának számos részlete az igazságtól, ha feltételezzük, Fejér számára Felix Klein hatása és nézőpontja meghatározó volt a stabilitáselmélet szempontjából. A Lagrange–Dirichlet-tétellel kapcsolatban Fejér [7], [8], [9] Bohl, Hadamard, Hamel, A. Kneser és Painlevé munkái mellett egyébként Liapounoff egy francia nyelvű (nagy felfedezéseihez képest meglehetősen partikuláris) cikkére is hivatkozik.

szerűen a „roppant bonyolult” szinonimája. Felix Klein már idézett megjegyzésének értelmében a „stabil” annak idején egyszerűen a „rendezett”, vagy legalábbis a „nem csúnya” biztonságérzetét sugározta.

2.3. Fejér példája tömegpont egyensúlyának stabilitásáról ellenálló közegben

Habilitációs előadásában [8] (akkor szép magyar kifejezéssel magántanári próbaelőadásnak nevezték) Fejér Lipót két problémáról beszélt: a már említett n -test-problémáról, és tömegpont egyensúlyának stabilitásáról ellenálló közegben. Ez utóbbi kérdéskörnek egy külön dolgozatot [7] is szentelt, amelyben leírja a habitációs előadásban ismertetett saját eredményei (egy kisebb mértékű általánosításának) bizonyítását is. A most kezdődő alfejezetben végig ezzel a dolgozattal foglalkozunk.

Jelölje x, y, z egy egységnyi tömegű tömegpont koordinátáit az $\mathbf{R}^3$ térben. Tegyük fel, hogy a pontra egy konzervatív erő hat, amelynek $U : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ a potenciálfüggvénye, és a mozgás ellenálló közegben történik. Az ellenállásból eredő erő

$$\left(-f(v) \frac{x'}{v}, -f(v) \frac{y'}{v}, -f(v) \frac{z'}{v} \right)$$

alakú, ahol (x', y', z') a sebességvektor (vagyis $(\cdot)'$ az idő szerinti differenciálhányados jelöli), v a sebességvektor hossza, $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ folytonos függvény, és $f(v) > 0$, ha $v > 0$. A mozgást Newton II. axiómájának megfelelően az

$$\begin{aligned} (2) \quad x'' &= \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) - f(v) \frac{x'}{v} \\ y'' &= \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) - f(v) \frac{y'}{v} \\ z'' &= \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) - f(v) \frac{z'}{v} \end{aligned}$$

egyenletek írják le. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy adott (x_0, y_0, z_0) helyzetből adott (x'_0, y'_0, z'_0) kezdősebességgel kiindulva hogyan mozog a pont időben és térben. A probléma megoldását az a $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ függvény adja, amely eleget tesz a differenciálegyenleteknek és az

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, & z(0) &= z_0, \\ x'(0) &= x'_0, & y'(0) &= y'_0, & z'(0) &= z'_0 \end{aligned}$$

kezdeti feltételeknek. Ismeretes, hogy ez a rendszer nem integrálható típusú, ami durván szólva azt jelenti, hogy nem létezik formula a mozgást leíró függvényekre. Ezért sokszor megelégszünk a mozgások aszimptotikus viselkedésének, vagyis

az őket leíró függvények t nagy értékeire mutatott tulajdonságainak leírásával. Fejér sokkal szebben fogalmaz: „... az ellenálló közegben történő mozgás lefolyására, vagy, mi több, annak véglefolyására nézve keresünk előleges tájékoztatást”.

Az aszimptotikus tulajdonságok közül mind elméleti, mind gyakorlati szempontból a legfontosabb a stabilitás. Az az időszak a stabilitás matematikai elméletének hősora volt, akkor kezdtek letisztázódni maguk az alapfogalmak. A habilitációs előadásból [8] kiderül, hogy Fejér a ma Ljapunov nevéhez kötött stabilitásfogalommal dolgozott. Tegyük fel, hogy $\text{grad } U(0, 0, 0) = \vec{0}$, vagyis hogy az $x = y = z = 0$ pont egyensúlyi helyzet, és alkalmazzuk a Ljapunov-féle 2.1. Definíciót az $x = y = z = 0$, $x' = y' = z' = 0$ egyensúlyi állapot stabilitásának meghatározására. Ehhez először vezessük be a ma használatos vektoros írásmódot. Jelölje $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ a mozgó pont helyvektorát, $\vec{v} = \vec{r}' = (x', y', z') \in \mathbf{R}^3$ pedig a sebességvektort. Jelölje továbbá r , illetve v az $\vec{r}$, illetve a $\vec{v}$ vektor hosszát:

$$r := (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad v := ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{1/2}.$$

Így a (2) másodrendű differenciálegyenlet-rendszer a tömörebb

$$(3) \quad \vec{r}'' = \text{grad } U(\vec{r}) - f(v) \frac{\vec{v}}{v}$$

alakot ölti, amely ekvivalens a hat egyenletből álló

$$(4) \quad \vec{r}' = \vec{v}, \quad \vec{v}' = \text{grad } U(\vec{r}) - f(v) \frac{\vec{v}}{v}$$

elsőrendű rendszerrel. A 2.1. Definíció értelmében az $\vec{r} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$ egyensúlyi állapot *stabil*, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $r_0^2 + v_0^2 < \delta(\varepsilon)^2$, akkor $r(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0)^2 + v(t; \vec{r}_0, \vec{v}_0)^2 < \varepsilon^2$ tetszőleges $t \geq 0$ esetén.

Fejér a [7] dolgozatot a híres Lagrange–Dirichlet-tétel ismertetésével kezdi, amely a konzervatív esetről (nincs ellenállás, vagyis $f(v) \equiv 0$) azt mondja, hogy „*valamely egységnyi tömegű P tömegpontnak G egyensúlyi helyzete stabilis, ha az $U(x, y, z)$ potenciálfüggvénynek a G pontban izolált maximuma van*”.¹⁴

Fejér itt nem fejti ki, mit ért stabilitáson, de a kijelentést követő paragrafus szó szerint idézve a következőképpen szól: „*Ha ekkor a G pont körül, mint középpont körül, két elegendő kicsiny, de különben tetszőleges R_1 és R_2 ($R_1 < R_2$) sugarú gömböt írunk, akkor a következőt állíthatjuk:*

Ha a P tömegpont mozgása folyamán egyszer, valamely t_0 időpontban, a kisebbik, R_1 sugarú gömb belsejében van, akkor a tömegpont nemcsak minden későbbi időben marad a nagyobb, R_2 sugarú gömb belsejében, hanem minden korábbi időben

¹⁴A ma szokásos terminológia az U helyett a $-U$ függvényt használja és potenciális energiának nevezi; így a Lagrange–Dirichlet-tétellel kapcsolatban potenciálgödörrel, izolált minimumról beszél. A továbbiakban is Fejér szóhasználatát és (amennyire csak lehet) jelölésrendszerét követjük.

is az R_2 sugarú gömb belsejében volt – feltéve, hogy a t_0 időpontban a sebessége kisebb, mint egy az R_1 , R_2 sugaraktól függő mennyiség. Az izolált maximum esetében tehát stabilitás van a »jövőre« és »múlra« vonatkozólag.

A 2.1. Definíció értelmében vett stabilitás tényleg következik az izolált (vagyis szigorú) maximumra vonatkozó feltételből, ahogyan azt Dirichlet gyönyörű bizonyításában megmutatta. Érdekes viszont megjegyezni (és a zseniális Fejér Lipótnak ez az apró tévedése is jól mutatja a stabilitáselmélet akkori képlékeny voltát), hogy a helyes megállapítást követő kiegészítő „magyarázat” (definíció?) nem állja meg a helyét, ugyanis az abban az R_1 és R_2 gömbbel megfogalmazott tulajdonság *nem következik* az izolált maximum feltételéből. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha olyan gömbszimmetrikus U potenciálfüggvényt tekintünk, amelynek a G pontban szigorú maximuma van ugyan, de a G tetszőlegesen kicsiny környezetében létezik olyan G körüli koncentrikus gömbgyűrű, ahol U állandó értéket vesz fel. (Érdekes elgondolkodni azon, hogy mely U függvények esetén teljesül a Fejér által megfogalmazott (a Ljapunov-félénél erősebb) stabilitási tulajdonság.)

Fejér megemlékezik a Lagrange–Dirichlet-tétel megfordításának problémakörében elért eredményekről és idézi az akkor ismert legáltalánosabb tételt¹⁵: „Ha a potenciálfüggvénynek a G egyensúlyi helyzetben izolált minimuma van, és ha a potenciálfüggvénynek minimális volta a Taylor-féle sor legalacsonyabb rendű tagjai révén jut felszínre, akkor az egyensúlyi helyzet labilis.” Ezután rátér a dolgozat fő témájára: milyen hatással van a közegellenállás az egyensúlyi helyzet stabilitására, instabilitására?

Általános természeti törvényként ismeretes az a tény, hogy a közegellenállás stabilizáló hatású. Ezt kicsit pontosítja a következő tétel:

2.6. TÉTEL (Fejér [7]). *Ha a potenciálfüggvénynek a G egyensúlyi helyzetben izolált maximuma van, akkor a jövőre nézve stabilitás van, míg a múlra vonatkozólag labilitás is lehetséges.*

Azt is észrevette, hogy a közegellenállás növeli a stabilitás fokát abban az értelemben, hogy a mozgás időnként nagyon lelassul, ahogyan ő fogalmaz, a sebesség abszolút értéke, „ v végtelen sokszor tetszőlegesen kicsinynek lesz”. Ezt a tulajdonságot ma a

$$(5) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

formulával fejezhetjük ki.

Megállapítja továbbá: „Az ellenállás a labilitás esélyét csökkenti.” Ezért érdekesebbnek tartotta az instabilitásra gyakorolt hatás tanulmányozását, nevezetesen annak a kérdésnek a megválaszolását, hogy ha olyan potenciálfüggvényből indulunk ki, amelynek esetén ellenállás hiányában az egyensúlyi helyzet instabil, akkor

¹⁵A probléma még ma sincs teljesen lezárva. A nagy áttörést Kozlov és Palamodov dolgozata [15] jelentette, amelyben a tétel megfordíthatóságát analitikus potenciálfüggvények egy igen általános osztályára bizonyították.

megmarad-e az instabilitás. Pontosabban, milyen potenciálfüggvény, milyen közeg-ellenállás esetén marad meg az instabilitás?

2.7. TÉTEL (Fejér [7]). *Tegyük fel, hogy „a potenciálfüggvénynek az egyensúlyi helyzetben izolált minimuma van, mely tulajdonsága a potenciálfüggvénynek a Taylor-féle sor legalacsonyabb rendű tagjai által lesz nyilvánvalóvá.*

Szigorúan ki lehet most már mutatni, hogy ha $f(v)/v$ a v kicsiny értékei mellett egy véges felső határnál, M -nél kisebb, akkor az egyensúlyi helyzet labilis.”

Kettős szándékkal tartottuk meg az eredeti fogalmazást. Egyrészt, be szeretnénk mutatni a Fejér által használt szép magyar matematikai műnyelvet, másrészt érzékeltetni a nagy tudósnak azt a megértést könnyítő képességét, amellyel bonyolult tételeket tudott formulák nélkül megfogalmazni.

Fejér a tétellel kapcsolatban felvet egy problémát: „Ha tehát pl. $f(v)$ olyan erősen konvergál a zérushoz mint v^α , hol $\alpha \geq 1$ – a legtöbbször használatos esetek $\alpha = 1, 2$ ide tartoznak –, akkor az egyensúlyi helyzet labilitása még biztosítva van. Ha azonban az $f(v)$ végtelen kicsinyinyé válásának mértéke v^α , hol $0 < \alpha < 1$, vagyis, ha az ellenállás – összehasonlítva az $\alpha \geq 1$ esethez tartozó ellenállással – a v kicsiny értékei mellett nagy, akkor a labilitást a most közlendő módszer segítségével már nem tudom kimutatni. KÉNYTELEN VAGYOK¹⁶ NYÍLTAN HAGYNI AZT A KÉRDÉST, VAJJON AZ ELLENÁLLÁS KÉPES-E EZEN ESETBEN A LABILITÁST TELJESEN MEGSZÜNTETNI?”

A 2.7. Tétel bizonyítása [7] az energia változását leíró „elevenező-egyenlet” (Fejér a latin „vis viva” mintájára próbálkozik meg a „die Energie” magyarításával) és egy, Jacobi-tól származó azonosság ötletes kombinációján alapszik, amelyben $f(v)/v$ korlátossága lényegesen ki van használva.

Úgy gondoljuk, Fejér Lipót munkássága előtt akkor tisztelgünk méltóképpen, ha érzékeltetjük a jelen írásban azt is, hogy az eltelt száz év alatt az utódok hogyan fejlesztették tovább azt az elméletet, amelynek elindításában Ljapunovval, Poincaré-val és a többi más nagy tudóssal együtt ő is részt vett, és amit ma a DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KVALITATÍV ELMÉLETE, vagy kicsit általánosabban DINAMIKUS RENDSZEREK néven szokás emlegetni. Fejér kiváló problémafelismerő érzékét dicséri, hogy ezeknek az elméleteknek a történetén végighúzódik az általa választott téma, az ellenállás hatásának vizsgálata. Most megadjuk Fejér két idézett tételének továbbfejlesztett változatát. A 2.9. Tétel egyben választ ad a Fejér által nyitva hagyott problémára is.

2.8. TÉTEL. (Salvadori [18]) *Tegyük fel, hogy*

(i) *az U potenciálfüggvénynek helyi maximuma van G -ben;*

(ii) *G izolált egyensúlyi helyzet.*

Ekkor a (3) rendszer G egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil.

Ez a tétel azt fejezi ki, hogy a stabilitás megmaradásánál és a (5) tulajdonságnál jóval több teljesül: a rendszer aszimptotikusan visszatér az egyensúlyi állapotba,

¹⁶dőlt betűs kiemelés az eredetiben

azaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r}(t) = G, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0.$$

2.9. TÉTEL (Salvadori [18]). *Tegyük fel, hogy*

- (i) *az U potenciálfüggvénynek nincs helyi maximuma G -ben;*
- (ii) *G egy környezetében az $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid U(x, y, z) < U(G)\}$ halmaz nem tartalmaz egyensúlyi helyzetet.*

Ekkor a (3) rendszer G egyensúlyi helyzete instabil.

Mindkét tétel bizonyítása ugyanazon a technikán alapszik, amelynek kulcsa a megoldások pozitív határhalmazának fogalma és az úgynevezett LaSalle-féle (1960) invariancia-elv. (Ez utóbbi lényegében véve nem más, mint az orosz nyelvű irodalomban a Barbasin-Kraszovszkij-tétel (1952) néven emlegetett állítás.) A bizonyítások – n szabadsági fokú rendszerekre – megtalálhatók a [17] monográfia III. fejezetének 5. pontjában. A módszernek létezik kiterjesztése olyan rendszerekre is, amelyekben a kinetikai energia és az erők explicit módon függhetnek az időtől is (nem-autonóm, avagy instacionárius rendszerek [12, 13]).

Mivel Fejér csak a 2.7. Tételre adott részletes bizonyítást és ezzel kapcsolatban vetett fel problémát, mi is csak a 2.9. Tételt bizonyítjuk. Olyan bizonyítást adunk, amely csak implicit módon használja a Fejér után kialakult fogalmakat — magát a bizonyítást akár Fejér is leírhatta volna ebben a formában.

A 2.9. Tétel bizonyítása. 1. Először vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik a mozgások során az

$$E(\vec{r}, \vec{v}) := \frac{1}{2}v^2 - U(\vec{r})$$

teljes mechanikai energia. Ehhez számoljuk ki az E iránymenti deriváltját a (3) rendszer szerint:

$$\begin{aligned} (6) \quad E'(\vec{r}, \vec{v}) &= \vec{v} \cdot \vec{v}' - \text{grad } U(\vec{r}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \text{grad } U(\vec{r}) - f(v)v - \text{grad } U(\vec{r}) \cdot \vec{v} = \\ &= -f(v)v \leq 0. \end{aligned}$$

Tehát az energia csökken a mozgások mentén és

$$(7) \quad E'(\vec{r}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

2. Feltehetjük, hogy $G = (0, 0, 0)$, és $U(0, 0, 0) = 0$. A továbbiakban indirekt utat választunk: tegyük fel, hogy az $\vec{r} = \vec{0}$ egyensúlyi helyzet stabil. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített, és vegyük a (4) rendszer egyensúlyi helyzetének stabilitási definíciójában az ε -hoz tartozó $\delta(\varepsilon) > 0$ számot. Az (i) feltétel következtében a

$$H := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid U(\vec{r}) < 0\}$$

halmazban van olyan $\vec{r}_0$ pont, amelyre $r_0 < \delta(\varepsilon)$ teljesül. Tekintsük az

$$\vec{r}(t) := \vec{r}(t; \vec{r}_0, \vec{0}), \quad \vec{v}(t) := \vec{v}(t; \vec{r}_0, \vec{0})$$

mozgást. Az ε és $\delta(\varepsilon)$ közötti összefüggés miatt

$$(8) \quad r^2(t) + v^2(t) < \varepsilon^2 \quad (t \geq 0).$$

Tehát – az 1. pontot figyelembe véve – az energia a tekintett mozgás mentén csökkenő és alulról korlátos, vagyis létezik a

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E(\vec{r}(t), \vec{v}(t)) =: e_* \leq U(\vec{r}_0) < 0$$

határérték. Megmutatjuk, hogy a (8)–(9) tulajdonságok ellentmondáshoz vezetnek.

3. Most konstruálunk egy r_* pontot a H halmazban, amelyről meg fogjuk mutatni, hogy egyensúlyi helyzet.

Tekintsünk egy tetszőleges $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$) sorozatot. Az $\mathbb{R}^6$ tér origó körüli ε -sugarú gömbje kompakt, tehát (8) következtében feltehetjük, hogy a

$$(10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{r}(t_k) =: \vec{r}_*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{v}(t_k) = \vec{v}_*$$

határértékek léteznek. (9) szerint

$$E(\vec{r}_*, \vec{v}_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} E(\vec{r}(t_k), \vec{v}(t_k)) = e_* < 0,$$

és $v_*^2 \geq 0$, ezért $U(\vec{r}_*) < 0$, vagyis $\vec{r}_* \in H$. A következő pontban bebizonyítjuk, hogy $\vec{r}_*$ egyensúlyi helyzet, ami ellentmond az (ii) feltételnek.

4. Indítsunk mozgást az $\vec{r}(0) = \vec{r}_*$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_*$ kezdeti feltételekkel. Be fogjuk látni, hogy $\vec{v}(t; \vec{r}_*, \vec{v}_*) \equiv 0$ ($t \geq 0$). Ekkor $\vec{r}(t; \vec{r}_*, \vec{v}_*) = \vec{r}(t; \vec{r}_*, \vec{0}) \equiv \vec{r}_*$ ($t \geq 0$), azaz $\vec{r}_*$ valóban egyensúlyi helyzet, és készen is vagyunk.

Legyen most $t > 0$ tetszőlegesen rögzített időpillanat. A megoldások a kezdeti értékektől folytonosan függnének, tehát (9) és (10) szerint

$$E(\vec{r}(t; \vec{r}_*, \vec{v}_*), \vec{v}(t; \vec{r}_*, \vec{v}_*)) = \lim_{k \rightarrow \infty} E(\vec{r}(t + t_k; \vec{r}_0, \vec{0}), \vec{v}(t + t_k; \vec{r}_0, \vec{0})) = e_*.$$

Mivel t tetszőleges volt, azt kaptuk, hogy az E mechanikai energia állandó az $(\vec{r}_*, \vec{v}_*)$ állapotból indított mozgás mentén. De ez azt jelenti, hogy ezen mozgás mentén minden időpillanatban teljesül az $E' = 0$ feltétel, ami (7) szerint csak úgy lehet, hogy $v(t; \vec{r}_*, \vec{v}_*) \equiv 0$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. Epilógus

1919-ben a kolozsvári egyetem román fennhatóság alá került, ezért a tanárok nagy része – köztük Haar Alfréd és Riesz Frigyes – Szegedre ment, ahol egy új egyetem alapjait rakták le. Közben a magyar „matematikusokat gyártó szerkezet” tovább működött. Kevéssel a háború befejezése után a tudomány olyan művelői jelentek meg Magyarországon, mint Kármán Tódor, Pólya György, Szegő Gábor, Neumann János és mások. Ők viszont nem a Kárpát-medence keleti régiói felé vették útjukat, mint néhány évvel előttük járó társaik, hanem ... de ez már egy másik történet. A mostani véget ért.¹⁷

Hivatkozások

- [1] Arnold, V. I., *A mechanika matematikai módszerei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [2] Diacu, F. és Holmes, P., *Égi találkozások. A káosz és a stabilitás eredete*, Akkord, Budapest, 2003.
- [3] Fejér, L., A Poisson-féle integrál elméletéhez, *Mat. Term. Ért.*, **19** (1901), 322–325.
- [4] Fejér, L., Über zwei Randwertaufgaben, *Math. u. Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, **19** (1903), 329–331.
- [5] Fejér, L., Az Ostwald-féle mechanikai elvről, *Mat. Term. Ért.*, **23** (1905), 155–176.
- [6] Fejér, L., Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik, *Math. Ann.*, **59** (1906), 422–436.
- [7] Fejér, L., Tömegpont egyensúlya ellenálló közegben, *Mat. Term. Ért.*, **24** (1906), 109–116.
- [8] Fejér, L., Stabilitási és labilitási vizsgálatok a tömegpontrendszer mechanikájában, *Mat. és Fiz. Lapok*, **15** (1906), 152–172.
- [9] Fejér, L., Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel, *Journal für die reine und angew. Math.*, **131** (1906), 216–223.
- [10] Fejér, L., Sur le calcul des limites, *Comptes Rendus*, **143** (1906), 957–959.
- [11] Fejér, L., Über die Eindeutigkeit der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Zeitschr.*, **1** (1918), 70–79.
- [12] Hatvani László, Nem-autonóm differenciálegyenlet-rendszerek megoldásainak stabilitása és parciális stabilitása, *Alk. Mat. Lapok*, **5** (1979), 1–48.
- [13] Hatvani László, Közönséges differenciálegyenletek megoldásainak stabilitásáról mechanikai alkalmazásokkal, *Alk. Mat. Lapok*, **15** (1990), 1–90.
- [14] F. Klein und A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels I–IV*, Teubner, Leipzig, 1897–1910.
- [15] Kozlov, V. V. and Palamodov, V. P., On asymptotic solutions of the equations of classical mechanics, *Soviet Math. Dokl.*, **25** (1982), 335–339.

¹⁷Elképzelhetetlennek tartjuk, hogy a legendás tanár hírében álló Fejér Lipót kolozsvári működése alatt ne készített volna az általa oktatott tárgyakhoz egyetemi jegyzeteket. Ezekből azonban – legalábbis a kolozsvári egyetem matematikai könyvtárában – egyetlen egy sem lelhető fel.

- [16] Prékopa András, Farkas Gyula élete és munkásságának jelentősége az optimalizálás elméletében, *Új utak a magyar operációkutatásban. In memoriam Farkas Gyula* (szerk. Komlósi Sándor és Szántai Tamás), Dialóg Campus Kiadó, Pécs, 1999.
- [17] Rouche, N., Habets, P. és Laloy, M., *Stabilitáselmélet. A Ljapunov-féle direkt módszer*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.
- [18] Salvadori, L., Sull' estensione ai sistemi dissipativi del criterio di stabilità del Routh, *Ricerche Mat.*, 15 (1966), 162–167.
- [19] Thomson, W. (Lord Kelvin) and Tait, P. G., *Treatise on Natural Philosophy*, Clarendon Press, Oxford, 1867.

4. Függelék. Ljapunov szerepe a stabilitáselmélet létrehozásában

Ljapunov, amint arra a 2.1. alfejezetben már kitértünk, felzárkóztatta a stabilitás elméletét a matematika akkori fejlettségi szintjére. Ami legalább ennyire fontos, három területen a jövőt is előkészítette.

1) Az általa kidolgozott és később őrá elnevezett módszer¹⁸ – amelynek felhasználásával sikerült a 2.5. Tételt is bizonyítani – minden további stabilitásvizsgálat (1930-tól a Szovjetunióban, 1960-tól kezdve Nyugaton is) leghatékonyabb eszközének bizonyult és számtalan alkalmazást nyert az irányítás- és a szabályozáselméletben is.

2) Befejezetlenül maradt írásában Ljapunov kísérletet tett a centrális sokaság tételének kimondására és bizonyítására. Viktor Pliss, aki végülis a hatvanas évek közepén sikerrel járt, sokat profitált Ljapunov egy kéziratából, amely egy konkrét nemlineáris mechanikai feladat egyensúlyi helyzetének stabilitásvizsgálata kapcsán a három sajátérték a képzetes tengelyen problematikájával foglalkozott.

3) Ljapunov (1884) Poincaréval egyidejűleg, ugyanazzal a gondolatmenettel – egy térbeli integrációs tartomány határa szerinti sorfejtés első tagjainak vizsgálatával – kimutatta, hogy az egyre gyorsabban forgó bolygók/csillagok (folyadékok, amelyek részecskéit csak a gravitációs erő tartja össze) alakja „körte” is lehet. Visszatérve e témakörhöz, egy összességében több mint ezer oldalas (1906–1916) cikksorozatban azt is sikerült plauzibilissá tennie, hogy ez a – ma úgy mondanánk, hogy a forgási ellipszoidból az egyenlítő mentén szimmetriasértő bifurkációval keletkező – „körte” instabil¹⁹.

¹⁸Természetesen ennek is voltak előzményei: az, hogy az energia bizonyos disszipatív rendszerekben a trajektóriák mentén csökkenve „Ljapunov-függvény”-ként viselkedik, már 50 évvel korábban, Jacobinál is fontos szerepet játszik.

¹⁹Poincaré és George Darwin (a biológus Darwin fia, a Királyi Csillagászati Társaság elnöke) ezzel ellentétes véleményt képviseltek, sőt a „körte” stabilitását (tanítványaik munkái által) bizonyítottak vélték. A „körtés ág” stabilitásán alapult G. Darwin elmélete a kettőscsillagok keletkezésének magyarázatára. Végérvényesen csak jóval mindhármuk halála után derült ki teljes bizonyossággal, hogy a „körte” valóban instabil. A „körte” stabil vagy instabil voltának eldöntése – a funkcionálanalízis eszközeinek szinte teljes hiányában – alighanem még egy Poincaré erejét is meghaladta volna.

Jóllehet nemzetközi elszigeteltsége soha nem volt teljes, Ljapunov nagyfokú nyelvi és földrajzi elkülönültségben élt. „Körtés” dolgozatait leszámítva, stabilitáselméletből egyetlen nem-orosz nyelvű cikket publikált. Felix Klein [14] egy könyvelő pontosságával említi Ljapunov ezen cikkét, sőt egy lábjegyzetben még azt is megjegyzi, hogy ugyanennek a szerzőnek további, orosz nyelven írott dolgozatai is vannak a stabilitás témakörében.²⁰

A Ljapunovra – csakúgy mint a stabilitás régi történetére – vonatkozó információk jelentős részét N.D. Mojszejev 1949-ben megjelent *Ocserki po razvityiji tyeoriji usztojcsivosztji* című könyvéből vettük. Bátor és kiegyensúlyozott írás²¹, amely beszámol Ljapunov halálának körülményeiről is. Ljapunov nem érezte jól magát a forradalom utáni Petrograd zavaros világában. Feleségével együtt Ogyesszába ment, de továbbjutniuk nem sikerült. Az asszony tüdőgyulladásban megbetegedett és meghalt. Alekszandr Mihajlovics még aznap, 1918. október 31-én fejbe lőtte magát és három napra rá meghalt.

GARAY BARNABÁS
MŰEGYETEM, MATEMATIKA INTÉZET
1521 BUDAPEST, MŰEGYETEM RKP. 3-9.
garay@math.bme.hu

HATVANI LÁSZLÓ
SZEGEDI EGYETEM, BOLYAI INTÉZET,
6720 SZEGED, ARADI VÉRTANÚK TERE 1.
hatvani@math.u-szeged.hu

KOLUMBÁN JÓZSEF
BABES-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM,
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR
STR. KOĞALNICEANU NR. 1
RO-400084 CLUJ-NAPOCA
kolumban@math.ubbcluj.ro

²⁰ A groteszk az egészben az, hogy mindezt könyvének abban a fejezetében teszi, amelyben egyensúlyi helyzetek linearizálással történő stabilitásvizsgálatáról, mint matematikailag megalapozatlan módszerről értekezik. Pedig a lényeg – nevezetesen a Ljapunov által már korábban bizonyított 2.5. Tétel – ott rejtőzik a lábjegyzetben ([14], 374. oldal). Abban az időben még természetes volt, hogy egy göttingeni professzor nem érdeklődik egy harkovi docens cirillbetűs munkái iránt, Ljapunov eredményeit balti matematikusok (akik értettek oroszul) közvetíthették volna a Nyugat felé. Közülük Bohl és Adolf Kneser (a sokkal ismertebb H. Kneser apja) maguk is foglalkoztak stabilitáselmélettel. Hogy miért nem tették? [Minden oroszok cárijának alattvalóiként aligha érezték feladatuknak, hogy az orosz tudomány és kultúra értékeit Nyugaton képviseljék.] A matematikusok 1908-as római kongresszusán Poincaré és Ljapunov egyaránt részt vett. Poincarét itt is nagy udvartartás vette körül. Ljapunov, mint afféle vidéki ember, anélkül ment haza, hogy személyesen találkozhatott volna vele.

²¹ A német forrásokat ugyan negligálja, de Sztálin-idézet sincsen benne. Lenintől is csak elvétve idéz ezt-azt. A legérdekesebb a következő: „Poincaré gyermekét filozófus, de hatalmas fizikus”. (Úgy látszik, ez a szavazárása lehetett. A társszerzők még legfiatalabbika is emlékszik egy másik Lenin-idézetre, középiskolai irodalomtanulmányainak idejéből: „Tolsztoj gyermekét filozófus, de óriási művész”).

LIPÓT FEJÉR HABILITATED AT KOLOZSVÁR 100 YEARS AGO IN STABILITY THEORY

BARNABÁS GARAY, LÁSZLÓ HATVANI, JÓZSEF KOLUMBÁN

Lipót Fejér habilitated 100 years ago at June 23, 1905 at the University of Kolozsvár. His habilitation lecture was devoted to the stability theory of ordinary differential equations with title "A study on stability and instability of the mechanics of mass-point systems". (A German translation of the original Hungarian can be found in *Fejér Lipót Összegyűjtött munkái – Leopold Fejér Gesammelte Arbeiten* (ed. P. Turán), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.)

In this paper we commemorate Lipót Fejér as well as the Kolozsvár School, being the first internationally recognized professional community of the Hungarian mathematics. Our review on Fejér's habilitation lecture ranges from an introductory chapter surveying the general state of stability theory around 1900, to a short Appendix on the work of A. M. Liapunov. The main emphasis here is put on the mechanical example in Fejér's lecture, which he could not analyze in full detail due to the relative immaturity of topological concepts and techniques that time: his original line of thought can be made complete by LaSalle's invariance principle discovered 50 years later.